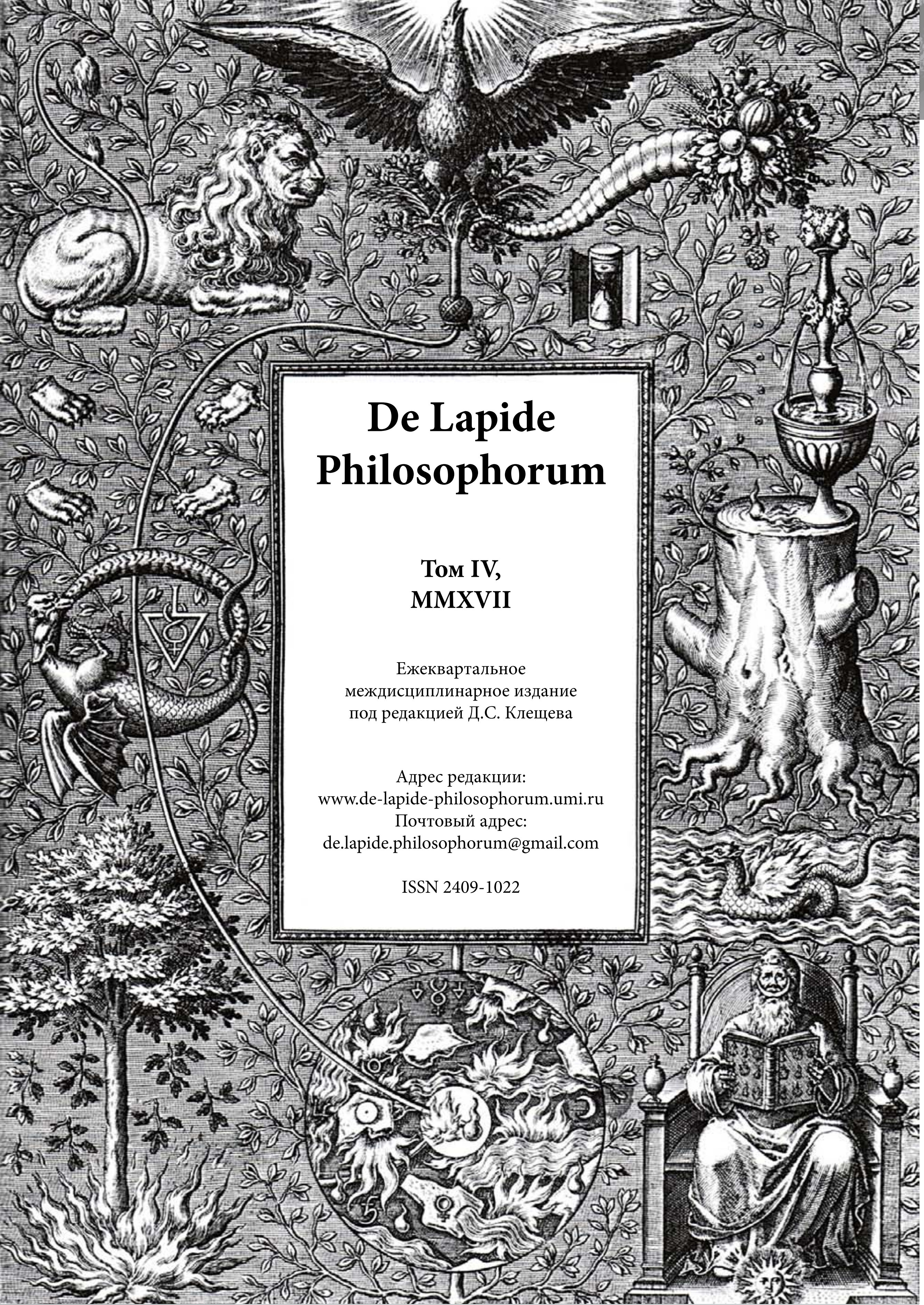
De Lapide Philosophorum

№IV (012)
ИЮНЬ, 2017

www.de-lapide-philosophorum.umi.ru

В номере:

16+



De Lapide Philosophorum

Том IV,
MMXVII

Ежеквартальное
междисциплинарное издание
под редакцией Д.С. Клещева

Адрес редакции:
www.de-lapide-philosophorum.umi.ru
Почтовый адрес:
de.lapide.philosophorum@gmail.com

ISSN 2409-1022

Кризис оснований: кому он выгоден?

Каждый знает античную апорию Зенона «Ахиллес и черепаха». Многие слышали о парадоксе Эпименида «Критянин», о парадоксах теории множеств, о логических парадоксах Бертрана Рассела, вроде того, когда на каждой стороне листа написано «*Утверждение на обратной стороне — ложно*». К этим невинным математическим шалостям принято относиться с иронией, мол, ничего драматичного в них нет.

Якобы все парадоксы хорошо известны, и современные ученые знают, что с ними делать, они якобы во всем давно разобрались. Но это впечатление обманчиво! В глубинах «*самой точной из наук*» скрыто так много противоречий, что уже сама мысль об их существовании вызывает у математиков раздражение. Они предпочитают их игнорировать, скрывая масштабы кризиса основ математики.

На обывательском уровне кажется, что парадоксы вообще не имеют никакого отношения к действительности. Даже когда мы сталкиваемся с технологией двойных стандартов, даже когда мы видим вопиющие военные преступления и фейковые новости, даже когда с небывалой силой проявляется кризис основ демократии, о чем свидетельствует ситуация вокруг избранного в США президента Д.Трампа (кстати, еще Курт Гедель обнаружил, что Конституция США допускает существование в США настоящего тоталитарного режима).

А ведь хаос, который наблюдается в современном мире, — результат целенаправленного применения парадоксов. В наши дни создана целая теория хаоса, которая работает против «*неполноценных*» с глобальной точки зрения народов. Вместо того, чтобы бороться с противоречиями, влиятельные математики *de facto* занимаются их распространением. Абсурд поставлен на службу системы глобального управления, и глубоко заблуждаются те, кто думает, что все само собой разрешится. За последние сто лет мировой кризис лишь усугублялся, и вряд ли сейчас что-то изменится, ведь этот кризис — точное отражение нынешнего состояния математической науки.

➢
До сих пор сборник работ математика-интуициониста Лейтзена Брауэра, одного из самых влиятельных критиков оснований математики, не издан на русском языке. Об интуиционизме в России знают очень немногие, лишь специалисты узкого профиля, преимущественно логики. Однако интуиционизм никогда не ограничивался логикой, как можно подумать в наши дни. Наоборот, логика в интуиционизме была всегда вторична по отношению к конкретным построениям и доказательствам. Но если мы взглянем на современные статьи об интуиционизме, то они посвящены преимущественно разбору логических схем. Постепенно главная задача интуиционизма (изучение непрерывности и исключение некорректных выводов формальной математики) позабылась...

Л. Брауэр

Интуиционизм и формализм

Перевод Н.Е. Горфинкель по изданию:
Philosophy of mathematics: selected readings. Cambridge, New-York, 1983. PP. 77-89

Предмет, разговор о котором я хотел бы предложить Вашему вниманию, имеет отношение к фундаментальным основам математики. Чтобы понять, как развивались существующие ныне в этой области противостоящие друг другу теории, нужно сначала добиться ясного понимания термина «*наука*»; поскольку это та ее часть, которую традиционно занимает математика в умах людей.

Под наукой мы понимаем опирающееся на знание законов природы систематическое отслеживание причинных связей явлений, имеются в виду связи, которые для личных или общественных целей удобно считать идентично повторяющимися, — и в особенности те из них, которые играют важную роль в социальных отношениях.

Наука придает человеку огромную силу в его деятельности над природой, и происходит это благодаря тому факту, что неизменно уточняющиеся данные о причинных связях явлений предоставляют все большие и большие возможности для воссоздания изучаемого события, которое бывает трудно или даже невозможно воспроизвести непосредственно, но удается получить, воссоздав другие явления, связанные с первым казуальными цепочками.

Человек всегда и везде создает порядок в природе, и это, в свою очередь, происходит за счет того, что он не только

Интуиционизм как свойство творческой деятельности (не только математической) и есть развитие способности к наблюдению скрытых законов и невоспринимаемых напрямую органами чувств объектов, таких как бесконечность.

IN BREVI

В истории науки голландский математик Лейтзен Эгберт Ян Брауэр занимает особое место. Он не только получил выдающиеся результаты в области топологии, математической логики, теории множеств, его интересовали в не меньшей степени вопросы психологии и теории познания. Он исследовал отношение математического языка к интуиции, связывал само возникновение представлений о математическом континууме с проблемой времени и сознания.

Именно обращение Брауэра к проблеме сознания, существенно влияющего на образование «*первоинтуиции*» натурального числа, стало причиной того, что интуиционизм в советской науке причисляли к философскому направлению «*идеализма, волюнтаризма и агностицизма*». Желание заклеймить интуиционизм привычными штампами, в конце концов, завело в тупик. Попытка грести одной гребенкой и направление формализма с его обособленным царством математических идей, и интуиционизм, который критиковал формализм, связывая математику с сознанием, нанесла советской школе философии математики невосполнимый урон — она прекратила существование, дискредитировав себя как с точки зрения формализма, так с точки зрения интуиционизма.

Поскольку такие математические объекты, как «*точка*» или «*бесконечность*», не являются объектами материального мира, то сама попытка трактовать основания математики с позиций материализма бессмысленна. И сегодня «*объективная научная философия*», по сути, примкнула к идеалистическому направлению формализма во всем, что касается фундаментальных проблем математики. Чтобы понять, насколько велика пропасть между идеями интуиционистов и формалистов, достаточно ознакомиться со взглядами самого Брауэра.

Конструктивное направление А.А. Маркова исправило ряд неточностей интуиционистов (см. Гейтинг А. Интуиционизм. 1965), но ни в коем разе не пошатнуло позиции формалистов. Основная причина, по которой современный интуиционизм и конструктивизм не находят широкого понимания, состоит в их разрыве с философией и проблемой сознания, хотя сам Брауэр считал эту связь даже более важной, чем полученные им математические результаты.

Здесь Брауэр указывает на принципиальное отличие интуиционизма от формализма, которое в начале XX века мало кто замечал. Но теперь мы знаем, что формальная школа математики полностью отстранилась от изучения законов природы именно по той причине, что в природе не действуют принципы, провозглашенные в формализме «*абсолютной математической истиной*». Реальные закономерности гораздо сложнее схематичного мышления по одному шаблону, который был признан той или иной группой людей в качестве «*окончательно установленной научной истины*». Интуиционизм не ограничивается таким «*шаблонным мышлением*», и в этом он сближается с природой, в которой одновременно действуют самые разные, казалось бы, исключающие друг друга законы.

выделяет причинные связи явлений (то есть не только старается отделить их от создающих помехи вторичных явлений), но также дополняет их явлениями, вызванными его собственной деятельностью, делая их, таким образом, широко применимыми. Среди последних — результаты разнообразных подсчетов и измерения занимают столь важное место, что многие законы природы, представленные в научном мире, основаны только на соответствии результатов подсчетов и измерений.

В связи с этим можно отметить, что законы природы, в формулировке которых присутствуют величины измерений, надо понимать как выполняющиеся в природе лишь с некоторой степенью точности; в действительности законы природы, как правило, не доказаны в отличие от достаточно рафинированных измерительных методов.

Исключениями из этого правила с древнейших времен были с одной стороны — практическая *арифметика* и *геометрия*, а с другой — *динамика твердых тел* и *небесная механика*. Обе эти группы противостояли до сегодняшнего дня всем новшествам в методах ведения наблюдений. Но если для второй группы такое положение всегда рассматривалось как нечто случайное и временное, и все готовы были к тому, что эти науки снизойдут до ранга вероятностных теорий, то до сравнительно недавнего времени существовала непоколебимая уверенность в том, что никакие эксперименты не могут нарушить точность законов арифметики и геометрии; эта уверенность отражается в утверждении, что математика — это уж «*точно*» точная наука.

Все то, на чем зиждется убежденность в неоспоримой точности математических законов, на протяжении столетий было объектом философских исследований, и здесь можно выделить две точки зрения: *интуиционизм* (преимущественно французский) и *формализм* (преимущественно немецкий). Во многих аспектах две эти точки

зрения становятся все более и более явно противопоставлены друг другу; но за последние несколько лет они пришли к согласию в том, что вопрос о применимости математических законов в качестве законов природы не представляет интереса. Но на вопрос, где же в действительности существует математическая точность, каждая из сторон отвечает по-своему; интуиционист говорит — «*в разуме человека*», формалист — «*на бумаге*».

У Канта мы находим старую форму интуиционизма, на сегодняшний день практически полностью исчезнувшую, в которой время и пространство принимаются как формы познания, неотъемлемые для человеческого разума. Для Канта аксиомы арифметики и геометрии были синтетическими априорными суждениями, то есть суждениями, не зависящими от опыта и не нуждающимися в аналитических доводах; и это объясняло их аподиктичную точность как в опытном мире, так и в абстрактном. Поэтому для Канта возможность экспериментального опровержения арифметических и геометрических законов была не только исключена по причине святой веры в них, но даже совершенно немыслима.

Диаметрально противоположна точка зрения формализма, которая заключается в том, что человеческий разум не располагает точными образами, чтобы решать, какие из линий прямые, а какие нет, или, например, какие из чисел больше десяти, а какие меньше, и поэтому утверждает, что математические сущности существуют в нашем представлении о мире не больше, чем в нем самом.

Из нескольких соотношений между математическими сущностями, которые мы полагаем аксиомами, мы действительно выводим другие соотношения, следуя определенным законам, будучи уверены, что выводим истины из истин по правилам логики, но это нематематическое утверждение истинности и легитимности не

Брауэр затрагивает важный вопрос: почему математика, будучи произведением человеческого интеллекта, столь эффективна в решении проблем естествознания? Он говорит, что в начале XX века интуиционисты и формалисты сошлись в одном — в том, что следует четко различать математические законы и законы природы. Но в качестве причины такого разделения они называли разные вещи. Формалисты довольствовались тем, что для обоснования любого произведения человеческого интеллекта достаточно, чтобы его «*законность*» подтвердили другие люди. Для интуициониста этого недостаточно, поскольку сама история развития науки свидетельствует о том, что одно знание сменяет другое, что интеллект человека непрерывно эволюционирует. И то, что вчера считалось вполне «*законным*», завтра может породить ошибку, поэтому главной движущей силой науки является не интеллект, а интуиция, лежащая в основе сознания. При этом и эволюция сознания, и эволюция природы оказываются незамкнутыми системами, в их развитии много общих черт, что как раз и объясняет эффективность математики в изучении проблем естествознания, ведь разум, вопреки навязанному нам мнению, — тоже явление природы.

обладает какой бы то ни было степенью точности. Это есть ни что иное как еле уловимое ощущение очарования, которое исходит от знания эффективности приложений этих связей и законов рассудка к реальному миру.

Для формалиста, таким образом, математическая точность есть по сути просто разборка серии соотношений и не зависит от смысла, который можно было бы придать этим соотношениям или математическим сущностям, которые они связывают. И для последовательного формалиста эта бессмысленная серия соотношений, к которой сведены все разделы математики, математически существует, только если они были представлены в устной или письменной речи вместе с логико-математическими законами, на основании которых сделан их вывод, образуя тем самым то, что называется символической логикой.

Поскольку обычная устная или письменная речь не удовлетворяет даже минимальным требованиям последовательности, необходимой для этой символической логики, формалисты стараются избежать использования повседневного языка в математике. Как далеко это может завести, можно увидеть на примере современной итальянской школы формалистов, чей руководитель Пеано опубликовал один из своих наиболее важных результатов, касающийся существования решений (интегралов) для действительных дифференциальных уравнений в «Mathematische Annalen» на языке символической логики. Как результат, статью смогли прочесть только несколько посвященных, и она не была общедоступной до тех пор, пока один из них не перевел ее на немецкий.

Взгляды формалиста должны вести к убежденности, что если другие символические формулы заменят те, которые представляют сегодня фундаментальные математические соотношения и логические законы, то отсутствие ощущения удовлетворенности, называемое «*осознанием легитимности*», которое может возникнуть в результате такой замены, ни в малейшей степени не преуменьшит их математической точности. Философу или антропологу, но никак не математику выяснять, почему конкретные системы символической логики эффективнее других могут быть спроецированы на реальный мир природы. Не математику, а психологу объяснять, почему мы верим в конкретные системы символической логики и не верим в другие, и, в частности, почему мы питаем такую антипатию к так называемым противоречивым системам, в которых могут быть одновременно истинны как высказывание, так и его отрицание (Mannoury, 1909: 149-54).

Пока интуиционисты оставались верны принципам теории Канта, казалось, что развитие математики в XIX веке поставило их в как никогда слабое положение по сравнению с формалистами. Поскольку это развитие в первую очередь многократно продемонстрировало, как целые теории могут быть перенесены из одной области математики в другую: проективная геометрия, например, осталась неизменой после того, как точка и прямая поменялись ролями, важная часть арифметики действительных чисел применима и для разнообразных других подполей в поле комплексных чисел, и практически все теоремы элементарной геометрии остались верны для неархимедовой геометрии, в которой для каждого отрезка существует отрезок, бесконечно малый по отношению к первому. Эти открытия, казалось бы, должны были действительно показать, что только логическая форма математической теории имеет значение, и не стоит заботиться об ее материи больше, чем необходимо думать, например, о смысле наборов цифр, с которыми оперируешь для правильного решения задач арифметики.

Но самым серьезным ударом по кантинианской теории было открытие неевклидовой геометрии, непротиворечивой теории, разработанной на основе системы аксиом,

Любопытно, что формальный подход был распространен в XX веке не только на математику, но и на квантовую физику после введения соотношений неопределенности Гейзенберга. То есть физиков перестало интересовать, какой смысл можно придать этим соотношениям или соответствующим квантовым объектам. Неопределенность объектов меньше планковской длины стала восприниматься как неотъемлемая часть самой природы. Хотя это, разумеется, часть той квантовой теории, к которой пришли ученые XX века. Не случайно Моррис Клайн после книги «Математика. Утрата определенности» (1984) написал книгу «Математика. Поиск истины» (1988), которая посвящена обзору взаимосвязей математики и физики. Иначе говоря, такую же утрату определенности мы наблюдаем и в современной физике, причем «*решение этой проблемы вряд ли зависит от получения новых экспериментальных данных*» (С.272). Между тем, если решение и существует, то его, безусловно, следует искать в неточности «*общепризнанной математики*», которая отбросила рассмотрение бесконечно малых величин в эпоху господства физической концепции механицизма.

Лукавство концепции формализма состоит в том, что ни философы, ни антропологи, ни психологи до сих пор ничего не выяснили и ничего не объяснили. Потому что: *а)* формалисты не заинтересованы в том, чтобы их «*слепую веру*» изучали другие специалисты; *б)* для понимания многих тонкостей в такого рода исследованиях необходим высокий уровень развития философии и истории математики, а как раз эти дисциплины были планомерно исключены формалистами из программ образования.

Брауэр явно ссылается на теорию «*классических иррациональных*». Так, никто не задумывается, что произведение $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ дает иррациональную дробь. Все просто верят, что она равна рациональному числу *2*.

отличающихся от аксиом элементарной геометрии только тем, что аксиома параллельности была заменена ее отрицанием. Поскольку это показало, что явления, традиционно описываемые на языке элементарной геометрии, могут быть описаны с такой же степенью точности, хотя, зачастую, и менее компактно, на языке неевклидовой геометрии; так что не только невозможно оставаться уверенным, что пространство нашего опыта имеет свойства элементарной геометрии, но бессмысленен даже вопрос о существовании какой-то выделенной геометрии, истинной для этого пространства.

Элементарная геометрия, действительно, лучше, чем любая другая, подходит для описания законов кинематики твердых тел, а значит, и большего количества природных явлений, но если запастись терпением, можно было бы создать объекты, кинематику которых было бы проще интерпретировать в терминах неевклидовой, чем евклидовой геометрии (Poincare, 1903: 104).

Какой бы слабой ни казалась позиция интуиционистов после этого периода развития математики, они вновь обрели вес, отказавшись от кантианской априорности пространства, но оставаясь при этом тем более верными теории априорности времени. Этот *нео*-интуиционизм рассматривает рассыпание моментов жизни на качественно разные части, которые должны вновь соединиться, оставаясь разделенными только во времени, как фундаментальное явление человеческого интеллекта, переходящее от эмоциональной составляющей в фундаментальное явление математического мышления, в интуицию чистого двуединства.

Эта интуиция двуединства, основополагающая интуиция математики, создает не только числа «*один*» и «*два*», но и все конечные порядковые числа, поскольку один из элементов этого двуединства может быть помыслен как новое двуединство, и этот процесс может повторяться

Конечно, и время может быть помыслено как один из способов упорядочения событий, которым удобно пользоваться в соответствии с нашим обыденным опытом, а не как категория, существующая вне зависимости от нашего опыта. Но такая нелинейность «*сверхвремени*» будет связана уже с феноменом коллективного и трансперсонального сознания, с «*квантовыми*» эффектами сновидений, то есть относиться к области, где само мышление обретает иные формы и свойства.

бесконечно; все это приводит к самому маленькому бесконечному порядковому числу ω. Наконец, эта основополагающая интуиция математики, в которой связанное и разделенное, непрерывное и дискретное соединены, приводит непосредственно к интуиции линейного континуума, то есть « *чего-то между*», что не исчерпывается вставкой новых элементов и что потому никогда не может быть помыслено как простое соединение элементов.

Подобным образом априорность времени не только определяет свойства арифметики как синтетические априорные суждения, но делает то же самое со свойствами геометрии, причем не только элементарной двух- и трехмерной геометрий, но и n-мерной неевклидовой геометрии. Поскольку со времен Декарта мы научились сводить все эти геометрии к арифметике посредством вычислений в координатах.

С современной точки зрения интуиционизма, таким образом, все математические множества элементов, которые названы таким именем, могут быть получены, основываясь на базовой интуиции, и это может быть проделано применением конечного числа раз всего двух операций: «*создать конечное ординальное число*» и «*создать бесконечное ординальное число ω*»; здесь надо понимать, что для дальнейших целей любое ранее сконструированное множество или ранее проделанные конструктивные операции, могут быть использованы как элементы.

Как следствие, интуиционист распознает существование только счетных множеств, то есть множеств, чьи элементы могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие как с элементами финитного ординального числа, так и бесконечного ординального числа ω.

Такая концепция непрерывности имеет место не только в математике, но и в процессах биологической эволюции. Как бы ни пытались представители формализма представить феномен жизни всего лишь соединением химических элементов, которое теоретически можно получить из неживой материи, В.И.Вернадский на примере явления диссимметрии в органике показал, что живое может синтезироваться только из живого.

В концепции континуума, возникшей из теории множеств Г.Кантора, помимо счетных множеств были введены несчетные множества, однако доказательство их существования много раз подвергали сомнению (например, в статьях А.Зенкина).

И в конструкции этих множеств ни повседневный язык, ни язык символической логики, не могут играть иной роли, как только служить в качестве нематематического вспомогательного аппарата, чтобы способствовать математической памяти или чтобы предоставить возможность разным людям построить одно и то же множество.

По этой причине интуиционист никогда не сможет почувствовать абсолютную уверенность в точности математической теории посредством таких гарантов как доказательство ее непротиворечивости, возможность определить ее понятия конечным числом слов (Poincare, 1908a: 6) или практическая достоверность того, что она никогда не приведет к непониманию в отношениях между людьми (Borel, 1912: 221).

Как уже говорилось выше, формалист предпочитает предоставить психологам задачу выбора «*истинно математического*» языка среди множества символических языков, которые могут быть в равной степени развиты. Поскольку психология еще не приступила к решению этой задачи, формализм вынужден обозначить границы, по крайней мере, временно, той области, которую он бы хотел воспринимать как «*истинную математику*», и наложить для этих целей определенную систему аксиом и законов вывода, если он не намерен видеть свою работу обреченной на бесплодие.

Ситуация, когда формалисты ожидают подтверждения «*истинности*» своего языка от психологов, весьма комична. Это как если бы группа архитекторов возвела «*временное*» строение, потратив на него огромное количество ресурсов, и стала ожидать подтверждения его сейсмоустойчивости от художника, которого пригласили бы оценить внешний вид, либо от музыканта, которому предложили бы сыграть внутри здания на музыкальном инструменте, либо от орнитолога, который бы сравнил здание с функцией птичьих гнезд. Все они скажут, что здание довольно прочное. Но если самих архитекторов не заботила его сейсмоустойчивость, то она не может появиться у здания сама по себе.

Разные направления, в которых была предпринята существенная попытка это проделать, все следовали единой ведущей идее, то есть допущению существования мира математических объектов — мира, не зависящего от мыслящего субъекта, подчиняющегося законам классической логики, чьи объекты могут обладать, с учетом друг друга, «*отношением множества со своими элементами*». Со ссылкой на это отношение постулируются разнообразные аксиомы, подсказанные практикой с естественными конечными множествами, среди которых важнейшие — это: «*множество определяется своими элементами*», «*для любых двух математических объектов определено, содержится ли один из них в качестве элемента в другом или нет*»; «*каждому множеству соответствует другое множество, содержащее в качестве своих элементов подмножества исходного множества и только их*»; **аксиома выбора:** «*множество, которое разделено на подмножества, содержит по крайней мере одно подмножество, которое содержит один и только один элемент из каждого из исходных подмножеств*»; **аксиома включения:** «*если для каждого математического объекта определено, выполняется ли для него некоторое свойство или нет, то существует множество, содержащее в себе ровно те объекты, для которых это свойство выполняется*»; **аксиома композиции:** «*элементы всех множеств, которые принадлежат множеству множеств, образуют новое множество*».

На базе такого множества аксиом формалист развивает теперь в первую очередь теорию «*конечного множества*». Множество называется конечным, если нельзя построить взаимно-однозначное соответствие его элементов с элементами одного из его подмножеств; с использованием относительно сложных доводов доказано, что принцип полной индукции является фундаментальным свойством таких множеств (Zermelo, 1909: 185-93); этот принцип утверждает, что свойство будет выполнено для всех конечных множеств, если, во-первых, оно выполнено для всех одно-элементных множеств и, во-вторых, его истинность для произвольного конечного множества следует из его истинности для того же множества без одного из его элементов. Тот факт, что формалисту необходимо дать точное доказательство этого принципа, который является очевидным для ординальных чисел интуициониста просто по их построению, демонстрирует в то же время, что первый никогда не будет иметь воз-

Если продолжить аналогию со строительством сейсмоустойчивого здания, то среди перечисленных здесь аксиом или изначальных условий, определяющих ход строительства, нет ни одного такого, которое бы учитывало уровень сейсмоустойчивости возводимой конструкции. Для этого потребовалось бы добавить к аксиоме включения условие, указывающее, когда мы можем включить в множество объекты, для которых выполняется некоторое свойство не всегда или когда оно может быть изменено на другое. То есть не была учтена даже возможность такого арифметического равенства как *1=0,(9)*, когда бесконечное нецелое множество *0,(9)* включается в конечное целое *1*. Для такого математического здания достаточно легкого колебания почвы, чтобы разрушились основные несущие опоры. Поэтому далее Брауэр приводит аксиому включения Цермело, сделавшего здание прочнее, не дожидаясь мнения психологов.

Можно сказать, что в своем стремлении перейти от неоднозначной неточности, присущей как мышлению, так самой природе в ее становлении и движении, к однозначной математической точности, формалист получает однозначную неточность или же неточную однозначность, но никогда не достигает желаемого результата.

Например, в знаменитом доказательстве несчетности множества *X* действительных чисел Г.Кантор нумерует множество всех чисел на интервале [0, 1] так, словно это множество конечное, хотя по начальному условию пересчет бесконечен. В ходе «*доказательства*» одно свойство самовольно подменяется другим, при этом предполагается, что мы продолжаем иметь дело с теми же начальными свойствами. Затем строится диагональное число y_1, которое якобы не входит в «*полностью*» пронумерованное «*бесконечное множество*» чисел на интервале [0, 1]. И опять применяется принцип полной индукции, доказанный только для конечных множеств: y_1 может быть больше некоторого конечного множества, но в бесконечном пересчете на интервале [0, 1] любому диагональному числу y_1 найдется счетное соответствие *n+1*.

можности доказать правомерность его выбора аксиом, заменив неудовлетворительное для него обращение к неточным практическим методам или к равной степени неточной, по его мнению, интуиции на доказательство непротиворечивости его теории.

Поскольку для того, чтобы доказать, что во множестве следствий, которые могут быть получены из используемых им аксиом, не может возникнуть противоречия, ему сначала пришлось бы показать, что если противоречий не возникло в *n*-ом следствии, то они не возникнут и в следствии (*n+1*). После чего ему пришлось бы интуитивно применить принцип полной индукции. Но этот шаг формалист как раз совершить не может, даже доказав принцип полной индукции для конечных множеств; поскольку это потребовало бы математической уверенности, что множество свойств к моменту вывода *n*-ого следствия будет удовлетворять его определению конечного множества (Poincare, 1905: 834), а чтобы добиться этого, пришлось бы прибегнуть не только к недозволенному применению символического критерия в конкретном случае, но и к еще одному интуитивному применению принципа полной индукции; это привело бы его доказательство к порочному кругу.

В области конечных множеств, где аксиомы формалиста имеют абсолютно ясное для интуициониста толкование, с которым оба безоговорочно соглашаются, два этих направления отличаются исключительно в методе, а не в результатах; однако ситуация совершенно меняется в области бесконечных или трансфнитных множеств, где, главным образом применяя **аксиому включения**, приведенную выше, формалист представляет разнообразные концепции совершенно бессмысленные для интуициониста, как, например, «*множество, элементами которого являются точки пространства*», «*множество, элементами которого являются непрерывные функции одной переменной*», «*множество, элементами которого являются дискретные функции одной переменной*» и так далее.

В ходе таких формалистических изысканий оказывается, что последовательное применение аксиомы включения неизбежно ведет к противоречиям. Яркой иллюстрацией этого факта служит парадокс Бурали-Форти (1897). Чтобы продемонстрировать его, нам надо дать несколько определений.

Множество называется упорядоченным, если любые два его элемента связаны отношением «*старше, чем*» или «*младше, чем*», которые согласованы в том смысле, что если элемент *a* старше, чем элемент *b*, то элемент *b* младше, чем элемент *a*, и если элемент *b* старше, чем *a*, и *c* старше, чем *b*, то *c* старше, чем *a*.

Вполне упорядоченное множество (в формалистическом смысле) — это упорядоченное множество, такое что каждое его подмножество содержит элемент, который младше всех остальных.

О двух упорядоченных множествах, между которыми можно установить взаимно-однозначное соответствие с сохранением отношений «*старше, чем*» и «*младше, чем*», говорят, что они имеют одинаковое ординальное число.

Если два ординальных числа *A* и *B* не равны, то одно из них больше второго, скажем *A* больше *B*; это означает, что можно установить взаимно-однозначное соответствие между *B* и начальным сегментом *A* с сохранением отношений «*старше, чем*» и «*младше, чем*». Выше мы представили, с точки зрения интуициониста, самое маленькое бесконечное ординальное число ω, то есть ординальное число множества всех конечных ординальных чисел, упорядоченных по возрастанию. Вполне упорядоченные множества, ординальные числа которых есть ω, называются элементарными рядами.

Без особых трудностей формалист доказывает, что произвольное подмножество вполне упорядоченного множества также является вполне упорядоченным, причем его ординальное число меньше или равно ординальному числу исходного множества; и также что если добавить ко вполне упорядоченному множеству, состоящему не из всех математических объектов, новый элемент, положив его старше всех элементов исходного множества, то таким образом получится новое вполне упорядоченное множество, чье ординальное число больше, чем ординальное число первого.

Теперь мы строим на основе аксиомы включения *множество S, которое содержит в качестве элементов все ординальные числа, упорядоченные по возрастанию*; тогда мы без труда можем доказать с одной стороны, что *S* — вполне упорядоченное множество, чье ординальное число не может превысить никакое другое ординальное число, а с другой стороны — доказать, что, поскольку не все математические объекты являются ординальными числами, то к *S* можно добавить новый элемент и создать другое ординальное число, большее, чем число *S*, — противоречие.

Хотя формалисты обязаны допустить в качестве математических результатов противоречивые, если они хотят быть последовательными, то парадоксы типа Бурали-Форти представляют для них неприятности, ведь в то же время руководящим принципом развития их аргументации является *pincipium contradictionis*, то есть отрицание возможности одновременной истинности двух противоположных свойств.

По этой причине **формулировка аксиомы включения была модифицирована следующим образом:** «*Если для всех элементов множества определено, выполняется для них некоторое свойство или нет, то это множество содержит подмножество, чьими элементами являются те элементы исходного множества, для которых свойство выполнено, и только они*» (Zermelo, 1908: 263).

В такой формулировке аксиома позволяет представлять такие множества [Бурали-Форти] только как подмножества множеств, определенных ранее [*S*], если необходимо оперировать с другими множествами, то их существование должно быть детально постулировано. Поскольку, однако, чтобы довести дело хоть до какого-то конца, существование конкретного набора множеств надо будет постулировать в самом начале, то единственный законный аргумент, который может быть приведен против создания нового множества, — это то, что такой подход ведет к противоречию; в действительности единственным изменением, которое открытие парадоксов привнесло в практику формализма, явилось устранение тех устранение тех множеств, существование которых ведет к парадоксам.

При этом формалисты без колебаний продолжают оперировать с другими множествами, полученными на основе **старой аксиомы включения;** результатом стало то, что обширные области исследования, бессмысленные по мнению интуициониста, представляют значительный интерес для формалиста. Подходящий пример есть в теории мощностей, основные принципы которой я набросаю ниже, потому что она очень прозрачно иллюстрирует непреодолимые разногласия, разделяющие две стороны.

Говорят, что два множества обладают одинаковой мощностью, или степенью, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между их элементами. Говорят, что мощность множества *A* больше, чем мощность множества *B*, и мощность *B* меньше, чем мощность *A*, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между *B* и частью *A*, но невозможно установить такое соответствие между *A* и *B*. Мощность множества, равномощного одному из своих подмножеств, называется бесконечной, другие мощности называются конеч-

➢ Для исчерпывающего перечисления всех свойств исходного множества, потребуется напряжение всех интеллектуальных сил, которые только можно вообразить, но даже в этом случае не будет уверенности, что проведена полная дефиниция свойств бесконечного множества, потому что существуют элементы, для которых даже с помощью суперкомпьютеров нельзя точно определить, обладают они некоторым свойством или нет. Добавим, что когда Г.Кантор публиковал свое доказательство несчетности множества действительных чисел, он не знал и не пользовался аксиомой Цермело. А если ее применить к его «*диагональному методу*», то окажется, что диагональное число y_1 образует как раз подмножество в пересчете всех действительных чисел на интервале [0, 1], а не выходит за его пределы, указывая на новое «*несчетное множество*». Об этом, по сути, и говорит Брауэр. Когда формалистам надо что-либо исключить, они ссылаются на аксиому Цермело, но продолжают признавать доказательство Г.Кантора, применявшего другой набор аксиом...

ными. Множества той же мощности, что и ординальное число ω, называются счетно-бесконечными, а их мощность — $\aleph_0$ (алеф-ноль): доказано, что это наименьшая бесконечная мощность. В соответствии с приведенными ранее утверждениями мощность $\aleph_0$ — это единственная бесконечная мощность, которую признают интуиционисты.

Теперь давайте рассмотрим понятие «*счетно-бесконечное ординальное число*». Из того факта, что это понятие имеет ясное и корректно определенное значение как для формалиста, так и для интуициониста, первый делает вывод, что он имеет право создать «*множество всех счетно-бесконечных ординальных чисел*», мощность которого он называет $\aleph_1$, право, которое интуиционист не признает.

Так как можно выдвинуть доводы, убедительные как для интуициониста, так и для формалиста, что, во-первых, счетно-бесконечные множества счетно-бесконечных ординальных чисел могут быть сконструированы разными способами, а во-вторых, что для каждого такого множества можно предъявить счетно-бесконечное ординальное число, *не* принадлежащее этому множеству, то формалист заключает «$\aleph_1$ *больше, чем* $\aleph_0$» — высказывание, лишенное смысла для интуициониста.

Далее, так как можно выдвинуть доводы, убедительные как для интуициониста, так и для формалиста, что невозможно сконструировать множество счетно-бесконечных ординальных чисел, для которого можно было бы доказать, что его мощность меньше, чем $\aleph_1$, но больше $\aleph_0$, то формалист заключает «$\aleph_1$ *является следующим по возрастанию после* $\aleph_0$ *бесконечным ординальным числом*» — высказывание, также лишенное смысла для интуициониста.

Давайте рассмотрим понятие «*действительное число между 0 и 1*». Для формалиста это понятие эквивалентно «*элементарному ряду цифр после запятой*», для интуициониста оно означает «*закон построения элементарного ряда цифр после десятичной запятой за конечное число операций*». И когда формалист создает «*множество действительных чисел между 0 и 1*», эти слова бессмысленны для интуициониста, даже независимо от того, представляет он себе действительные числа формалиста, заданные элементарным рядом произвольно выбранных цифр, или действительные числа интуициониста, заданные конечным законом построения.

Так как можно доказать, убедительно как для интуициониста, так и для формалиста, что, во-первых, счетно-бесконечные множества действительных чисел между *0* и *1* можно построить разными способами, и во-вторых, что для каждого такого множества можно предъявить действительное число между *0* и *1*, не принадлежащее ему, то формалист заключает «*мощность континуума, то есть мощность множества всех действительных чисел между 0 и 1 больше, чем* $\aleph_0$» — высказывание бессмысленное для интуициониста.

Далее формалист поднимает вопрос о том, существует ли множество действительных чисел между *0* и *1*, чья мощность меньше мощности континуума, но больше, чем $\aleph_0$, иными словами, «*является ли мощность континуума следующей по возрастанию бесконечной мощностью после* $\aleph_0$*?*», и этот вопрос, все еще ожидающий ответа, он воспринимает как одну из наиболее трудных и наиболее фундаментальных проблем математики.

Для интуициониста, однако, этот вопрос, как уже говорилось, лишен смысла, а как только он будет истолкован с приданием смысла, на него можно будет легко ответить.

Если мы переформулируем вопрос в такой форме: «*Правда ли, что невозможно построить бесконечное множество действительных чисел между 0 и 1, чья мощность меньше мощности континуума, но больше, чем* $\aleph_0$*?*», — то ответ должен быть утвердительным; поскольку интуиционист может конструировать только счет-

Если нельзя сконструировать такое ординальное бесконечное множество, это еще не означает, что должно существовать другое, кардинальное бесконечное множество. Это может говорить о том, что такого кардинального бесконечного множества не дано, что оно не существует.

Брауэр изложил т.н. гипотезу континуума Г.Кантора (1-я проблема Гильберта), согласно которой бесконечное множество подмножеств, начиная с множества всех действительных чисел (в двоичной системе выражено числом $2^{\aleph_0}$), равно следующему трансфинитному числу ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$). Эта гипотеза так и осталась недоказанной, хотя над ней размышляли, пожалуй, все выдающиеся математики XX века. Но и негативное решение Брауэра, что множество $\aleph_1$ не дано, формалисты не хотят признавать, чтобы не потерять лицо.

Если Г.Кантор интерпретировал неупорядоченные последовательности в пользу того, что их мощность больше мощности счетно-бесконечного ординального числа ω, то Брауэр (кстати, в соответствии с аксиомой Цермело) такие неупорядоченные последовательности интерпретировал как подмножества счетно-бесконечного ординального числа ω. Можно сказать, что любое «*несчетное*» множество Кантора Брауэр представлял подмножеством счетного бесконечного множества. Хотя, чтобы избежать путаницы с определением «*несчетных множеств*» по Кантору, позже Брауэр ввел для множеств другое понятие — «*поток*», которое больше подходит для описания интуитивной непрерывности времени.

но-бесконечные множества математических объектов, и если на основе интуитивного восприятия линейного континуума он допускает элементарные последовательности произвольных выборов в качестве элементов построения, то каждое «*несчетное*» множество, сконструированное таким образом, содержит подмножество мощности континуума.

Если мы переформулируем вопрос в такой форме: «*Возможно ли установить взаимно-однозначное соответствие между элементами множества счетно-бесконечных ординальных чисел и множеством действительных чисел между 0 и 1, оба из которых воспринимаются как бесконечно расширяемые посредством конструкции добавления нового элемента такого характера, что это соответствие не будет нарушено при сколь угодно долгом продолжении процедуры построения обоих множеств?*», — то ответ также будет утвердительным, поскольку процесс расширения обоих множеств можно разбить на такие фазы, чтобы во время каждой из них добавлялось счетно-бесконечное число элементов.

Однако, если мы зададим вопрос в такой форме: «*Возможно ли сконструировать закон, который будет приписывать счетно-бесконечное ординальное число каждому элементарному ряду цифр и который будет гарантировать a priori, что два различных элементарных ряда никогда не будут соответствовать одинаковым счетно-бесконечным ординальным числам?*», — то ответ должен быть отрицательным; поскольку этот закон построения соответствия должен будет в некотором смысле обозначить конструкцию определенных счетно-бесконечных ординальных чисел на каждом очередном месте элементарного ряда. Поэтому для каждого места c_v существует корректно определенное наибольшее счетно-бесконечное число α_v, конструкция которого определяется именно этим местом; тогда также существует корректно определенное наибольшее счетно-бесконечное ординальное

число α_ω, которое больше всех α_v и которое таким образом не может быть превзойдено никаким другим ординальным числом, задействованным в законе построения соответствия; а значит, мощность такого множества ординальных чисел не может превысить $\aleph_0$.

Чтобы получать множества все большей мощности, формалисты определяют вместе с каждой мощностью μ «*множество различных способов, которыми мжет быть проделан выбор мощности μ*», после чего они доказывают, что мощность этого множества [«*различных способов*»] больше μ.

В частности, после того, как убедительно доказано, как для формалиста, так и для интуициониста, что возможно разными способами сформулировать законы, в соответствии с которыми функции действительной переменной, отличные друг от друга, будут поставлены в соответствие всем элементарным рядам цифр, но невозможно построить закон, по которому элементарные ряды цифр были бы поставлены в соответствие всем функциям одной действительной переменной и который бы гарантировал *a priori*, что две разные функции никогда не будут сопоставлены одному и тому же элементарному ряду, формалист заключает «*мощность c' множества всех функций действительной переменной больше, чем мощность континуума*», — высказывание бессмысленное для интуициониста; и аналогично тому, как он перешел от c к c', он [формалист] переходит к еще большей мощности c''.

Второй метод, который используют формалисты, чтобы получать множества все большей мощности, состоит в том, чтобы определить для каждой мощности μ, которая может служить мощностью ординальных чисел, «*множество всех ординальных чисел мощности μ*», а потом доказать, что мощность этого множества больше μ. В частности, они обозначают через $\aleph_2$ мощность множества всех ординальных чисел с мощностью $\aleph_0$ и доказывают, что $\aleph_2$ больше, чем $\aleph_0$. Если и будет возможно переформули-

Здесь повторяется тот же логический «*прыжок*», который наблюдается в доказательстве несчетности множества действительных чисел Г.Кантора, когда на основании различного способа построения диагонального числа y_1 делается вывод, что его нельзя сопоставить пересчету на интервале [0, 1]. Но ничто не мешает включить y_1 в *подмножество* пересчета на интервале [0, 1], так что оно будет соответствовать счетно-бесконечному ординальному числу. Упорство, с которым формалист стремится получить новые бесконечные мощности, вызвано тем, что в анализе со времен Лейбница и Эйлера отброшено изучение бесконечно малых величин, поэтому формалист *a priori* работает с бесконечностью как с конечным множеством.

ровать этот результат так, чтобы он стал осмысленным для интуициониста, то переформулировка в этом случае будет не такой простой, как в предыдущем.

То, что обсуждалось до этого момента, должно восприниматься как негативная часть теории мощностей множеств; для формалиста однако существует и позитивная ее часть, которая зиждется на **теореме Бернштейна**: «*Если множество A равномощно подмножеству в множестве B, а B равномощно подмножеству в множестве A, то A и B равномощны*», или, эквивалентная форма: «*Если множество $A = A_1 + B_1 + C_1$ равномощно A_1, то оно также равномощно $A_1 + B_1$*».

Теорема эта очевидна для счетных множеств. Если планируется сделать ее сколь-нибудь осмысленной для множеств большей мощности, для интуициониста ее придется переформулировать так: «*Если возможно, во-первых, построить закон, определяющий взаимно-однозначное соответствие между математическими сущностями типов A и A_1, и во-вторых, построить закон, определяющий взаимно-однозначное соответствие между математическими сущностями типов A и A_1, B_1, C_1, тогда на основе этих двух законов за конечное число операций можно определить третий закон, задающий взаимно-однозначное соответствие между математическими сущностями типов A_1 и A_1, B_1*»

Чтобы удостовериться в правомерности такой переформулировки, мы цитируем доказательство:

«*Из разделения A на $A_1 + B_1 + C_1$ мы имеем, используя соответствие γ_1 между A и A_1, разделение A_1 на $A_2 + B_2 + C_2$, а также взаимно-однозначное соответствие γ_2 между A_1 и A_2. Из разделения A_1 на $A_2 + B_2 + C_2$ мы имеем, используя соответствие γ_2 между A_1 и A_2 разделение A_2 на $A_3 + B_3 + C_3$, а также взаимно-однозначное соответствие γ_3 между A_2 и A_3. Бесконечное повторение такой процедуры приведет к разделению A на элементарный ряд подмножеств C_1, C_2, C_3 ..., элементарный ряд подмножеств B_1, B_2, B_3 ... и дополнительное множество D. Соответствие γ_c между A и $A_1 + B_1$, которое является целью, получается, если определить его так: сопоставим каждому элементу C_v элемент C_{v+1}, а любому другому элементу A сопоставим его самого*».

Для проверки этого доказательства на конкретном примере, возьмем в качестве *A* множество всех действительных чисел между *0* и *1*, представленное бесконечными десятичными дробями, в качестве A_1 — множество тех десятичных дробей, у которых для каждого *n* разряд *(2n —1)* равен *(2n)-му* разряду. Далее десятичные дроби, не вошедшие в A_1, будут считаться принадлежащими B_1 или C_1 в зависимости от того, возникает ли такое равенство соответствующих разрядов на бесконечном или конечном числе мест. Последовательно заменяя каждую цифру произвольного элемента *A* на пару таких же цифр, мы немедленно получаем определение взаимно-однозначного соответствия γ_1 между *A и* A_1, поскольку по элементу из A_1, который соответствует произвольному корректно определенному элементу *A*, например, π — 3, мы можем последовательно определить столько разрядов этого элемента, сколько пожелаем; поэтому он должен рассматриваться как корректно определенный.

Чтобы определить теперь элемент, сопоставленный π — 3 в соответствии с отображением γ_c, необходимо для начала решить, конечное или бесконечное число раз в десятичном представлении числа π — 3 встречаются разряды с нечетными номерами, которые равны следующему за ними четному разряду; для этой цели нам необходимо придумать алгоритм построения элементарных рядов таких пар равных разрядов числа π — 3, либо вывести противоречие из предположения о существовании таких элементарных рядов. Однако нет никаких оснований полагать, что какая-то из этих задач может быть решена.

Вот мое представление фундаментальных разногласий, которые разделяют математический мир. По обе стороны от них есть выдающиеся математические школы, и возможность прийти к согласию за конечное время практически исключена. Говоря словами Пуанкаре: «*Люди не понимают друг друга, потому что говорят на разных языках и не учат другие*».

Г. Вейль

О философии математики

Перевод А.П. Юшкевича:
Вейль Г. О философии математики.
Москва-Ленинград, 1934.

Состояние проблемы

(выборка из статьи «Современное состояние проблемы познания в математике»)

От Анаксагора до Дедекинда

Математика — это наука о бесконечном. Великим достижением греков было преобразование полярной противоположности конечного и бесконечного в мощное и плодотворное орудие познания действительности. Интуиция бесконечного, спокойное и не задающееся никакими вопросами признание его были присущи восточному миру.

Но на Востоке эта интуиция оставалась лишь чисто абстрактным сознанием, равнодушно оставлявшим существование рядом с собой неоформленного, необработанного конкретного многообразия вещей. Это пришедшее с Востока религиозное чувство бесконечного **ἄπειρον** овладело греческой душой в предшествовавшую грекоперсидским войнам дионисо-орфическую эпоху.

Греко-персидские войны и в этом отношении знаменовали собой разрыв Западного мира с Восточным. С этого момента указанная полярность и стремление к ее преодолению стали для греков движущим мотивом по-

Важнейший вклад в развитие идей интуиционизма был сделан выдающимся математиком и физиком XX века Германном Вейлем. Без его поддержки и разъяснений интуиционизм Брауэра остался бы, наверное, своеобразным «*табу*» для остального научного мира.

Как заметил историк математики проф. А.П. Юшкевич, выполнивший перевод ряда философских статей Вейля на русский язык, более «*полезно остановиться на статьях Вейля, а не главы интуиционистской школы Брауэра, потому что работы последнего доступны лишь очень ограниченному кругу читателей*». Если Брауэр в своих работах практически не уделял внимания истории математики, а занимался в основном критикой современной ему школы формализма, то Вейль пытался охватить ход развития двух противостоящих в математике концепций (*атомистической* и *континуально-непрерывной*) с древнейших времен.

Кроме того, для Германна Вейля математическая проблема континуума была, несомненно, связана с проблемой физического вакуума, с физической теорией поля. Именно в континууме Брауэра, заданном не в виде точек, а в виде интервалов (длины волн) он усматривал перспективы дальнейшего развития фундаментальной науки.

Сборник статей Вейля «О философии математики» (перевод А.П. Юшкевича, 1934) содержит три работы: «Современное состояние проблемы познания в математике», «Философия математики и естествознания», а также «О новом кризисе основ математики». Эти работы местами дословно цитируют друг друга, а местами — существенно дополняют. Поэтому в журнальном формате уместно дать выборку из этих работ, позволяющую изложить их более компактно, хотя и в значительном сокращении.

➤ На самом деле Брауэра не переводили в Советском Союзе по другой причине: слишком уж была подозрительна связь интуиционизма с мышлением, чего было достаточно, чтобы записать Брауэра в список «*мракобесов-идеалистов*». Брауэр критиковал и технический прогресс, который как на Западе, так и в СССР неизбежно вел к глобальной экологической катастрофе. Материальные блага, которые общество извлекает из безудержной эксплуатации природных ресурсов, он сравнивал с «*ребенком*», которого избивает «*отец*». От того, что этот «*ребенок*» находится под воздействием «*обезболивающих средств*», нет никаких этических оснований оправдывать издевательства «*отца*». В наши дни мы бы сказали, что Брауэр был одним из основателей движения «*зеленых*». По этим идеологическим причинам об интуиционизме в СССР узнавали в основном по работам Г.Вейля.

знания. Но всякий раз, когда, казалось, уже удавалось достигнуть желанного синтеза, старое противоречие возникало вновь и притом в еще более углубленном виде. Противоречие это определяло собою вплоть до наших дней ход развития теоретического познания.

Тот вид, в котором понятие бесконечности могло быть введено в науку, впервые был ему придан **Анаксагором**. В одном дошедшем до нас отрывке из его сочинений говорится: «*В малом не существует наименьшего, но всегда имеется еще меньшее. Ибо то, что существует, не может исчезнуть, как бы далеко ни было продолжено деление*».

Речь здесь идет о пространстве или о теле; непрерывное, говорит Анаксагор, не может состоять из дискретных элементов, которые отделены друг от друга и как бы отрублены друг от друга ударами топора. Пространство бесконечно не только в том смысле, что в нем не имеется конца; оно кроме того в любом своем месте бесконечно, так сказать, во-внутрь, и точка в нем может быть определена лишь путем бесконечного и от раза к разу все точнее и точнее фиксирующего ее процесса деления.

Это представление противоречит интуиции покоящегося и законченного в себе бытия пространства. Для заполняющего его многообразия качеств пространство служит принципом их разграничения, впервые вообще создающим возможность существования различия в сфере качественного; однако пространство является не только принципом разграничения, но вместе с тем и принципом соприкосновения, непрерывной связи, в силу которой ни одна вещь не может быть отрублена от другой «*как бы ударами топора*». Математическое значение принципа бесконечности Анаксагора находит свое выражение в найденном им решнии «*квадратуры круга*», именно — в доказательстве того, что площадь круга пропорциональна квадрату его радиуса.

Против учения Анаксагора выступает строго атомистическая теория **Демокрита**. Один из ее аргументов, направленных против положения неограниченной делимости тел, гласит примерно следующее: «*Говорят, что деление возможно, — хорошо, допустим, что оно произведено. Говорят, что оно возможно in infinitum, — допустим, что и это осуществилось. Что же останется тогда? Тела не останутся, ибо их можно было бы продолжать делить далее, и это означало бы, что разложение не было доведено до конца. Остаться могут только точки, а в таком случае тело должно было бы состоять из точек, что очевидно нелепо*».

В несколько ином виде заключающаяся в понятии непрерывности для мышления трудность выступает в известном парадоксе **Зенона** о состязании в беге между Ахиллесом и черепахой. **Аристотель** по этому поводу замечает («Физика», гл. XVIII): «*Когда непрерывную линию делят пополам, то одну точку принимают за две, ее делают и началом одной половины и концом другой; однако когда производят деление таким образом, то ни линия, ни движение не остаются непрерывными... В непрерывном хотя и заключается бесконечно много половин, но только в возможности, а не в действительности*».

Известно, что эти антиномии, едва затронутые дальнейшим развитием математики, когда ясность их понимания скорее уменьшилась, чем увеличилась, оказали свое влияние на новую философию, сыграв решающую роль при закладке основ теоретико-познавательного идеализма. Так, **Лейбниц**, — не говоря уже о мыслителях меньшего калибра вроде Бейля, Коллье, — указывает, что именно стремление отыскать выход из «*лабиринта непрерывного*» впервые привело его к представлению о пространстве и времени как порядках существования явлений. Еще в системе **Канта** антиномии эти занимают важное место в качестве обеих первых антиномий чистого разума. К их содержанию мы возвратимся в последующем.

В оперирующей идеальными пространственными образами абстрактной геометрии греков — в том виде, в каком она нам известна из «Начал» Эвклида, — возможна не только операция беспредельного деления пополам какого-либо отрезка *a*. Для нее также вместе с этим отрезком несомненно существуют и могут быть при помощи него получены путем построения и такие отрезки, которые относятся к *a*, как *5* к *3* или же как два любых натуральных числа *m : n*. С течением времени воспоследовало открытие иррациональных выражений, найдены были и такие пространственные величины (вроде стороны и диагонали квадрата), между которыми не существует рационального отношения, которые не имеют общей меры. Вместе с тем невозможной, очевидным образом, стала и атомистическая концепция пространства.

В «Диалогах» Платона ощущается то глубокое впечатление, которое произвело это открытие на зарождающееся научное сознание того времени. Общие основания найденного явления, независимо от специальных геометрических построений, доставлявших вначале частные случаи иррациональности, вроде $\sqrt{2}$, были открыты Эвдоксом.

1. Вместо оказавшегося несостоятельным принципа соизмеримости он выставил следующую аксиому: если даны два произвольных отрезка *a* и *b*, то всегда можно столько раз (например *n* раз) присоединить *a* к самому себе, чтобы сумма отрезков па стала большей, чем *b*. Это означает, что все отрезки суть величины одного и того же порядка, что в континууме не существует ни актуально бесконечно большого, ни актуально бесконечно малого (ибо я называю отрезок *a* бесконечно малым по сравнению с отрезком *b*,

Безусловно, открытие иррациональных величин сыграло главную роль в развитии системного кризиса античной науки. На самом деле многие отказывались признавать доказательство иррациональности диагонали и стороны квадрата, что явилось одной из причин Кротонского погрома. Дольше всех сопротивлялись введению несоизмеримых величин именно атомисты: с точки зрения атомистической математики несоизмеримых отрезков быть не могло. Но, как верно заметил Соломон Лурье, «*доводы математиков идеалистического лагеря казались неопровержимыми, и математика атомистов быстро вышла из моды*». Как раз тогда и возник формализм, черпающий свою аргументацию «*из практики уголовного судопроизводства*» (С.Лурье. Архимед. 1945. С.21-22). Но только, как показала дальнейшая история математики, это не спасло ее от новых потрясений и кризисов.

если любая сумма отрезков *a*, сколько бы их я ни взял, всегда остается меньше *b*.

2. Если в общем случае нельзя характеризовать отношения отрезков при помощи дробей типа 3/5, то каким образом возможно выразить это отношение? Эвдокс отвечает так: два отношения величин отрезков *a*:*b*, *a*’:*b*’ равны между собою в том случае, если произвольные натуральные числа *m* и *n*, удовлетворяющие условиям, написанным в первой строке нижеследующих неравенств, всегда удовлетворяют также условиям, выставленным во второй строке:

$$\left.\begin{matrix} na > mb \\ na' > mb' \end{matrix}\right\} \text{(I)} \qquad \left.\begin{matrix} na = mb \\ na' = mb' \end{matrix}\right\} \text{(II)} \qquad \left.\begin{matrix} na < mb \\ na' < mb' \end{matrix}\right\} \text{(III)}$$

Если теперь мы назовем отношение отрезков $a : b = \alpha$ численной мерой (Masszahl) или же вещественным числом, то, очевидно, последнее характеризуется тем сечением, которое оно производит в области рациональных чисел, т. е. разделением всей совокупности дробей — на три класса, таких, что дроби класса (I) все меньше α, класса (II) — равны α, а класса (III) — больше чем α. Средний класс (II) при этом либо пуст, либо же содержит одну единственную дробь.

На этом же фундаменте было воздвигнуто и учение о пропорциях Эвклида, а Архимед обосновал на нем свой общий метод исчерпывания. Так начала развиваться, не заботясь о философских противоречиях, остроумно задуманная и разработанная, нигде не допускающая логических скачков и противоречий математическая теория континуума.

Исчисление бесконечно малых нового времени, преобразованное **Лейбницем** и **Ньютоном** в мощное орудие для изучения природы, не могло со стороны логической своей строгости итти в сравнение с греческой теорией континуума. Зато значи-

Исчисление бесконечно малых стало вторым крупным потрясением основ математики после возникновения в античности теории несоизмеримых отрезков. Разногласия Ньютона и Лейбница вокруг истолкований дифференциального исчисления были связаны опять же с различными интуитивными представлениями. Если Ньютон пытался следовать Евдоксу, то Лейбниц склонялся к неделимым в пределе бесконечно малым величинам. Подход Лейбница, как известно, возобладал и позволил спустя два столетия утвердиться в правах теории множеств Г.Кантора и концепции формализма.

тельно обширнее оказалась ныне область подлежащих его ведению проблем. Теперь речь стала итти уже об исследовании любых непрерывных форм и процессов, в особенности же процессов движения. Страстная воля к действительности превалирует в эпоху нашей культуры над прозорливым греческим *ratio*.

Если в свое время Эвдокс в строго сформулированной аксиоме отбросил понятие бесконечно малого, то теперь как раз наоборот, именно это расплывчатое и полное непостижимой загадочности представление положено было в основание нового исчисления.[1] Правда, основоположники его Ньютон и Лейбниц довольно ясно выразили ту правильную идею, что речь идет не о законченном бесконечно малом, а о предельном переходе к нулю, но эта точка зрения не являлась первенствующей в общем ходе их мыслей, и они, очевидно, не знали, что выполнение перехода к пределу не только требует определения значения предела, но обязано также в первую очередь гарантировать его существование.

По отношению к Ньютону дело объясняется тем, что в случае движения конкретный процесс его заключает в себе, по мнению Ньютона, в качестве момента скорость до всякого математического анализа. Что касается Лейбница, то взгляды его были затемнены тем ложным метафизическим представлением, будто бесконечно малое должно иметь место не в качестве чего-то действительно существующего, а только как чисто логическое основание.

И среди преемников Ньютона и Лейбница господствовал в общем тот взгляд, что бесконечно малые величины, бесконечно близкие точки на кривых и т. п. действительно существуют. С бесконечными рядами оперировали, не обращая внимания на вопрос об их сходимости. И хотя при этом все-таки ощущались некоторые затруднения и

1 «*Непостижимые загадки математики*» —любимое выражение начала XVIII столетия.

то в одном, то в другом пункте возникали неразрешимые противоречия, но что все это означало по сравнению с грандиозными успехами анализа и базирующегося на нем математического естествознания: «Allez en avant et la foi vous viendra».[2] Лишь крайне медленно развилась более осторожная теория пределов; только в начале XIX века Коши удалось последовательное проведение ее и растворение застывшего бытия бесконечно малых величин *в процессе* перехода к пределу.

В новейших аксиоматических изысканиях в области арифметики и геометрии были построены разнообразные числовые системы, в которых аксиома Эвдокса не выполнена. Таким образом оказалось вполне возможно выработать такую четкую и свободную от противоречий систему арифметики, в которой имелись бы величины различных порядков. Но вместе с тем очевидно, что подобная арифметика была бы совершенно непригодна для анализа, ибо суть исчисления бесконечно малых заключается ведь в том, что на основании подчиненных известным элементарным законам отношений в области бесконечно малых величин познают при помощи интегрирования отношения, существующие в области величин конечных.

Если же мы станем в анализе рассматривать бесконечно малые не с точки зрения процесса перехода к пределу, то процессы в области конечного и бесконечно малого становятся тогда совершенно чуждыми, независимыми друг от друга, и связующая их цепь оказывается разомкнутой. Взгляды Эвдокса в данном вопросе были несомненно правильными.

И нам кажется просто смешным, когда еще и теперь, в самое последнее время, «*марбургская школа*» (ср., например, книгу Наторпа „Logische Grundlagen der exakten Wissenschaften", 2-е изд., Лейпциг 1922) продолжает от-

2 Слова Даламбера «*Идите вперед, и уверенность придет*»).

ставивать противоположную точку зрения (разумеется, даже не пытаясь доказать на ее основании хотя бы простейшие теоремы анализа).

В одном пункте, однако, оказалось необходимым пойти дальше Эвдокса. Согласно греческому ученому вещественное число определяется как отношение двух заданных отрезков. Они определяют собою первоначально некоторое сечение в области рациональных чисел, которое и характеризует это отношение с арифметической стороны. Так, например, для $\sqrt{2}$, отношения между диагональю и стороной квадрата, множество (I) состоит из всех дребей r, произведение которых на самое себя $r \bullet r < 2$, множество (III) — из всех тех дробей, для которых $r \bullet r > 2$, множество же (II) оказывается пустым.

Но мы верим также в существование и такого числа как $\sqrt[3]{2}$, разрешающего делийскую задачу об удвоении куба. Действительно, при непрерывном увеличении ребра куба от *1* до *2* м его объем непрерывно возрастает от *1* м^3 до *8* м^3; ясно, что при некоторой определенной длине ребра объем должен принять промежуточное значение *2* м^3. Однако в эвклидовой системе геометрии (т. е. пользуясь линейкой и циркулем) нельзя построить отрезок, находящийся в отношении $\sqrt[3]{2}$ к другому, заданному нам отрезку. Впрочем, заключения, подобно вышеприведенному опирающиеся на принцип непрерывности, вообще лишены надлежащего обоснования и у Эвклида.

На это обстоятельство обратил внимание еще Лейбниц в связи с первым же встречающимся у Эвклида построением равностороннего треугольника *ABC*. В этом построении из точки *A*, как из центра, описывается окружность, проходящая через точку *B*, а из точки *B* —окружность, проходящая через точку *A*, причем, однако, не доказывается, что эти окружности имеют общую точку *C*.

Приведем еще один пример. Впишем в окружность диаметра *1* и опишем вокруг нее вписанные и описанные 6-, 12-, 24-,... угольники; периметры e_1, e_2, e_3... и, соответственно, u_1, u_2, u_3... этих многоугольников можно нанести в виде отрезков на горизонтальную прямую, откладывая все отрезки от общей начальной точки О, хотя бы слева направо. Конечные точки отрезков образуют тогда две точечные последовательности на нашей прямой, именно последовательности E_1, E_2, E_3...; U_1, U_2, U_3... Все точки E лежат слева от всех точек U. Точка E_n при возрастании индекса n отодвигается все дальше направо, точка U_n — налево, и расстояние E_nU_n в конце концов становится безгранично малым. Но откуда мы знаем, что существует такая точка π, относительно которой все точки E расположены слева, а все точки U справа? А ведь как раз это-то и нужно нам знать для того, чтобы определить число π как числовую меру отношения отрезков!

Следует понять, что подобное число π не является заданным самим по себе, оно порождается впервые бесконечным процессом построения двух стремящихся одна к другой числовых последовательностей e_1, e_2, e_3... и u_1, u_2, u_3... Другими словами, если желать определить вещественное число по Эвдоксу при помощи сечения, которое оно производит в области рациональных чисел, следует сказать: любое произвольно заданное сечение в области рациональных чисел, т. е. каждое, каким угодно образом осуществленное, распределение всех рациональных чисел на три класса (I), (II), (III), определяет собою вещественное число. При этом должны быть соблюдены только следующие условия: ни класс (I), ни класс (III) не пусты, в классе (II) содержится самое большее одна дробь, в (I) не существует наибольшей, а в (III) наименьшей дроби, всякое число класса (I) меньше всех дробей классов (II) и (III), всякое число класса (III) больше чисел классов (I) и (II).

Вместе с этим анализ становится независимым от геометрии; только теперь он оказывается пригодным для изучения непрерывности и уже сам, в свою очередь, предоставляет в распоряжение геометрии средства, позво-

С этой проблемой столкнулся Дедекинд, т.к. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ дает иррациональную дробь, хотя формально эту дробь принято приравнивать числу *2*. Между тем, строгих оснований для такого равенства как не было, так и нет в стандартной арифметике. Однако из представлений о свободно становящемся континууме можно находить необходимые для подобных случаев конечные интервалы.

Строго говоря, даже диагональ, находящаяся к стороне квадрата в отношении $\sqrt{2}$ к *1*, не может быть построена с помощью циркуля и линейки, потому что требует учета бесконечно малых величин, образующих необходимый предел. Операции с циркулем и линейкой — иллюзорны в том смысле, что они не объясняют, за счет чего достигается интуитивное равенство двух фигур или отрезков. Однако привычка полностью доверять иллюзорным операциям до сих пор продолжает жить в концепции формализма.

ляющие ей строго обосновать все молчаливо обходимые Эвклидом умозаключения, опирающиеся на понятие непрерывности.

***

В системе математики имеются два обнаженных пункта, в которых она, может быть, соприкасается со сферой непостижимого. Это именно принцип построения ряда натуральных чисел и понятие континуума. Все остальное: переход от натуральных чисел к отрицательным и дробным, так же как и введение мнимых и гиперкомплексных величин, представляет собою задачу формальной логики, не таящую в себе уже никаких трудностей и загадок; мистическая дымка, долгое время обволакивавшая мнимые величины, окончательно рассеялась. Теория множеств надеется и в этих двух пунктах возвести прочную плотину и запрудить поток бесконечного, грозящий затопить в своем течении наш дух.

Но «*задули теплые ветры*», и, как выражается Ницше, теперь все снова «*в течении*». На крайних, уже теряющихся в тумане, границах теории множеств обнаружилось вскоре несколько трещин и объявились бьющие в глаза противоречия; однако это, казалось, ни в коей мере не угрожало основной, центральной области математики.

Антиномии теории множеств составлены в том же, напоминающем собою античный парадокс о лгущем критянина, духе. Проще других одна из них, предложенная Расселом. В ней дело идет о «*множестве M всех множеств, не содержащих себя самих в качестве своего элемента*». Правда, вначале вообще представляется нелепой даже мысль о возможности того, чтобы множество содержало само себя в качестве элемента, но множество всех вещей (о котором говорить допустимо, поскольку любая вещь либо принадлежит к нему, либо нет) тотчас же доставляет нам пример подобного множества.

Теперь спрашивается, содержит ли себя в качестве своего элемента или же нет расселево множество *M*?

Кроме того, к этим двум пунктам можно добавить и третий — понятие *отношения* величин. Именно принцип *относительности* величин (например, бесконечно малых и конечных, рациональных и иррациональных) до сих пор не позволяет сформировать приемлемое для всех представление о непрерывном континууме. Здесь на помощь математике вполне могла бы прийти физика, решившая проблему относительности введением предельной скорости света. Очевидно, и в математике достижение сходимости пределов зависит от особой конечной величины, при которой разница (промежуток между величинами) перестает зависеть от их направления. Подобным образом при достижении скорости света перестает ощущаться разница в направлении движения инерциальных систем: к скорости света не прибавляется скорость сближающегося объекта и не вычитается скорость удаляющегося объекта. Частица света и есть предел сходимости величин в физической реальности, но формализм всячески отвергает изоморфизм идей математики и естествознания.

Если оно не содержит себя в качестве элемента, то оно принадлежит к числу тех множеств, которые, согласно определению *M*, являются элементами *M*; если же оно содержится в *M*, то оно, подобно всем элементам *M*, оказывается множеством, не содержащим себя самого в качестве своего элемента.

Таким образом, каждое из обоих допущений имеет своим следствием другое, противоположное. С точки зрения своего построения антиномия эта разрешается аналогично ришаровой. «*Порочный круг*» (**circulus vitiosus**) разрывается, как только мы безуспешно возьмемся за построение наименьшего из множеств, составленного по данному принципу. Но антиномия эта также показывает, что нельзя допустить существования некоей определенной в себе и замкнутой совокупности всех возможных множеств натуральных чисел или всех возможных свойств натуральных чисел.

Не всякое «*определенное по содержанию*», т. е. точно и однозначно установленное понятие, является объемно-определенным; в частности это относится к понятию «*свойство натуральных чисел*».

Интуиционистская математика Брауэра

Ледяной покров, однако, разбился вдребезги, и вскоре момент текучести стал полновластным господином над неизменностью. Брауэр построил строгую математическую теорию континуума, рассматривающую последний не как некое застывшее бытие, но как среду свободного становления. Это событие является достижением величайшего теоретико-познавательного значения.[3]

3 Brouwer, Intuitionism and Formalism, Bull, of Americ. Mathem. Society, 20, 1913; Begründung der Mengenlehre unabhangig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, Verhandel. d. K. Akad. van Wetensch. Amsterdam 1918, 1919; Weyl, Über die neue

В первую очередь Брауэр в своей логической критике вышел за пределы, установленные Расселом; для него выражения «*все*» и «*существует*» оказываются уязвимыми не только при применении их к совокупности подмножеств бесконечного множества, но уже при применении к самым элементам бесконечного множества.

Пусть *Е* представляет собою определенное свойство натуральных чисел, причем допустим, что для каждого заданного числа *и* можно установить присуще ему или нет это свойство *Е*. Мнение, будто самим по себе определенным является факт существования или же *не*-существозания числа, обладающего свойством *Е*, опирается исключительно на следующее представление: полагают именно, будто числа *1, 2, 3*... можно рассмотреть все одно за другим по отношению к свойству *Е*; если при этом рассмотрении попадется число, обладающее свойством *Е,* то исследование ряда можно будет закончить и ответить утвердительно; если же конец рассмотрению не придет, т. е. если по окончании почленного рассмотрения бесконечного ряда чисел окажется, что число рода *Е* не встретилось, то ответ будет отрицательным.

Такое представление о законченном почленном исследовании бесконечного ряда лишено, однако, какого-либо смысла, ибо в самом существе бесконечного коренится его *неисчерпаемость*. Общие суждения о числе можно получить только в результате исследования сущности числа, а не в результате исследования отдельных чисел. Только действительное указание на вполне определенное число, обладающее свойством *Е*, может служить основанием для утвердительного ответа; с другой стороны,

Grundhgenkrise der Mathematik, Math. Zeitschr., т. 10, 1921; ср. также O. Becker, Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen, Husserls Jahrbuch für Philosophie, т. 6, в особенности стр. 393—433 и философские рассмотрения пределов и идеальных образов, стр. 459—478.

так как я не в состоянии исследовать все числа, то только знание того, что число по существу своему должно обладать свойством *non-Е*, является основанием для отрицательного ответа. Сам Господь Бог не располагает иными средствами для решения вопроса. Но обе эти альтернативы вовсе не противостоят друг другу как утверждение и отрицание; ни отрицание, одной, ни отрицание другой не имеет реального смысла.[4]

В нашей душе против этого интуиционизма со всею силой восстает абсолютистская мысль: ведь если я пробегаю ряд и уславливаюсь прекратить исследование в том случае, если я встречу число, обладающее свойством *Е*, то мне либо придется закончить свое исследование либо же нет, это так или это не так, безо всяких сомнений и колебаний и безо всякой третьей альтернативы.

К подобного рода вещам не следует подходить извне, здесь необходима внутренняя концентрация духа, необходимо бороться за «*видение*», за очевидность. Вот каково, полагаю я, решение вопроса.[5]

Экзистенциальное суждение — как например: «*существует четное число*» — вообще не является суждением в собственном смысле этого слова, устанавливающим некоторое фактическое обстояние; экзистенциальные обстояния — это пустая выдумка логиков. Предложение «*два — четное число*» — вот настоящее, выражающее определенное фактическое обстояние суждение, предложение же «*существует четное число*» является лишь

4 Аналогичные мысли высказывал уже Л. Кронекер, но он не пошел, как это сделал Брауэр, дальше чистой критики и не приступил к созданию новых теоретических построений.

5 Излагаемая здесь концепция не представляет собою точной передачи воззрений Брауэра, а является изложением той точки зрения, которая представляется мне наиболее естественной с тех пор, как я усвоил его идеи.

➤ Так, в теореме Гиппаса, доказывающей несоизмеримость диагонали квадрата, делается экзистенциальное заключение, что оба числа в отношении *m/n* при бесконечном переборе каждого *m* и *n*, могут оказаться четными, т.е. содержащими свойство *Е*. Разумеется, если перебор каждого *m* и *n* бесконечен, ничто не мешает получить два четных числа, но это еще не может быть доказательством того, что другое построение отношения *m/n* в принципе невозможно. Получение неопределенного, фиктивного «*четного числа*» ничего еще не доказывает.

вытекающей из этого суждения абстракцией суждения (Urteilsabstrakt).

Если представить себе познание как драгоценное сокровище, то абстракция суждения — это всего-навсего лист бумаги, указывающий на наличие этого сокровища, но не дающий нам сведений относительно того, в каком месте оно обретается. Единственная ценность этого листа бумаги может состоять только в том, что он побуждает меня заняться поисками сокровища. Бумага эта лишена всякой цены, пока я не реализую какое-нибудь прикрытое ею действительное суждение, кяк, например, «*2 — четное число*».

Теперь мы вновь обретаем нашу свободу по отношению к числовым последовательностям и числовым множествам. На вопрос «*существует или нет последовательность такого-то рода*» мы уже более не пытаемся добиться определенного в себе утвердительного или отрицательного ответа, растягивая последовательности — в дальнейшем я говорю только о них — на прокрустовом ложе конструктивных принципов. Если нам удалось построить каким-либо образом закон, определяющий последовательность до бесконечности, то мы вправе утверждать, что такой закон существует. О *возможности* построения здесь нет речи.

Нет! Только в том случае, когда построение уже осуществлено на деле, доказательство проведено, мы выставляем подобное экзистенциальное суждение.

В многочисленных математических теоремах о существовании главную ценность представляет собой не сама теорема, а используемое при ее доказательстве построение, без которого теорема оказывается лишенной какой бы то ни было ценности тенью. Отрицательное суждение, утверждающее, что закона указанного рода *E* не существует, естественным образом при этом лишается всякого смысла. Но здесь как раз выступает на сцену вторая важнейшая идея Брауэра. Дело в том, что если мы нашему отрицательному суждению придаем форму положительного суждения и говорим, что «*всякая последовательность обладает свойством non-E*», то тем самым другой смысл приобретает понятие последовательности, и под этим словом мы понимаем уже не после доватальность, определяемую каким-либо закономерным образом, а последовательность, возникающую раз за разом, в результате актов свободного выбора, т. е. последовательность, которую можно рассматривать только как становящуюся.

Так, в качестве первого члена последовательности я могу выбрать любое произвольное число, например *13*, затем в качестве второго члена я опять-таки по произволу могу выставить хотя бы число *102* и так далее и утверждаю, что, какими бы ни оказались эти акты выбора, возникающая последовательность постоянно будет обладать свойством *non-E*.

Но, разумеется, в случае свободно становящейся последовательности имеет смысл говорить лишь о таких ее свойствах, относительно которых уже имеется утвердительный или отрицательный ответ (на вопрос о том, присуще ли свойство последовательности или нет), когда дойдешь до определенного пункта этой последовательности, причем дальнейшее развертывание последовательности, как бы оно ни происходило, уже не в состоянии изменить нашего ответа. Так, например, можно задаться вопросом, находится ли на 4-м месте какой-либо свободно становящейся последовательности простое число или нет, но ни в коем случае нельзя спрашивать, отличны ли от *1* все ее члены. Применять математические действия к свободно становящимся последовательностям вполне возможно, это очевидно уже из того, что между ними можно устанавливать некоторые сопряжения.

Так, например, формула

$$n_h = m_1 + m_2 + \ldots + m_h$$

выражает собою закон, по которому свободно становящаяся последовательность m_1, m_2, m_3... порождает становящуюся числовую последовательность n_1, n_2, n_3..., развертывающуюся одновременно с нею шаг за шагом. В случае числовых последовательностей, согласно нашему изложению, суждения «*существует*» или «*не существует*» еще в меньшей степени, чем в случае самих чисел, противостоят друг другу как исключающие какую бы то ни было иную альтернативу, кроме утверждения и отрицания.

Выражение «*существует*» приковывает нас к бытию и закону, выражение же «*каждый*» вводит нас в сферу свободы и становления. Вещественное число должно быть теперь определено уже не как множество, а как бесконечная последовательность заключающихся одни в других рациональных интервалов, длины которых стремятся к нулю. При этом для приближения *h*-й ступени удобно пользоваться *h*-членной двоичной дробью и в качестве инлервалов использовать интервалы формы

$$\left(\frac{m-1}{2^h},\ \frac{m+1}{2^h}\right)$$

где *m* принимает все целочисленные значения, ибо эти интервалы образуют между собой такую систему взаимных пересечений, что дкя любого, заданного только приближенно, однако с достаточно большим приближением, числа можно наверняка указать на тот интервал *h*-го порядка, в котором онз заключается. Отдельная, определенная вплоть до бесконечности при помощи какого-либо закона, последовательность интервалов определяет собою отдельное же вещественное число, а свободная становящаяся последовательность интервалов определяет собою континуум.

Два вещественные числа α, β совпадают, если $i_\alpha^{(n)}$, *n*-ый интервал последовательности α, и $i_\beta^{(n)}$, *n*-ый интервал последовательности β, целиком или частично перекрываются для любого значения *n*; эти числа различны, если существует такое натуральное число *n*, при котором интервалы $i_\alpha^{(n)}$ и $i_\beta^{(n)}$ лежат раздельно друг от друга. Согласно Брауэру, однако, эти две возможности вовсе не образуют собою полной альтернативы.

Эго представление прекрасно согласуется со свойствами континуума, данного нам в нашей интуиции, ибо в нем раздельность двух мест переходит при их сближении в неотличимость, так сказать, постепенно, через целый ряд расплывчатых промежуточных стадий.

В континууме, по Брауэру, существуют только непрерывные функции. Континуум нельзя составить из отдельных частей. Так, я могу выделить из континуума вещественных чисел подконтинуум положительных чисел, использовав при построении интервалов и их последовательностей только положительные двоичные дроби, но ошибочно представление, будто весь континуум состоит из положительных, отрицательных и совпадающих с *0* чисел — состоит из них в том смысле, что каждое число должно принадлежать к одному из этих трех континуумов.

Та мысль, которая выражена в приведенной цитате из Аристотеля, находит здесь себе гораздо более точное выражение. Вновь обретает силу старый принцип, гласивший, что «*нельзя разделить то, что не является само по себе разделенным*» (Гассенди). Еще Демокрит совершенно справедливо указывал, что, если я могу сломать палку, то, значит, она и раньше не составляла некоего целого; неизбежным следствием отсюда является строжайшая атомистика. Поэтому все теории естествознания, в которых последовательно проводятся принцип непрерывности, как, например, современная теория поля, возвращаются к той точке зрения, что образующая палку континуальная реальность и после разлома ее сплошь заполняет пространство.

➢ Классическую математику и математику интуиционизма можно рассматривать как развертывание в историческом процессе классической и релятивистской физики. Объекты классической математики мыслятся как существующие в неизменном, абсолютном пространстве, как мыслились все физические объекты в механицизме. Однако с открытием неевклидовых геометрий и с обнаружением парадоксов теории множеств стало очевидно, что бесконечно малые величины образуют непрерывность в особой динамической среде (поле), на которую не распространяются привычные законы. Это открытие можно уподобить открытию волновых эффектов в электродинамике с возникновением теории относительности в физике. Господствующий в наши дни формализм — это ни что иное как попытка применять классические законы к той области, где они уже не могут быть применимы.

Здесь Германн Вейль, по сути, указывает на существование двух интуиций, лежащих в основе сознания и направляющих ход научной мысли, будь то физика или математика. Это интуиция дискретного и интуиция непрерывного (левополушарное и правополушарное мышление). Причем и та, и другая интуиция необходима для нахождения истинного содержания.

В качестве «*Ничто*» здесь выступает не абсолютно пустое пространство формалистов, а как раз заполняющая это пространство (кажущееся с точки зрения привычных объектов «*пустым*») текучая континуальная реальность.

И если бы, в соответствии с парадоксом Зенона, отрезок длины *1* можно было составить из бесконечного количества отрезков длины *1/2*, *1/4*, *1/8*..., взятых каждый как отдельное целое, то непонятно, почему какая-нибудь машина, способная пройти эти бесконечно многие отрезки в конечное время, не могла бы совершить в конечное время бесконечное множество актов решения, давая, скажем, первый результат через *1/2* минуты, второй— через *1/4* минуты после этого, третий — через *1/8* минуты после второго и т. д. Таким образом оказалось бы возможным в противоречие с самой сущностью бесконечного чисто механическим путем рассмотреть весь ряд натуральных чисел и полностью разрешить все соответствующие экзистенциальные проблемы.

С точки зрения нашей интуиции против теории Брауэра можно выставить еще то возражение, что она не преодолевает дискретное до конца, поскольку она при помощи рациональных чисел устанавливает в континууме совершенно точные границы. Но следует иметь в виду, что тот числовой остов, на котором покоится выделение «*двоичных интервалов*», ни на одной стадии процесса образования интервалов не является метрически точно фиксированным, напротив, точки, служившие разделительными пунктами на более ранних стадиях процесса, все более и более уточняются при его продолжении.

Исходным пунктом математики является ряд натуральных чисел, т. е. закон $\aleph_0$, порождающий из ничего первое число *1* и изо всякого уже заданного числа — число, непосредственно за ним следующее. Математические теоремы частью относятся ко всей совокупности натуральных чисел, частью же ко всей совокупности возникающих в результате актов свободного выбора становящихся последовательностей натуральных чисел. Они относятся, следовательно, частью к простирающейся в бесконечность и порождаемой беспредельным развертыванием управляемого в своем развитии законом $\aleph_0$ ряда натуральных чисел возможности, частью же к заложенной в самой сущности становящейся числовой последовательности бесконечной свободе все новых и новых ничем не детерминированных актов выбора, которая способна на каждом шагу остановить на произвольном месте начинающийся сызнова процесс развития ряда натуральных чисел.

В природе самого дела заложено, что то узрение сущности, из которого проистекают общие теоремы, всегда основывается на полной индукции, на изначальной математической интуиции. Применение математики в науках о действительном мире, особенно в физике, в конечном счете также выражает собой тот факт, что мы в состоянии дать теоретическое изображение бытия исключительно на фоне возможного.[6] Пример — пустое пространство как среда возможных пространственных коинциденций. Математика не является окаменелой и приносящей с собой окаменение схемой, как это часто думают профаны, нет, здесь мы находимся как раз в том узловом пересечении необходимости и свободы, которое составляет сущность самого человека.

В изложении Брауэра математика приобретает максимальную интуитивную ясность, учение его является продуманным до самого конца математическим идеализмом. Но математик со скорбью смотрит на то, как словно туман расплывается большая часть его высоко вознесшихся теорий.

6 Некоторые замечания об этом имеются у Boscovich, Theoria philosophica naturalis (Венеция 1763); вопрос о том, как может зависеть состояние реальной материи от чего-то исключительно «*возможного*», рассматривается также в рассуждениях Эйлера об абсолютном пространстве.

Пожалуй, именно так Вейль и представлял себе случайные флуктуации физического вакуума, способного порождать материальные частицы и тела, способные к движению. При этом способность человека производить сознательные движения, отличающиеся сложностью и, порой, абсурдностью с точки зрения рассудочной логики, может быть лучше всего отражает способность континуума к свободному становлению. Так между способностями сознания и способностями континуальной реальности устанавливается общность, которую мы не можем наблюдать с такой же очевидностью в неодушевленной материи.

Такую точку зрения, что парадоксы не наносят математике никакого существенного урона, а только обогащают ее новыми результатами, можно найти в «Историческом очерке» Н.Бурбаки. Когда К.Гедель обнаружил, что доказать непротиворечивость оснований математики невозможно, а можно доказать лишь существование противоречий, формалисты сменили требование «*свободы от противоречий*» на констатацию отсутствия противоречий, даже если это не доказано (Бурбаки Н. Теория множеств. 1965. С342). Насколько далеко от истины может завести такой подход, думается, каждый способен оценить самостоятельно. А ведь на нем теперь и базируется т.н. «*современная математика*»: требование непротиворечивости стало в ней необязательным и даже «*вредным*», заслуживающим осуждения.

Континуум как среда свободного становления

(выборка из статьи «О новом кризисе основ математики»)

Обычно полагают, что антиномии теории множеств свойственны только отдаленнейшим областям математического мира и никоим образом не угрожают внутренней прочности и безопасности самой математики, собственному ядру ее.

Однако почти все разъяснения, данные относительно этих антиномий авторитетными лицами (с целью опровергнуть их существование или сгладить их), непохожи вовсе на убеждения, возникшие из совершенно непреодолимой и бесспорной очевидности, они относятся к тем полуискренним попыткам самообмана, которые так часто встречаются в сфере политики и философии.

Действительно, всякое серьезное и искреннее размышление должно убедить нас, что указанные противоречия в пограничных частях математики следует рассматривать как симптомы некоторого неблагополучия всей этой науки, в противоречиях этих открыто выступает то, что скрывается внешне блестящим и крепким видом математического здания, — выступает именно внутренняя непрочность фундамента, на котором покоится вся постройка.

Я знаю только две попытки вырвать зло с корнем. Автором первой является Брауэр. Уже в 1907 г. им были высказаны некоторые идеи, намечающие общее направление задуманной им реформы теории множеств и анализа, но лишь в последние годы из этих идей была создана Брауэром цельная последовательная система. Кроме того, независимо от Брауэра я в 1918 г. в сочинении «Континуум» изложил давно задуманные мной мысли о новом обосновании анализа.[7]

7 Weyl H. Das Kontinuum, 1919.

Основные идеи интуиционизма

Мы снова вернемся к основоначалам, но на этот раз будем исходить из несколько иного представления о вещественном числе, лучше выражающего его сущность. Если некоторое вещественное число α известно до h-того десятичного знака с ошибкой, меньшей чем ± *1* h-того знака, то тем самым число α оказывается расположенным внутри интервала, простирающегося от числа

$$\frac{m-1}{10^h} \text{ до числа } \frac{m+1}{10^h},$$

где m есть определенное целое число. Если мы заменим ради математической простоты десятичные дроби дробями двоичными, то в основу определения вещественных чисел мы положим «*двоичные интервалы*» вида

$$\left(\frac{m-1}{2^h}, \frac{m+1}{2^h}\right),$$

в которых m и h суть любые целые числа. В частности, написанный здесь интервал есть интервал в h-той ступени. Двоичные интервалы h-той ступени пересекаются друг с другом; мы должны использовать именно эти взаимно перекрывающиеся интерзалы, а не те, на которые разбивается числовая прямая точками вида

$$\frac{m}{2^h},$$

с той целью, чтобы, когда вещественное число задано нам с определенной (зависящей от h) точностью, был задан определенно и один из интервалов h-той ступени, в котором заключается с необходимостью наше число.

Поэтому понятие вещественного числа, как некоторого заданного, хотя только и приближенно, числа, для которого, однако, степень приближения может быть сделана сколь угодно большой, можно формулировать следую-

Для иллюстрации этого способа построения вещественного числа с помощью интервалов можно рассмотреть построение числа *2* при помощи десятичных приближений с недостатком и избытком:

1,999... ∞ = 2 = 2,00... ∞ 1.

Такой способ построения, как уже упоминалось (см. DLP, 2016, № II (010), С. 146-164), позволяет строить периодическую десятичную последовательность *√2=1,414_(707_)*. В арифметике это снимает то затруднение, что непериодические значения *√2 · √2* дают всегда такую же непериодическую, иррациональную дробь, которая по определению не может быть строго равна рациональному числу *2*. Построение периодических последовательностей для «*классических иррациональных чисел*» опровергает слова формалистов о том, что интуиционизм ничего существенно не меняет в основаниях математики.

щим образом: **вещественное число есть бесконечная последовательность двоичных интервалов *i, i', i"*... такого рода, что каждый интервал этой последовательности содержит ближайший последующий интервал целиком внутри себя.**

Так как каждый из двоичных интервалов может быть характеризован двумя целочисленными знаками (m и h в приведенном выше обозначении) и так как факт содержания одного интервала в другом выражается простым отношением между этими их знаками, то рассмотрение вместо последовательностей содержащихся одни в других двоичных интервалов, не подчиненных никаким ограничениям последовательностей натуральных чисел, явится весьма несущественным упрощением наших рассуждений.

Трудность заключается в понятии *последовательности*. Положения и доказательства современного анализа становятся сколько-нибудь понятными только в том случае, если считать, что в основании его лежит следующая точка зрения: последовательность получается таким образом, что отдельные числа выбираются произвольно по очереди, результат этих бесконечно многих актов выбора предлежит готовым, и относительно такой готовой бесконечной последовательности я могу, например, задать вопрос «*Встречается ли между ее числами число 1?*».

Но такая точка зрения бессмысленна и несостоятельна, ибо в сущности бесконечного заключается его *неисчерпаемость*. Какая-либо определенная (определенная до бесконечности) последовательность может быть дефиниторно дана только *законом*. Если же, напротив, последовательность возникает постепенно, посредством свободных актов выбора, то ее следует рассматривать, как становящуюся, а становящейся свободной последовательности (Wahlfolge) можно разумным образом приписывать только такие свойства, для которых дизъюнкция «*да или нет*» (присуще ли данное свойство последовательности или нет) разрешается на каком-нибудь определенном, достигнутом нами месте последовательности. Разрешается при этом так, что, как бы ни происходило дальнейшее развертывание последовательности, за пределами этого пункта ее становления оно не меняет уже результата дизъюнкции.

Так, например, мы можем с полным правом спрашивать относительно какой-нибудь свободной последовательности, встречается ли в ней **на четвертом месте число *1*** или нет, но нельзя спрашивать, встречается ли в ней **вообще число *1***. Первой основополагающей идеей Брауэра является мысль, что становящаяся посредством свободных актов выбора числовая последовательность есть возможный объект математического образования понятий.

Подобно тому, как закон φ, определяющий до бесконечности некоторую последовательность, представляет отдельное вещественное число, так не ограничиваемая никаким законом в свободе своего развертывания свободная последовательность представляет континуум. Что над свободными последовательностями можно проделывать математические операции, доказывается вполне уже одним тем, что между такими последовательностями можно устанавливать сопряжения. Например, упоминавшаяся уже формула

$$n_h = m_1 + m_2 + \ldots + m_h$$

заключает в себе закон, согласно которому некоторая становящаяся посредством свободных актов выбора последовательность m_1, m_2, m_3... порождает становящуюся числовую последовательность n_1, n_2, n_3...

Более общим примером может служить любой закон, согласно которому всякий акт выбора, присоединяющий к становящейся последовательности натуральных чисел новый член, порождает тем определенное число. Порож-

➢
Когда мы пытаемся установить, например, имеет или нет период последовательность *√2=1,414...*, то при получении десяти или двадцати тысяч знаков мы можем не обнаружить периода. Но значит ли это, что последовательность будет непериодической на h-той глубине десятичной разрядности? Чтобы точно об этом сказать, надо задать закон, позволяющий проверить любой, сколь угодно удаленный знак этой последовательности. Формалист, не зная такого закона, удовлетворяется тем, что не видит никакого периода «*на бумаге*» или на своем 32-разрядном калькуляторе, но значит ли это, что все периоды должны укладываться в глубину $h=32$? Конечно же, нет! Используя суперкомпьютеры, можно привести такие десятичные дроби, которые при $h=10^6$ еще будут казаться непериодическими, а при $h=10^{12}$ обнаружат совершенно четкий период. Интуиционизм, таким образом, в каждом подобном случае ставит неудобные для математиков вопросы. Поэтому от идей интуиционистов проще отмахнуться и довольствоваться фиктивными результатами 32-разрядного калькулятора, чем досконально исследовать каждую конкретную последовательность.

денное h-тым актом выбора число будет при этом, вообще говоря, зависеть не только от самого h-того акта выбора, но также и от всего уже имеющегося налицо от *1*-го до h-того члена отрезка свободной последовательности.

При этом развертывание последовательности, выступающей в качестве функции, совершается параллельно развертыванию последовательности, играющей роль аргумента: если последняя подвигается вперед на одно место, то так же подвигается и первая. Естественным образом, мыслимы и более сложные отношения между последовательностями... Броуеровская идея проста, но вместе с тем глубока: здесь перед нами появляется «*континуум*», в котором хотя и содержатся отдельные вещественные числа, но который никоим образом не разрешается сам в совокупность предлежащих готовыми вещественных чисел, а скорее пр едставляет собой *среду свободного становления*.

Мы находимся в области издревней проблемы мышления — проблемы *непрерывности*, изменения и становления. Какое центральное значение имела она для логического овладения действительностью, можно узнать хотя бы из «**Истории атомистики» К. Лассвица**; решение этой проблемы представляет собой тот решающий момент, который **отделяет аристотелевски-схоластическую, ориентирующуюся на понятие субстанции физику от современной галилеевской физики.**

Издавна противостоят друг другу атомистическая концепция, согласно которой континуум состоит из отдельных точек, и противоположная точка зрения, считающая невозможным понять таким образом непрерывное течение.

Первая концепция дает нам построенную логически систему неподвижно сущих элементов, но она не в состоянии объяснить движение и действие; всякое изменение сводится для нее к иллюзии. Второй же концепции не удалось ни во времена античного мира, ни позже, вплоть до Галилея, вырваться, из сферы туманной интуиции, чтобы проникнуть в область абстрактных понятий, необходимых для рационального анализа действительности.

Достигнутое в конце концов решение — это то, математически-систематическим образцом которого служит дифференциальное и интегральное исчисление. Но современная критика анализа снова разрушает изнутри это решение, хотя, правда, она и не дает себе ясного отчета во всем значении старой философской проблемы и приходит в итоге к хаосу и бессмыслице.

Обе намеченные попытки решения указанной проблемы (атомистическая и непрерывная) возрождают в еще более обостренной и яркой форме старую антитезу: первая, ясно сознающая, что она не затрагивает интуитивного континуума, но полагающая, что понятия могут объять лишь неподвижное бытие, радикально атомистична, а учение Брауэра берется вполне достоверным и надежным образом восстановить права непрерывного становления.

Теперь мы займемся изложением брауэровских взглядов. Так как его теория проводит абсолютное, исключающее возможность какого бы то ни было сравнения, различие между *континуумом* и множеством *дискретных элементов*, то для нее вообще не может серьезно существовать вопроса об исчислимости континуума.

Закон, производящий из некоторой становящейся последовательности некоторое число n, зависящее от результата выбора, по необходимости такого рода, что число n оказывается определенным, как только имеется налицо известный конечный отрезок нашей свободной

➢
Атомистика античной науки выражалась в аксиоме неделимости единицы. Аристотель, хотя и признавал существование бесконечного становления в геометрии («*бесконечное не существует актуально как бесконечное тело или величина*»), но четко соблюдал аксиому неделимости единицы в арифметике. Поэтому античная математика представляла некий образ кентавра, часть которого могла передвигаться на лошадиных ногах, а другая часть не имела ног и всегда покоилась, даже если лошадиные ноги совершали движение. Такое Аристотелево разделение арифметики и геометрии, дискретного и непрерывного, казалось, должно было исчезнуть с появлением дифференциального исчисления, но этого не произошло. Бесконечно малые величины в новом исчислении были представлены Лейбницем как «*неделимые в пределе*», то есть опять же непрерывные функции оказались непрерывными лишь частично, пока хватало глаз — а за горизонтом чувственного восприятия вновь представлялись неделимой точкой. И только Брауэр осознал, что эту точку можно вновь и вновь представлять как непрерывность интервалов.

последовательности; число это остается неизменным, как бы дальше ни развертывалась эта свободная последовательность, так что не может быть речи о полном *взаимно-однозначном соответствии*.

Пусть будет *E* некоторое, имеющее смысл в области числовых последовательностей свойство, а *non-E* его отрицание. Вопрос, существует ли числовая последовательность со свойством *E* или мет, не имеет определенного смысла, так как понятие закона, определяющего до бесконечности некоторую последовательность (выражаясь в терминах первой части), не объемнеопределенно.

Раньше мы вышли из затруднения, ограничив понятие закона только законами объемноопределенными, потребовав для этого, чтобы они получались посредством известных логических конструктивных принципов и были благодаря этому свободны от порочного круга («*x — это закон*»).

Ответ «*да*» или «*нет*» на наш вопрос оказывался в таком случае определенным, и обе возможности представляли собой полную дизъюнкцию. Теперь, однако, мы подойдем к делу иначе. Так как, разумеется, отдельная определенная последовательность может быть определена только некоторым законом φ, то положительный вопрос гласит теперь: существует ли закон, обладающий свойством *E*? Но мы более не растягиваем этого понятия на прокрустовом ложе конструктивных принципов; если нам удается каким-либо, свободным от порочного круга путем построить закон желательного нам вида, то мы вправе утверждать, что подобный закон существует.

Здесь, таким образом, речь идет вовсе не о возможности построения — подобные экзистенциальные утверждения мы можем высказывать лишь об уже *удавшихся построениях*, уже *проведенных доказательствах*. Отрицательное суждение, что такого закона не существует, при этом, разумеется, теряет всякий смысл. Но мы можем придать ему положительную форму: всякая последовательность обладает свойством *E*; наше отрицательное суждение приобретает теперь смысл, поскольку мы под последовательностью понимаем здесь не закон, а в смысле континуума, *среду свободного становления*, последовательность, образующуюся посредством свободных актов выбора. Приходится таким образом допустить, что имеет смысл приписывать свойства *E* и *non-E* становящейся последовательности; в этом случае может оказаться, что в сущности становящейся последовательности — последовательности, в которой всякий отдельный акт выбора совершенно свободен, заключено то, что она обладает свойством *non-E*.

Здесь не место излагать, каким путем достигается подобного рода узрение сущности последовательности. Но только оно дает нам право, когда имеется налицо некоторый закон φ утверждать сразу, без всякой проверки, что определяемая до бесконечности этим законом последовательность не обладает свойством *E*.

Мы опять можем констатировать, что выражение «*существует*» прикрепляет нас к бытию и закону φ, выражение «*каждый*» помещает насв поток становления и свободы. Так как совокупность случаев, в которых имеет силу то или другое из этих утверждений (т. е. утверждений, что существует последовательность, обладающая свойством *E* или что каждая последовательность обладает свойством *non-E*, неопределенна в себе, так как далее приходится вообще совсем иначе толковать понятие последовательности в обоих случаях, то было бы нелепо думать здесь о полной дизъюнкции «*да или нет*»). Именно таким образом нужно понимать мысль Брауэра, что нет никаких оснований верить в логический *закон исключенного третьего*.

Я, правда, лучше выразился бы так, что ни одно из обоих утверждений, о которых идет речь, не может быть рассматриваемо как отрицание другого. Взаимоотношение, допускающее принцип *tertium non datur* (I) и брауэ-

◄ Требование взаимно-однозначного соответствия, как можно увидеть в доказательствах, например, того же Г.Кантора, достигалось через условие, что все рациональные числа должны записываться в одной единственной форме, исключающей такие эквивалентные равенства как *1=0,(9)* или *1=1,(0)*. То есть, рассматривая непрерывность, формалисты уже в самом начале договорились исключить из нее само представление о бесконечном. Их не заботил тот факт, что в бесконечности возможно появление *взаимно-неоднозначных соответствий*. Например, нельзя сказать, что в бесконечном ряде *N=1,2,3...* ∞ нечетных чисел больше, чем четных, так же, как нельзя сказать, что и тех, и других равное количество. На каждом конкретном шаге мы можем получить и то, и другое. А если в этот ряд вместо *1* ввести запись *0,(9)*, которая не является ни четным, ни нечетным числом, то нельзя исключить и того, что четных чисел на шаге *n+1* окажется больше нечетных. Все зависит от конкретного закона, по которому мы формируем последовательность *N*, а формалисты принимают как само собой разумеющееся существование только того закона, который кажется им наиболее очевидным.

ровской теории (II) может быть иллюстрировано прилагаемой схематической фигурой (разумеется, показанное на рисунке сравнение несколько прихрамывает). Так как «*нет по* (I)» глубоко вдается в область вполне законного «*да по* (II)», то с точки зрения концепции (II) «*нет*» концепции (I) не имеет никакого значения. Это «*нет*» приобретает значение только в том случае, если мы в концепции (I) примем за предмет исследования не брауэровский континуум, а вполне определенную в себе систему последовательностей, определяемых *x-законами*.

В своем сочинении «Das Kontinuum» (1919) Герман Вейль не выдвигал радикального отказа от принципа «*tertium non datur*», но, как и Л.Брауэр, предлагал реформировать анализ на основе потенциально бесконечных, а не актуально бесконечных множеств, как предложил Г.Кантор.

Концепция (I), допускающая принцип «*третьего не дано*»

Брауэровская концепция (II)

В своем отрицании логической аксиомы исключенного третьего Брауэр идет еще значительно дальше, чем мы это изложили до сих пор. Он оспаривает ее применимость не только к экзистенциальным суждениям о числовых последовательностях, но также и к экзистенциальным суждениям о натуральных числах. Пусть *E* есть некоторое свойство, имеющее смысл в области натуральных чисел, так что ясно определено, присуще или нет свойство *E* некоторому натуральному числу *n*. По Брауэру мы должны относиться к вопросу, существует ли число, обладающее свойством *E*, точно так же, как к аналогичному вопросу в случае числовых последовательностей, — должны относиться так, несмотря на то, что понятие натурального числа, в противоположность понятию последовательности (если только мы не ошиблись), объемноопределенно, и что, значит, оно при употреблении его в экзистенциальных суждениях, с одной стороны, и в общих суждениях, с другой стороны, не подвергается тому расщеплению, которому подвергается понятие последовательности (закон — свободный выбор).

Брауэр обосновывает свой взгляд указанием на то, что нет никаких оснований думать, будто всякий подобный вопрос о существовании может быть решен. Согласно Брауэру, доказательство применимости закона исключенного третьего должно было бы состоять в указании метода, который давал бы относительно любого свойства *E* то или иное разрешение вопроса о существовании. Как известно, впервые эта точка зрения была выдвинута Кронекером.

В сознательном противоположении этой точке зрения я в своем опыте обоснования анализа (Weyl H. Das Kontinuum, 1919) защищал тот взгляд, что дело идет не о том, в состоянии ли мы путем известных вспомогательных средств, например с помощью методов формальной логики, дать определенный ответ на известный вопрос, а о том, каково положение вещей само по себе; натуральный ряд чисел и относящееся к нему понятие существования является основанием математики, и притом так, что для всякого свойства *E*, имеющего смысл в области чисел, всегда определено, существуют ли числа вида *E* или не существуют.

Мы теперь должны подойти вплотную к этому коренному вопросу. Пусть для каждого числа *h* можно решить, присуще ли ему свойство *E* или нет. Пусть утверждение, что «*h обладает свойством E*», обозначает, например, что $2^{n+1}+1$ есть простое число, а наличие свойства *non-E* пусть обозначает обратное (т. е. что $2^{n+1}+1$ есть число составное). Теперь разберемся в следующем. Мнение, будто твердо определено, обладает ли какое-нибудь число свойством E или нет, опирается только на следующее представление. Числа *1, 2, 3...* могут быть по очереди, одно за другим испытаны в отношении свойства E. Если мы встретим при этом число, обладающее свойством E, то дальнейший просмотр ряда можно прекратить. Ответ в этом случае гласит: да.

Если же подобного перерыва не наступает, т. е. если после *законченного пересмотра* бесконечного числового ряда не было найдено ни одного числа рода *non-E*, то ответ гласит: нет. Но мысль о таком законченном пересмотре членов бесконечного ряда бессмысленна. Не исследование отдельных чисел, а только исследование сущности числа может доставить мне общие суждения о числах. Только действительно имевшее место нахождение определенного числа, обладающего свойством E, может дать мне право на ответ: да, и — так как я не могу перебрать все числа — только усмотрение того, что обладание свойством *non-E* лежит в существе числа, дает мне право на ответ: нет.

Сам Бог не имеет иных оснований для решения этого вопроса. Но обе эти возможности уже не противостоят друг другу как утверждение и отрицание — ни отрицание одной, ни отрицание другой не имеет реального смысла.

Если это говорит в пользу Брауэра, то следующее соображение снова все-таки возвращает меня к моей прежней точке зрения: если я пробегаю ряд и прекращаю его просмотр, как только нахожу число, обладающее свойством E, то это прекращение либо наступит, либо не наступит, это так, либо же это не так, без всякого колебания и сомнения и без какой-либо третьей возможности. К этим вещам нужно подходить не извне, но путем внутренних усилий с целью «*узрения*» их внутренней очевидности.

В конце концов я нашел для себя спасительное слово. Экзистенциальное суждение — вроде: «*существует четное число*» — не есть вообще *суждение* в собственном смысле слова, устанавливающее некоторое обстояние; экзистенциальные обстояния суть пустая выдумка логиков. «*2 — число четное*» — вот это действительное, выражающее определенное обстояние суждение, фраза же «*существует четное число*» есть лишь полученная из этого суждения абстракция суждения (Urtheilsabstrakt).

Можно ли верить бумаге, на которой написано «*существует сокровище*», но не указывающей даже, в каком месте его можно обрести? Что это за суждение такое, которое, взятое само по себе, лишено всякого смысла, и получает смысл лишь на основании одного проведенного доказательства, только и гарантирующего истинность суждения? Это еще не само суждение, а только абстракция суждения.

Эти замечания, кажется мне, ясно определяют характер абстрактного суждения, уясняя вместе с тем собственное значение понятия существования. Написать на бумаге «*существует сокровище*» и показать, что это сокровище существует — разные вещи. Теперь мы уже не можем противопоставлять брауэровскому отрицанию закона исключенного третьего те идеи, за которые я цеплялся еще раньше, именно, что дело обстоит либо так, либо не так (хотя бы я и не был в состояниии решить, как именно обстоит дело)!

Изложенная концепция Брауэра обрисовывает то значение, которым обладают для нас в действительности общие и экзистенциальные суждения. С ее точки зрения математика представляется колоссальным богатством в «*бумажной валюте*». Но действительную ценность, подобную ценности жизненных припасов в народном хозяйстве, имеет для нас непосредственное, сингулярное, всеобщее, а экзистенциальные суждения ценны для нас только опосредованным образом. И, однако, мы, математики, думаем совсем редко о реализации этого «*бумажного богатства*». Ценна не экзистенциальная теорема, а проводимое в доказательстве построение. Математика, как говорит мимоходом Брауэр, есть более деяние (Tun), чем учение.

➢
Такую абстракцию суждения мы находим, например, в доказательстве Гиппаса о несоизмеримости стороны и диагонали квадрата. Из того, что диагональ AC выражена числом m, квадрат которого равен *2*, делается вывод, что m всегда будет четно. Хотя квадрат m может быть равен любому эквиваленту $1{,}999...=2=2{,}00...1$. Тем самым исключается рассмотрение уже самой дроби $\sqrt{2}=1{,}414...$ для отрезка AC. Далее, раз число m — якобы *всегда* должно быть четным, вводится фиктивное число $m=2k$, откуда $4k^2 = 2n^2$, или $n^2 = 2k^2$, то есть n^2 и число n — тоже якобы *всегда* четны. Но конкретное число k здесь не указывается — это именно фикция, придуманная логиками, которые почему-то не допускают, что число *2* можно выразить через эквивалентную непрерывную десятичную дробь. Ничто не мешает нам вместо k взять конкретное число $\sqrt{2}/2 = 0{,}7071…$ и получить $n^2 = 2\,(\sqrt{2}/2)^2 = 2 \bullet 0{,}5 = 1^2$. При этом сам вопрос, рационально число $\sqrt{2}=1{,}414...$ или число $k=\sqrt{2}/2 = 0{,}7071…$ остается в фиктивном «*доказательстве*» открытым. Для ответа на этот вопрос требуется привести хотя бы такое конструктивное доказательство, которое бы учитывало правила перевода десятичных дробей в обыкновенные дроби вида m/n. Но в том-то и дело: Гиппас сделал абстрактное суждение, даже не зная, что такое десятичные дроби!

Пока мы не примем изложенной в последнем абзаце точки зрения, обе очерченные мной попытки обоснования анализа равновозможны, хотя брауэровская теория и обладает с самого начала тем преимуществом, что она не сковывает образования понятий и более адэкватна интуитивной сущности континуума.

Но как только мы встанем на эту точку зрения — которая, думаю я, впервые придает совершенно ясный смысл выражениям «*существует*» и «*каждый*» — тотчас становится решительно невозможной первая концепция; ограничение понятия закона одним кругом *х-законов* нам теперь уже не помогает, теперь на вопрос о «*возможности*» нельзя уже дать утвердительного или отрицательного ответа как в том случае, когда вопрос этот ставится относительно сколь угодно часто повторяющегося применения конструктивных принципов, так и тогда, когда он относится к бесконечному числовому ряду, т. е. к сколь угодно часто повторяющемуся процессу перехода от одного числа к ближайшему, следующему за ним. Поэтому я теперь отказываюсь от своей прежней попытки и присоединяюсь к Брауэру.

При угрожающем развале анализа, который, хотя и признается пока немногими, и все же уже вполне подготовлен, я пытался найти твердую почву под ногами, не покидая идей, на которых покоится анализ, и честно и последовательно проводя его основной принцип, и я думаю, что мне это удалось, поскольку это вообще могло удасться. Ибо почва эта, как я теперь в этом убедился, шаткая, а Брауэр — это революция! Я все же еще раз изложил здесь основные идеи и своей теории, потому что в своем контрасте со взглядами Брауэра они придают самую четкую форму древней антитезе между *атомистической* и *непрерывностной* концепциями и потому еще, что на примере этой противоположности становится особенно ясным, в чем собственно «*заковыка*» и что нужно сделать, чтобы ее исключить. Было бы в высшей степени странно, если бы старый спор разрешился тем, что оказалось бы возможным проводить как *атомистическую*, так и *непрерывностную* концепцию континуума; в действительности вместо этого окончательно восторжествовала последняя.

Брауэру мы обязаны новым решением проблемы континуума — проблемы, провизорное решение которой, данное Галилеем и основателями дифференциального и интегрального исчисления, было изнутри взорвано ходом исторического развития. Конечно, я не уверен, имею ли право назвать вторую из развиваемых в этой статье теорий брауэровской, — об этом я поговорю подробнее позже. Но основные моменты — *становящаяся свободная последовательность* и *отрицание аксиомы исключенного третьего* — во всяком случае принадлежат Брауэру.

Наше учение об общих и экзистенциальных суждениях не носит вовсе расплывчато-неопределенного характера, это ясно хотя бы потому, что из него тотчас же вытекают важные, строго логические выводы. И в первую очередь тот вывод, что совершенно бессмысленно отрицать подобные суждения — вывод, с которым отпадает возможность применения к этим суждениям аксиомы исключенного третьего.

Общие суждения, которые я выше назвал *указаниями на суждения*, разделяют с собственно суждениями то свойство, что они самодовлеющи, они даже содержат в себе бесконечную полноту действительных суждений. В этом отношении мы должны поставить общие суждения в один ряд с суждениями действительными. Конечно, в отличие от последних мы не будем говорить об общих суждениях, что они истинны. Мы будем охотнее выражаться так: они правомерны, они содержат правовое основание для всех «*реализуемых*» из них сингулярных суждений. И, наоборот, какое-нибудь экзистенциальное суждение, взятое само по себе, есть *ничто*, если суждение, из которого извлечена подобная *абстракция суждения*, забыто нами или утеряно, то действительно ничего не остается (если не иметь в виду, как мы говорили. выше, стимула разыскать потерянное суждение).

Абстракцию можно извлекать не только из суждения, но из *указания на суждение*. Пусть, например, *R (m, n)* будет отношением между двумя натуральными числами, притом отношением такого рода, что оно либо существует между двумя любыми числами, либо не существует. В таком случае для двух определенных чисел *m* и *n* утверждение или отрицание того, что они стоят друг к другу в отношении *R*, является действительным суждением. Указание на суждение *R (m, 5),* т.е. «*каждое число m стоит в отношении R к числу 5*» или «*в сущности числа заключается обладание свойством R (• ,5)*» будет правомерно.

Мы можем в этом случае образовать следующую абстракцию: существует некоторое число *n* (мимоходом сказать, именно число *5*), такое, что каждое число *m* находится к нему в отношении *R (m, n)*.

Напротив, указание на абстракции суждений есть голое *ничто*, если за этим указанием не скрывается указание на действительные суждения, из которых получилась наша абстракция. Например: «*для каждого числа m существует такое число n, что между ними имеет место отношение R (m, n)*». Здесь действительно идет речь об абстракции из некоторого указания на суждение. Какого указания?

Очевидно, следующего: пусть φ будет определенный закон, порождающий из каждого числа *m* число φ (*m*), пусть общее указание на суждение *R (m, φ (m))* будет правомерно. Тогда мы в состоянии извлечь из него следующую абстракцию: существует некоторый закон φ такого рода, что для каждого числа *m* имеет силу отношение *R* между *m* и φ *(m)*. Вышеприведенное суждение получает таким образом определенный смысл.

Если теперь нам встретится какое-нибудь число, например число 7, то закон φ порождает из 7 определенное число, скажем φ *(m)*=19; в этом случае мы можем сказать: между 7 и 19 имеет место отношение *R*; имея это в виду, мы вправе установить абстракцию суждения, гласящую, что существует число *n*, стоящее в отношении *R (7, n)* к 7. Таким образом выражение «*существует*» должно включать в себе выражение «*каждый*», но не наоборот, если мы формулируем суждения так, что они извлекаются в качестве абстракций из самодовлеющих суждений.

Исходным пунктом математики является ряд натуральных чисел, т. е. закон алеф, порождающий из ничего первое число *1* и из всякого уже существующего числа ближайшее, следующее за ним; этот процесс никогда не приводит к числу, порожденному уже ранее. Если мы желаем каким-либо образом закрепить числа для интуиции, то мы должны их отличить друг от друга символически, с помощью качественных меток.

Поскольку мы имеем дело с арифметикой, мы совершенно отвлекаемся от подобных качественных меток; для арифметики *1* есть просто «*порожденное из ничего*», 2 — «*порожденное из 1*» и т. д. Можно сказать, что в математическом толковании действительности делается попытка мир, заданный сознанию в его самой общей форме, форме взаимопроникновения бытия и сущности (*то*-бытия и *тако*-бытия), представить в абсолютности чистого бытия. Здесь корень глубокой истинности пифагореизма, согласно которому всякое бытие, как таковое, покоится на числе.

Общие самодовлеющие суждения математики трактуют частью о всем целом (Allheit) натуральных чисел, частью же о всем целом становящихся посредством свободных актов выбора последовательностей натуральных чисел. Они, значит, относятся частью к простирающейся

➢ Математика, действительно, как и само сознание, появляется как отношение между идеальным и материальным. Или, используя терминологию индийской философии, как достижение третьего состояния «*адвайта*» (недвойственности), которое в Чхандогья-упанишаде выражено мантрой «*Тат Твам аси*» (*Ты есть То*).

в бесконечность возможности безграничного, определяемого законом алеф, продолжения процесса развертывания натуральных чисел, а частью к заключенной в становящейся числовой последовательности бесконечной свободе вечно новых, ничем не связанных актов выбора, которые на каждом шагу обрывают на произвольном месте все вновь и вновь начинающийся процесс развития натурального числового ряда.

По самому существу дела интуиция сущности (Wesenseinsicht), из которой проистекают все общие суждения, опирается всегда на так называемую полную индукцию. Она не нуждается в дальнейшем обосновании, да и не способна к нему, ибо она есть не что иное, как математическая первоинтуиция «*еще одного раза*».

Получающиеся из этих общих суждений собственные суждения образуются таким путем, что вместо произвольного числа, о котором идет речь в общих суждениях, подставляется некоторое определенное число, а вместо вольно развертывающейся свободной последовательности — закон φ, определяющий до бесконечности некоторую отдельную числовую последовательность. Из самодовлеющих суждений и указаний на суждения извлекаются абстракции, в которых выражение «*существует*» может относиться или к некоторому натуральному числу или же к некоторому закону, притом либо к закону, порождающему из каждого числа некоторое число (**functio discreta**), либо к закону, порождающему из каждой становящейся последовательности посредством свободных актов выбора некоторое число (**functio mixta**), либо же, наконец, к закону, порождающему из каждой становящейся посредством свободных актов выбора последовательности опять-таки становящуюся последовательность (**functio continua**).

Но сами эти законы мы не делаем объектами общих высказываний. Там, где говорится «*каждая последовательность*», понятие закона (**functio discreta**) заменяется понятием становящейся свободной последовательности; напротив, для **functiones mixtae** и **continuae** у нас не имеется в распоряжении такого континуума, в который они укладывались бы подобно тому, как укладываются отдельные **functiones discretae** в континуум вольно становящихся свободных последовательностей. Все это предопределено a priori сущностью процесса порождения алеф — математической первоинтуиции.

Всякое применение математики должно исходить из известных, подлежащих математической обработке объектов, отличающихся друг от друга посредством некоторого количества знаков; этими знаками служат натуральные числа. Символическим методом, заменяющим эти объекты их знаками, достигается связь их с чистой математикой и ее конструкциями. Так, в основании геометрии точки на прямой лежит система выше упомянутых двоичных интервалов, которые мы смогли охарактеризовать двумя целочисленными знаками.

***

Новая концепция, как мы видим, приносит с собой чрезвычайно серьезные ограничения, противопоставляя их расплывающейся в неопределенности всеобщности, к которой нас приучил за последние десятилетия современный анализ. Мы должны снова обучаться скромности. Мы думали завоевать небо и взгромоздили облака на облака, которые не могли удержать никого из тех, кто всерьез думал на них укрепиться. На первый взгляд, то, что остается, кажется столь ничтожно малым, что ставится вообще под знак вопроса сама возможность анализа. Но такой пессимизм неосновательен, как это будет видно из следующего отдела. Тем не менее, нужно со всей энергией помнить следующее: **математика целиком, включая даже логические формы, вкоторых она движется, зависит от сущности натурального числа**.

В радикальных выводах Брауэра я, насколько я могу понять, не вполне с ним схожусь. Ведь, он сразу начинает с общего учения о функциях (то, что я называю здесь **functio continua**, носит у него наименование «*множества*»), рассматривает свойства функций — свойства свойств и т. д.[8] и применяет к ним принцип тождества. (Мне не удалось, однако, уловить смысла многих из его утверждений).

Я заимствую у Брауэра: 1) основную идею, представляющую во всяком случае существеннейший пункт в его взглядах, именно, идею **становящейся последовательности** и сомнение в **principium tertii exclusi**; 2) понятие **functio continua**. На мой собственный счет относятся понятие **functio mixta** и концепция, которую я резюмирую в следующих трех пунктах:

а) понятие последовательности колеблется сообразно той логической связи, в которой оно выступает между «*законом*» и «*актом свободного выбора*», между «*бытием*» и «*становлением*»;

б) общие и экзистенциальные положения не являются вовсе суждениями в собственном смысле слова, не утверждают никакого обстояния, а являются указаниями на суждения или же *абстракциями суждений*;

в) арифметика и анализ содержат в себе только общие высказывания о числах и свободно становящихся последовательностях, нет вовсе общего учения о функциях или множествах с самостоятельным содержанием!

После того как мы дали себе отчет в логической структуре науки о бесконечном, мы рассмотрим в свете полученных результатов проблему континуума.

8 В первой из приведенных его работ: «Begründung der Mengenlehre tmabhängig vom Satz vom atisgeschlossenen Dritten».

Континуум

До сих пор в математике было употребительно несколько определений понятия вещественного числа, и полагали, что можно доказать эквивалентность этих определений. С той точки зрения, на которой мы теперь стоим, эти определения не являются уже эквивалентными, и легко убедиться, что единственно возможным определением остается теперь не Дедекиндово сечение, а определение, принятое нами на основе понятия интервала.

Мы различали ранее друг от друга двоичные интервалы заданием двух целочисленных символов $(m\ ;\ h)$. Эти двоичные символы легко заменить одним единственным символом, являющимся натуральным числом, если расположить пары целых чисел по некоторому определенному простому закону в перечислимый ряд.

Далее, мы можем, если i есть какой-нибудь двоичный интервал, расположить естественным образом в перечислимый ряд содержащиеся в i двоичные интервалы. Если i есть интервал h-той ступени, то на первое место мы поставим единственный целиком содержащийся внутри i интервал $(h + 1)$-ой ступени, затем 5 интервалов $(h + 2)$-ой ступени, в том порядке, в каком они следуют друг за другом слева направо по числовой прямой, затем 13 интервалов $(h + 3)$-ой ступени и т. д.

Таким образом ясно, что мы подразумеваем, когда говорим об «n-ном содержащемся внутри i двоичном интервале. Вещественное число определяется законом, порождающим из каждого натурального числа n двоичный интервал i^n, притом так, что $i^{(n+1)}$ всегда содержится внутри i^n. Если мы желаем освободиться от этого условия включения, то мы заменим задание $(n+1)$-го интервала i^n заданием его порядкового номера среди содержащихся внутри i^n двоичных интервалов... Под интервальной последовательностью мы будем понимать отныне последовательность включенных друг в друга двоичных интервалов.

В чувственно данной реальности процесс становления простирается лишь до некоторого пункта (ибо данное *есть*, а не *становится*) и переходит постепенно в совершенную неразличимость; в математике, напротив, мы рассматриваем этот процесс как развертывающийся в бесконечность. Во всяком случае, бессмысленно рассматривать континуум как нечто *готово-сущее*. Можно (и даже должно) со всей серьезностью утверждать, что настоящее не есть нечто уже *готовое в себе* и *определенное*, а что оно само, вовнутрь становится в процессе перехода в будущее, и только, так сказать по «*скончании всех веков*», становится совершенно точно определенным всякий отрезок мировой действительности, хотя бы, например, тот, который я сейчас переживаю. Это обстоятельство кажется мне чрезвычайно важным для оценки метафизического значения казуальности в природе, но здесь не место заниматься этим вопросом.

Пояснить эту мысль можно тем, что когда Германн Вейль писал эти строки, он, конечно же, не мог знать, что они будут переведены на русский язык А.П.Юшкевичем и изданы в 1934 году, а затем, спустя более 80 лет, появятся в журнале «De Lapide Philosophorum», а затем, спустя еще какое-то время, будут рецитироваться в каких-то иных книгах и публикациях... При этом самому Вейлю, разумеется, было не известно, какие новые значения в будущем будут появляться у его работы, на какие мысли будут наводить его строки. Как раз поэтому «*настоящее*», когда сам Вейль записывал эти слова, не было «*готово само в себе*»: все новые и новые значения и интерпретации некоторой мысли, возникшей в «*настоящем*», могут появляться и в будущем, так что полное континуальное значение *Слова* нельзя определить, исходя только из текущего момента.

Если мы возьмем на числовой прямой C, области изменения вещественной переменой x, некоторую определенную точку, например $x = 0$, то, как мы видели, нельзя никоим образом утверждать, что всякая точка либо совпадет с этой первой точкой, либо же раздельна от нее. Таким образом точка $x = 0$ вовсе не разбивает континуум на две части: $C^- : x < 0$ и $C^+ : x > 0$, в том смысле, что можно составить C из соединения C^- и C^+ и одной точки 0 (т. е. в том смысле, что всякая точка континуума либо совпадает с 0, либо же принадлежит к C^- или C^+).

Если это шокирует современного математика с его *атомистическими* навыками мышления, то в прежние времена это являлось чем-то само собой разумеющимся: хотя внутри континуума и можно выделить частичные континуумы путем полагания границ, но бессмысленно утверждать, будто целостный континуум состоит из границ и этих частичных континуумов.

Подлинный континуум есть нечто в себе связное и не может быть разделен на отдельные куски, подобное разделение противоречит его сущности. C^+ есть континуум в том же смысле, что и C, т. е. среда свободного становления. И при его математическом рассмотрении мы должны исходить не из точек, а из интервалов [...]

Приведенные примеры объясняют нам общее понятие *непрерывной функции вещественного переменного*. Подобная функция определяется не произвольным законом, сопрягающим с становящейся интервальной последовательностью другую становящуюся интервальную последовательность, а таким законом, по которому из каждого двоичного интервала (как скоро он берется достаточно малым) порождается интервал. Это вполне соответствует тому смыслу, который придается понятию непрерывной функции в приложениях математики: раз аргумент задан с известной степенью точности — а в приложениях математики он никогда не дается иначе, — то становится известным с соответственной степенью точности и значение функции. Эта последняя точность становится вместе со степенью точности значения аргумента сколь угодно большой (если мы рассматриваем функцию в некотором ограниченном интервале). Поэтому непрерывные функции суть лишь замаскированные «**functiones discretae**», и лишь в силу этого в анализе может быть построена общая теория непрерывных функций [...]

Само мгновение времени t_0, которое обычно принимают за нулевую точку отсчета в интуиционизме может быть представлено интервалом –0,000... ∞1 = 0 = +0,000... ∞1, принадлежащим и прошлому (отрицательная часть), и будущему (положительная часть интервала). Представляя мгновенную скорость, в физике часто приходится рассматривать отношение S_0/ t_0, хотя деление на нуль дает недопустимый аргумент функции. Только интуиционизм, восстанавливая бесконечно малые интервалы в правах, позволяет наделять подобные бессмысленные выражения смыслом: t_0= –0,000... ∞1, когда частица теряет движение относительно какой-либо системы отсчета, t_0= +0,000... ∞1, когда частица начинает движение.

Нельзя дать определения понятия непрерывной функции в некотором ограниченном интервале, не принимая в этом определении вместе с тем *равномерной непрерывности и ограниченности*. Но самое существенное — это то, что в континууме не может существовать никаких других функций, кроме непрерывных. Если в прежнем анализе было возможно построение непрерывных функций, то это только показывает весьма ясно, как далек он был от понимания сущности континуума. То, что теперь называют прерывной функцией, состоит в действительности (и по существу это только возврат к более старым взглядам) из *нескольких функций в раздельных континуумах*.

В анализе давно известны функции, которые «*прерывны в каждой точке*», но в новом анализе для них можно найти истолкование, подобное истолкованию мнимых чисел. Они лишь кажутся *прерывными*, не входящими в континуум размерности *n*, а в размерности *n+1* или *n—1* будут непрерывными. Так, достаточно представить, что координатная плоскость выполнена из прозрачного стекла, а *прерывные* функции кажутся таковыми, т.к. относятся к обратной стороне «*прозрачной*» поверхности системы координат.

Рассмотрим, например, вышеприведенные континуумы C, C^+ $(x>0)$ и C^- $(x<0)$. Функция $f_1(x) = x$ в континууме C^+ есть закон, сопрягающий с каждым двоичным интервалом, обе конечные точки которого положительны, этот же самый интервал. Функция $f_2(x) = -x$ в континууме C^- есть закон, сопрягающий с каждым двоичным интервалом, обе конечные точки которого a, a' отрицательны, интервал $-i = (-a', -a)$. Для обеих этих функций в целом континууме C существует одна единственная функция $|x|$, совпадающая в C^+ с f_1 а в C^- f_2; эта функция сопрягает с двоичным интервалом i интервал i, если обеконечные точки положительные, и интервал — i, если обе конечные точки отрицательны, а с интервалом i, содержащим в себе точку нуль и имеющим своими концами точки a, a' она сопрягает интервал $(-a', -a, a, a')$. Если, наоборот, мы рассмотрим, две функции: +1 в C^+ и — 1 в C^-, то для них совсем не существует определенной в целом континууме C функции, совпадающей в C^+ с одной из них, а в C^- — с другой.

Современному анализу континуум представляется в виде множества его точек, в континууме он видит лишь частный случай основного логического *отношения элемента и множества*. **Но поразительно, что столь же фундаментальное отношение *целого и части* до сих пор не находило себе места в математике!** Между тем обладание частями есть основное свойство континуума, и броуеровская теория (в полном согласии с интуицией, против которой столь сильно грешит нынешний *атомизм*) кладет это отношение в основание математического изучения континуума. В этом заключается собственно основание сделанной выше при ограничении частных континуумов и при построении непрерывных функций попытки исходить не из точек, а из интервалов, как из первичных элементов построения.

Разумеется, и множество обладает частями. Но в царстве «*обладающего частями*» оно выделяется обладанием «*элементов*» в смысле теории множеств, т. е. *частей, которые сами не имеют уже более частей*; согласно такой теории во всякой части континуума содержится по крайней мере один элемент. Существу континуума, напротив, свойственно, что *каждая из его частей неограниченно делима*, и далее, понятие точки должно рассматривать как предельное понятие; «*точка*» есть представление о пределе продолжаемого до бесконечности деления.

Чтобы изобразить непрерывную связь точек, современный анализ, разбивший континуум на множество изолированных точек, искал прибежища в понятии *окрестности*. Но так как в силу чрезмерной его общности понятие непрерывного многообразия оставалось математически бесплодным, то пришлось прибавить в качестве ограничительного условия возможность «*триангуляции*». В противоположность этому построению, в кратких объяснениях, предпосланных Брауэром его известным доказательствам основных положений **Analysis situs**, изначально заданным материалом являются просто связанные между собой куски, из которых составляется многообразие. Новый анализ оставляет открытым лишь этот путь [...]

Поскольку мы имеем дело с движущейся в некотором континууме переменной, нужно, согласно новой теории, как бы парить над континуумом и нельзя, как ранее, опуститься на отдельную, хотя бы и произвольную точку. Исследователю, привыкшему к прежним методам, подобное требование покажется вначале неудобным, но всякий заметит, как верно передает новый анализ и в этом пункте интуитивный характер континуума. Брауэровская концепция соединяет в себе *высочайшую интуитивную ясность со свободой*. На того, кто еще сохранил посреди абстрактного формализма математики чувство интуитивной реальности, эта концепция должна действовать как избавление от какого-то тяжелого кошмара. Наконец, укажем еще как совершенно соединяются, взаимно поддерживая и укрепляя друг друга, обе части нового учения: интуитивная *адэкватность* континуума и *логическая* позиция по отношению к общим и экзистенциальным суждениям.

Как уже говорилось, аксиома эквивалентности целого числа и непрерывной дроби была с самого начала исключена Г.Кантором из рассмотрения для достижения «*взаимной однозначности*». Но и до него в анализе не учитывалось, скажем, что дискретная точка *1* может быть представлена интервалом *0,999...=1=1,00...1*. Тождество *1=0,(9)*, сплошь и рядом используемое в арифметике, не учтено в анализе, а из теории множеств было и вовсе выброшено «*ради удобства*». Поэтому мы можем с полной уверенностью сказать, что разделение арифметики и геометрии, существовавшее в античной науке, продолжает существовать и в так называемой «*современной математике*». Изменилось лишь то, что теперь из арифметики убрали аксиому неделимости единицы и широко применяют дроби, используя аксиому эквивалентности целого и непрерывной дроби, а в анализе продолжают рассматривать точки как некие числовые атомы или элементы множеств. То есть математика до сих пор разделена на области, в которых не существует общего определения дискретного числа и непрерывной величины. При этом математики продолжают упорно верить в «*истинность*» и «*непротиворечивость*» такой науки, страдающей, если использовать клиническую терминологию, патологическим «*раздвоением личности*».

А.Н. Колмогоров

Принцип «tertium non datur» и псевдоматематика

Текст публикуется по изданию:
*Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. М., «Наука», 1985. («О принципе tertium non datur», С.45-69)**

Введение

Работами Брауэра обнаружена незаконность употребления принципа *tertium non datur* в области трансфинитных умозаключений. Нашей задачей является выяснение причины того, что это незаконное употребление не привело до сего времени к противоречиям и даже самая незаконность его оставалась часто незамеченной.

Значение в приложениях могут иметь лишь финитные выводы математики. Но для обоснования финитных выводов часто употребляются трансфинитные умозаключения. Брауэр считает поэтому, что и интересующиеся лишь финитными результатами математики не могут пренебрегать интуитивистской критикой принципа *tertium non datur*.

Мы доказываем, что все финитные выводы, полученные посредством трансфинитного применения принципа *tertium non datur*, верны и могут быть доказаны и без его помощи.

** В публикацию не вошли §2, §3, §4 из раздела V Приложения.*

IN BREVI

Излишне представлять Андрея Николаевича Колмогорова — это имя известно каждому — не только в России, но и далеко за ее пределами. Его влияние на развитие математической науки в самых разных ее областях вполне сопоставимо с тем влиянием, которое оказывали выдающиеся математики-универсалы Анри Пуанкаре и Дэвид Гильберт в начале XX века.

Одной из первых фундаментальных работ А.Н. Колмогорова была статья «О принципе tertium non datur» (1925), в которой он привел свою интерпретацию интуиционистской логики суждений, обосновав логический принцип противоречивости без применения закона исключенного третьего. Результат, к которому пришел А.Н. Колмогоров, он вкратце описал так: «*Применение принципа t. n. d. никогда не приведет к противоречию. В самом деле, если бы при его помощи была получена ложная формула, то соответствующая формула псевдоматематики была бы доказана и без его помощи и все же приводила бы к противоречию*». Иначе говоря, если в основаниях математики и существует фатальное противоречие, то ни формальная, ни интуиционистская логика не смогут выявить его используемыми в них средствами. Разница этих двух подходов лишь в том, что интуиционизм допускает, а формализм не допускает существование такого противоречия.

Эта интерпретация очень важна, поскольку она объясняет, почему Брауэр, Вейль, Гейтинг и другие интуиционисты могли критиковать трансфинитные абстрактные суждения, но продолжали признавать классическое доказательство Гиппаса об иррациональности $\sqrt{2}$, полученное с применением принципа *t. n. d.*, хотя по всем признакам, громогласно провозглашенным в интуиционизме, вывод Гиппаса также не заслуживал доверия.

➢ На самом деле своей задачей А.Н.Колмогоров считал не доказательство существования противоречий, а доказательство того, что обычная математика не должна содержать противоречий. Он не разделял взгляды интуиционистов, согласно которым истинность математических понятий определяется уровнем развития интуиции, для него «*математические объекты являлись абстракциями реально существующих форм независимой от нашего духа действительности*» (Колмогоров А.Н. Избранные труды. М., 1985. С.395). Но поднятая им проблема о возможном существовании «*псевдоистинной*» математики оказалась предвестием результатов К.Геделя, согласно которым доказать непротиворечивость математики, вообще говоря, невозможно.

Естествен вопрос: имеют ли какой-либо смысл те трансфинитные посылки, которые послужили для получения правильных финитных выводов?

Мы доказываем что всякий вывод, полученный при помощи принципа *tertium non datur*, верен, если только вместо каждого суждения, входящего в его формулировку, поставить суждение, утверждающее его двойное отрицание. Мы назвали двойное отрицание суждения его «*псевдоистинностью*». Таким образом, в математике псевдоистинности законно применение принципа *tertium non datur*.

Необходимость введения подобных понятий «*псевдосуществования*» и «*псевдоистинности*» давно чувствовалась в математике, хотя бы в связи с вопросом об аксиоме Цермело. Но только теперь один из видов псевдоистинности получил строгое определение и обоснование в виде аксиом, применимых в области псевдоистинности и не применимых к подлинной истинности.

I. Формальная и интуитивистская точки зрения

§ 1. С формальной стороны математика является совокупностью формул (см. [1, с. 152]). Формулы — это комбинации определенного запаса элементарных символов. В основе математики лежат определенная группа формул, называемых аксиомами, и определенные правила построения новых формул, исходя из данных (формул); такими правилами являются в настоящее время вывод по схеме $\mathfrak{S}, \mathfrak{S} \to \mathfrak{T} \mid \mathfrak{T}$ и правила подстановки частных значений вместо символов переменных различного рода.

Определенная группа формул в противоположность аксиомам, заведомо «*истинным*», признается заведомо «*ложной*». Система аксиом называется «*непротиворечивой*», если в результате вывода из них, совершаемого согласно правилам, не может получиться ни одной из формул, считаемых «*ложными*».

§ 2. Формальная точка зрения на математику утверждает, что выбор аксиом, лежащих в основе ее, произволен и подчиняется лишь соображениям практического удобства, лежащим вне математики и, конечно, более или менее условным.[1] Единственное абсолютное требование, предъявляемое каждому математическому учению, это, с рассматриваемой точки зрения, требование непротиворечивости лежащих в его основе аксиом.

Истинными называются формулы, доказуемые на основании аксиом, ложными — приводящие к противоречию. Вопрос о истинности или ложности непротиворечивой, но и недоказуемой формулы с формальной точки зрения не имеет смысла. Существование таких формул указывает на неполноту системы аксиом. Неполная система аксиом может быть пополнена, если это почему-либо желательно, путем признания за аксиому одной из недоказуемых и непротиворечивых формул или, с таким же правом, ей противоположной. Выбор формулы, принимаемой за новую аксиому, среди различных противоречащих друг другу подчинен таким образом лишь соображениям удобства.

§ 3. Интуитивистская точка зрения исходит из признания реального значения математических предложений. Аксиомы, лежащие в основе математики, признаются

1 См. [2, введение]. Близок к этой точке зрения и Гильберт: для него абсолютными истинами (absolute Wahrheiten) являются лишь предложения «*метаматематики*», т. е. утверждения о непротиворечивости, но, с другой стороны, и формулы обычной математики (eigentliche Mathematik), по его мнению, все же являются выражением некоторых мыслей (Gedanken) (см. [1, с. 152—153]).

за выражение данных нам фактов. Эта точка зрения допускает формальный метод изучения математических построений как один из возможных, но противоречит формальному взгляду на математику в целом.

Совершенно иначе, чем с чисто формальной, решается с интуитивистской точки зрения вопрос о природе недоказуемых, но и непротиворечивых предложений. Пусть для некоторой области математики, например геометрии, дана система аксиом. Аксиомы эти являются выражением свойств объекта изучения, в частном случае — пространства. Пусть далее, некоторое предложение избранной области не может быть доказано на основании данных аксиом, но и не приводит к противоречию. С интуитивистской точки зрения может представиться два случая. Во-первых, может случиться, что истинность или же ложность рассматриваемого предложения следует из непосредственного усмотрения; в этом случае можно принять в качестве новой аксиомы данное предложение, если оно истинно, или, если оно ложно, ему противоположное. Во-вторых, может случиться, что предложение неопределенно, т. е. истинность его или ложность не извлекаются из непосредственного усмотрения; в этом случае можно лишь попытаться вывести рассматриваемое предложение из других непосредственно очевидных; если же это не удастся, то необходимо считать предложение неопределенным, так как возможно, что впоследствии нам придется принять как очевидно истинные аксиомы, из которых можно будет вывести его истинность или ложность, что же именно — неизвестно.

Для понимания того, о чем здесь конкретно может идти речь, опять же очень удобно сослаться на теорему Гиппаса: если использованный им к бесконечной последовательности десятичной дроби *√2=1,414...* метод «*четных*» и «*нечетных*» вызывает сомнение, то возможны три варианта, 1) найдется способ непосредственно узреть, что *1,414...* ни на каком шаге не образует период, и тогда вывод Гиппаса истинен, 2) найдется способ, позволяющий непосредственно узреть период в дроби *1,414...*, такой что от него зависит каждый шаг этой последовательности, и тогда вывод Гиппаса о несоизмеримости диагонали будет ложным, 3) может оказаться, что таких непосредственных способов не найдено или не существует, и тогда следует признать, что нам неизвестно, обладает дробь *√2=1,414...* периодом или нет. Уже более 10 лет был наден способ, позволяющий представить эту дробь как периодическую *√2=1,414_(707_)*, однако в формальной математике не ставится вопрос даже о 3), что неизвестно, есть или нет период у таких чисел, как *√2*.

§ 4. Формальная точка зрения выдвигается и в математической логике. Мы в этой работе сталкиваемся с ней именно на почве логики. Тем не менее основанием для формальной точки зрения в математической логике является отрицание реального значения математических предложений. В самом деле, к реальности никто не предложил бы применять логические формулы, не имеющие реального значения. Таким образом, поскольку математическая логика признается только формальной системой, формулы которой не имеют реального значения, постольку отделяется от общей логики: формальная точка зрения может существовать только в математике и математической логике, но не в обыкновенной логике, претендующей на значимость в применении к действительности.

Мы же не отделяем от общей логики особой «*математической логики*», но признаем только, что своеобразие математики как науки создает для логики особые проблемы, которые исследуются специальной «*логикой математики*». Только в ней возникает сомнение в безусловной применимости принципа *tertium non datur*.

§ 5. Различие двух установленных точек зрения проявляется уже в области логики суждений. Мы понимаем в дальнейшем под общей логикой суждений науку, исследующую свойства произвольных суждений в отношений их истинности, ложности и процесса вывода независимо от их состава (каждое суждение считается неразложимым элементом исследования). Формальное выражение общей логики суждений осуществляется при помощи символов произвольного суждения $A, B, C, \ldots$, символа следования $A \to B$ и символа отрицания $\bar{A}$.

Гильберт предложил следующую систему аксиом логики суждений (см. [1, с. 153]):

Аксиомы следования

(1)

1. $A \to (B \to A)$.
2. $\{A \to (A \to B)\} \to (A \to B)$.
3. $\{A \to (B \to C)\} \to \{B \to (A \to C)\}$.
4. $(B \to C) \to \{(A \to B) \to (A \to C)\}$.

Аксиомы отрицания

(2)

5. $A \to (\bar{A} \to B)$.
6. $(A \to B) \to \{(\bar{A} \to B) \to B\}$.

Внутренняя непротиворечивость этих аксиом доказывается крайне элементарно (см. [3]). С формальной точки зрения этого достаточно, чтобы принять их за основу общей логики суждений.

Кроме того, система Гильберта является полной: она не может быть пополнена без противоречия новой независимой аксиомой. Точнее: всякая формула, написанная в символах логики суждений, хотя бы такая, как

$$\overline{\overline{(A \rightarrow B)}} \rightarrow (\bar{\bar{A}} \rightarrow \bar{\bar{B}}),$$

или может быть доказана на основании аксиом Гильберта или же из нее при помощи тех же аксиом можно извлечь следствие A, т.е. истинность произвольного суждения.

§ 6. С интуитивистской точки зрения взаимная непротиворечивость аксиом Гильберта отнюдь не достаточна для их признания. В следующей главе мы проанализируем источники их значимости для суждений вообще и для частных видов суждений.

Из двух гильбертовых аксиом отрицания аксиома 6 в несколько необычной форме выражает принцип *tertium non datur*. Необоснованность применения этого принципа к произвольным суждениям была показана Брауэром[2]. Аксиома 5 употребляется только в символическом изложении логики суждений, поэтому критика Брауэра не коснулась ее, тем не менее она также не имеет интуитивных оснований.

Таким образом, вместе с критикой аксиом Гильберта мы должны будем предложить новые аксиомы отрицания, приложимость которых к произвольным суждениям была бы удостоверена.

2 См. [4, с. 252]. Гильберт тоже считает принцип *tertium non datur* в применении к бесконечным совокупностям объектов не очевидным интуитивно. Символически он выражает его в этом случае двумя формулами

$$\overline{(a)}\ A\ (a)\ \bar{a}q.(Ea)\ \bar{A}\ (a),$$
$$\overline{(Ea)}\ A\ (a)\ \bar{a}q.\ (a)\ \bar{A}\ (a)$$

(см. [1, с. 153]). Что же касается принципа *tertium non datur* в общей логике суждений (аксиома 6), то Гильберт ничего не говорит о его интуитивной очевидности; по-видимому, он считает ее несомненной. Эти взгляды Гильберта не связаны неразрывно с основной чисто формальной его задачей — исследованием непротиворечивости; они кажутся нам неверными. Во-первых, аксиома 6 не является интуитивно очевидной. Отношение ее к финитной логике (finite Logik) только кажущееся: в то время как истинность аксиом следования 1—4 усматривается независимо от содержания суждений, истинность аксиомы 6, как будет выяснено в следующей главе, требует для своего оправдания привлечения содержания суждений, содержание же это может быть и трансфинитным. Во-вторых, если аксиомы 1—6 признаны, то приведенные выше две формулы могут быть доказаны при помощи нескольких аксиом, интуитивная очевидность которых не может подлежать сомнению. Доказательства мы дадим в главе V, для оправдания же следующих ниже исследований достаточно и первого эргумента.

II. Аксиомы логики суждений

§ 1. Аксиомы общей логики суждений претендуют на значимость для всех суждений; следовательно, они должны вытекать из общих свойств суждений. Конечно, все дальнейшее является отнюдь не определением основных понятий и доказательством аксиом логики суждений, но разысканием об их интуитивных источниках, пользующимся уже всеми понятиями и приемами логики.

Суждение в логике суждений рассматривается как последний элемент исследования. Когда рассматривают суждение независимо от заключенного в нем синтеза субъекта и предиката, остается единственное характеристическое свойство суждения, отличающее его от других видов высказывания, данное Аристотелем:[3] подлежать оценке с точки зрения истинности и ложности. Естественно попытаться вывести аксиомы общей логики суждений, не выходя за ее собственные пределы, т. е. только из указанного свойства суждения. В какой мере это возможно, мы исследуем в следующих параграфах этой главы.

§2. Значение символов $A \rightarrow B$ исчерпывается тем, что убедившись в истинности A, мы обязаны признать истинным и B. Или в формальном освещении: если написа-

3 De interp. 4; De anima III, 6. (Об истолковании, гл. 4; О душе, кн. III, гл. 6 (лат.).

Это можно проиллюстрировать примером, который приводит Г.Вейль в статье «Математика и логика»: «*Математик отождествит красное и круглое, несмотря на их различные значения, если любое красное тело в мире окажется круглым*» (Вейль Г. Математическое мышление. 1989. С.79). Такие абсурдные миры, где каждое «*нечетное*» является «*красным*», каждое «*красное*» является «*круглым*», а каждое «*круглое*» является «*картошкой*», где грань между различными понятиями стирается, довольно часто возникают в математических доказательствах.

на формула A, мы можем написать и формулу B.[4] Таким образом, отношение следования между двумя суждениями не устанавливает никакого соотношения между их содержанием.

Первая из гильбертовых аксиом следования, означающая «*истинное следует из всего*», вытекает из такого формального понимания следования: раз B само по себе истинно, то, признав A, мы также должны считать B истинным. Истинность остальных трех аксиом следования также легко усматривается на основании данного понимания понятия следования. При этом характер рассматриваемых суждений совершенно не затрагивается; следовательно, не может возникнуть сомнений в применимости этих аксиом к произвольным суждениям.

Интересен вопрос о полноте системы четырех аксиом следования. После сказанного о полноте всей гильбертовой системы аксиом логики суждений, вопрос следует поставить так: истинной называется формула, доказываемая при помощи аксиом следования и аксиом отрицания; ***всякая ли истинная формула, написанная при помощи одних символов произвольного суждения и следования без символа отрицания, может быть доказана на основе одних четырех аксиом следования***?

§ 3. В отношении к законченному суждению, рассматриваемому как целое, отрицание является только запрещением признавать суждение истинным. Более полное представление об отрицании можно получить, рассматривая суждение как высказывание предиката о субъекте; отрицание явится тогда утверждением о несоответствии предиката субъекту.

Символ логики суждений A естественно выражает первое понимание отрицания как запрещения мыслить

4 Именно это выражается схемой гильбертовой метаматематики $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T} \mid \mathfrak{T}$ Зигварт также считает эту схему наиболее общей схемой всякого вывода (см. [5, с. 372]).

суждение A истинным. Между тем обычная логическая традиция сводит это первое понимание ко второму как более первичному.[5] В применении к математическим суждениям это оказывается невозможным.

Действительно, поскольку отрицание суждения является продуктом непосредственного усмотрения, постольку второе понимание, исходящее из идеи неосуществимости того синтеза, который создает суждение, ближе к существу дела, чем первое, опирающееся на чисто формальную идею запрещения. Но в случае получения отрицания в результате вывода сведение первого понимания ко второму уже не необходимо, а в случае математических суждений иногда и невозможно. В самом деле, многие отрицательные суждения математики доказываются путем приведения к противоречию по схеме $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$, $\overline{\mathfrak{T}} \mid \overline{\mathfrak{S}}$ и не могут быть доказаны иным путем.[6]

Таким образом, первое понимание отрицания является самостоятельным. Оно впервые выделено Брауэром, который определяет отрицание как абсурдность (см. [4]). Оно опирается на второе, так как ***для вывода отрицательного суждения приведением к противоречию надо уже иметь отрицательные же суждения, но в то же время оно шире его***.

§ 4. Первая из аксиом отрицания Гильберта: «*из ложного следует все*» — появилась лишь с возникновением символической логики, как, впрочем, и первая из аксиом следования. Но в то время, как первая аксиома следования с интуитивной очевидностью вытекает из правильного понимания идеи логического следования, рассматриваемая теперь аксиома не имеет и не может иметь интуитивных оснований как утверждающая нечто о последствиях невозможного: мы обязаны признать B, если признали ложным истинное суждение A.

5 См., например, [5, с. 135 и след.].

6 См. в § 6 о принципе противоречия.

Таким образом, первая аксиома отрицания Гильберта не может быть аксиомой интуитивистской логики суждений, из какого бы понимания отрицания мы ни исходили. Этим, конечно, не исключается возможность, что она может быть доказуемой на основании других аксиом формулой.

§ 5. Вторая аксиома отрицания Гильберта выражает принцип *tertium non datur*. Он выражен здесь в той форме, в которой применяется для выводов: если B следует из A и из *не-A*, то B истинно. Обычная его форма: «*всякое суждение или истинно, или ложно*»[7] — эквивалентна вышеприведенной.[8]

Ясно, что из первого понимания отрицания как запрещения считать суждение истинным нельзя извлечь уверенности в истинности принципа *tertium non datur*; таких попыток, впрочем, и не делалось. Следовательно, для его оправдания необходимо обратиться к составу суждения: отношению предиката к субъекту. Уже в простейшем случае суждения типа «*все A есть B*» в рассмотрение неизбежно входят отношения к предикату B всех возможных A, запас которых может быть и бесконечен. Брауэром показано,[9] что в случае подобных трансфинитных суждений принцип *tertium non datur* и с этой точки зрения не может считаться очевидным.

7 Простейшая формулировка Лейбница.

8 Символически вторая форма выражается так: $A \vee \bar{A}$, где $\vee$ означает «*или*». Эквивалентность обеих форм легко доказывается на основании аксиом следования и следующих аксиом, определяющих значение символа $\vee$, заимствованных из работы Аккермана [3]:

$$1.\quad A \to A \vee B.$$
$$2.\quad B \to A \vee B.$$
$$3.\quad (A \to C) \to (B \to C) \to (A \vee B) \to C.$$

9 См. [4] или же детально разобранный пример предложения, недоказуемого иначе, как с незаконным применением принципа *tertium non datur*, в статье [6].

§ 6. Итак с интуитивистской точки зрения ни одна из двух аксиом отрицания Гильберта не может быть принята за аксиому общей логики суждений. Мы предлагаем здесь следующую аксиому, которую назовем принципом противоречия:

$$(3)\qquad 5.\quad (A \to B) \to \{(A \to \bar{B}) \to \bar{A}\}.$$

Смысл ее таков: если из A следует и истинность и ложность некоторого суждения B, то само суждение A ложно.

Обычный принцип противоречия: «*суждение не может быть и истинным и ложным*» — не может быть формулирован в терминах произвольного суждения, следования и отрицания. Наш принцип содержит в себе несколько больше, именно: из него в соединении с первой аксиомой следования вытекает и принцип *reductio ad absurdum*: если B верно и из A следует ложность B, то A ложно.

Истинность предлагаемой аксиомы вытекает из простейшего понимания отрицания как запрещения считать суждение истинным и не связана с рассмотрением содержания суждений.

Систему из пяти аксиом: четырех аксиом следования (1) и только что установленной аксиомы отрицания (3) — я буду называть системой $\mathfrak{B}$. Нам неизвестно формул общей логики суждений, обладающих интуитивной очевидностью в применении к произвольным суждениям, недоказуемых на основании этой системы аксиом. Тем не менее, вопрос является ли эта система аксиом полной системой аксиом интуитивистской общей логики суждений, остается открытым.

§ 7. Принцип *tertium non datur*, как мы видели, хотя и не может быть признан за аксиому общей логики суждений, в ограниченной области суждений, называемых Брауэром финитными, имеет силу. Здесь мы не будем исследовать границу области финитных суждений; задача эта не столь легка, как может показаться; поэтому мы ограничимся признанием, что некоторая такая область существует.

Помимо принципа *tertium non datur*, в области финитного имеет силу принцип двойного отрицания, выражаемый символически так:[10]

$$(4) \qquad 6.\ \bar{\bar{A}} \rightarrow A.$$

Само собою разумеется, что все пять аксиом общей логики суждений (система $\mathfrak{B}$) действительны и в области финитного. Систему аксиом, состоящую из аксиом системы $\mathfrak{B}$ (т. е. (1) и (3)) и аксиомы двойного отрицания (4), мы будем называть системой $\mathfrak{H}$.

Система $\mathfrak{H}$ эквивалентна системе аксиом Гильберта (1) и (2). Аксиомы следования в обеих системах общие. Для доказательства, следовательно, достаточно доказать формулы (3) и (4) на основании формул (2) и обратно, пользуясь в обоих случаях аксиомами следования. Доказательство формул (3) и (4) на основании аксиом Гильберта (1) и (2) мы не будем приводить, обратное же, опирающееся на аксиомы (3) и (4), впервые введенные здесь, приводится в следующем параграфе.

Для нас система $\mathfrak{H}$ имеет то преимущество, что получается из системы $\mathfrak{B}$ общей логики суждений путем добавления одной аксиомы двойного отрицания; это значительно облегчает дальнейшие исследования.

Ясно, что система $\mathfrak{H}$, так же как и система Гильберта, является полной. Из нее можно вывести все формулы традиционной логики суждений. Все они являются истинными, если только заменить в них символы произвольного суждения *A, B, C*, . . символами произвольного

10 Формула *A* → *не-не-A* доказуема на основании системы $\mathfrak{B}$. См. дальше формулу (34).

финитного суждения A^f, B^f, C^f, ... Доказательство этого факта встречает некоторые трудности, которые выясняются и преодолеваются в следующей главе.[11]

§ 8. Будем обозначать аксиомы системы $\mathfrak{H}$ (1), (3) и (4) их номерами 1—6. Подчеркнуты (двумя чертами) номера формул, опирающихся на аксиому 6, так как эти формулы имеют силу только в об ласти финитного, в то время как остальные действительны для произвольных суждений.

$$(5) \qquad \frac{A \rightarrow (B \rightarrow A)}{\bar{B} \rightarrow (A \rightarrow \bar{B})} \qquad \text{Акс. 1}$$

$$(6) \qquad \frac{\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}}{[(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}]} \qquad \text{Акс. 3}$$

$$[(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}] \qquad (6)$$

$$(7) \qquad \frac{(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}}{(A \rightarrow B) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}} \qquad \text{Акс. 4}$$

$$(8) \qquad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}}{\{\bar{B} \rightarrow (A \rightarrow \bar{B})\} \rightarrow [\{(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A}\} \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})]} \qquad (7)$$

$$\{(\bar{B} \rightarrow (A \rightarrow \bar{B})\} \rightarrow [\{(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A}\} \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})] \qquad (8)$$

$$(9) \qquad \frac{\bar{B} \rightarrow (A \rightarrow \bar{B})}{\{(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A}\} \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})} \qquad (5)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A}\} \qquad \text{Акс. 5}$$

$$(10) \qquad \frac{\{(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A}\} \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})}{(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})} \qquad (9)$$

$$(11) \qquad \frac{(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})}{(B \rightarrow A) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B})} \qquad (10)$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \qquad \text{Акс. 1}$$

$$(12) \qquad \frac{(B \rightarrow A) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B})}{A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B})} \qquad (11)$$

$$(13) \qquad \frac{A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B})}{A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{\bar{B}})} \qquad (12)$$

$$\underline{\underline{(14)}} \qquad \frac{\bar{\bar{A}} \rightarrow A}{\bar{\bar{B}} \rightarrow B} \qquad \underline{\underline{\text{Акс. 6}}}$$

$$(15) \qquad \frac{(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}}{(\bar{\bar{B}} \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow (A \rightarrow B)\}} \qquad \text{Акс. 4}$$

$$(\bar{\bar{B}} \rightarrow B) \rightarrow \{(A \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow (A \rightarrow B)\}$$

$$\underline{\underline{(16)}} \qquad \frac{\bar{\bar{B}} \rightarrow B}{(A \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow (A \rightarrow B)} \qquad \underline{\underline{(14)}}$$

$$\underline{\underline{(17)}} \qquad \frac{(A \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow (A \rightarrow B)}{(\bar{A} \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)} \qquad \underline{\underline{(16)}}$$

$$A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{\bar{B}}) \qquad (13)$$

$$\underline{\underline{(18)}} \qquad \frac{(\bar{A} \rightarrow \bar{\bar{B}}) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)}{A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)} \qquad \underline{\underline{(16)}}$$

11 См. § 4 гл. III.

Таким образом, первая аксиома отрицания Гильберта доказана.

$$(19)\qquad \frac{(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})}{(\bar{A} \to B) \to (\bar{B} \to \bar{\bar{A}})}\qquad (10)$$

$$(20)\qquad \frac{(A \to B) \to \{(A \to \bar{B}) \to \bar{A}\}}{(\bar{B} \to \bar{A}) \to \{(\bar{B} \to \bar{\bar{A}}) \to \bar{\bar{B}}\}}\qquad \text{Акс. } 5$$

$$(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})\qquad (10)$$

$$(21)\qquad \frac{(\bar{B} \to \bar{A}) \to \{(\bar{B} \to \bar{\bar{A}}) \to \bar{\bar{B}}\}}{(A \to B) \to \{(\bar{B} \to \bar{\bar{A}}) \to \bar{\bar{B}}\}}\qquad (20)$$

$$(22)\qquad \frac{(A \to B) \to \{(B \to C) \to (A \to C)\}}{\{(\bar{A} \to B) \to (\bar{B} \to \bar{\bar{A}})\} \to [\{(\bar{B} \to \bar{\bar{A}}) \to \bar{\bar{B}}\} \to \{(\bar{A} \to B) \to \bar{\bar{B}}\}]}\qquad (7)$$

$$\{(\bar{A} \to B) \to (\bar{B} \to \bar{\bar{A}})\} \to [\{(\bar{B} \to \bar{\bar{A}}) \to \bar{\bar{B}}\} \to \{(\bar{A} \to B) \to \bar{\bar{B}}\}]\qquad (22)$$

$$(23)\qquad \frac{(\bar{A} \to B) \to (\bar{B} \to \bar{\bar{A}})}{\{(\bar{B} \to \bar{\bar{A}}) \to \bar{\bar{B}}\} \to \{(\bar{A} \to B) \to \bar{\bar{B}}\}}\qquad (19)$$

$$(A \to B) \to \{(\bar{B} \to \bar{\bar{A}}) \to \bar{\bar{B}}\}\qquad (21)$$

$$(24)\qquad \frac{\{(\bar{B} \to \bar{\bar{A}}) \to \bar{\bar{B}}\} \to \{(\bar{A} \to B) \to \bar{\bar{B}}\}}{(A \to B) \to \{(\bar{A} \to B) \to \bar{\bar{B}}\}}\qquad (23)$$

$$\underline{(25)}\qquad \frac{(A \to \bar{\bar{B}}) \to (A \to B)}{\{(\bar{A} \to B) \to \bar{\bar{B}}\} \to \{(\bar{A} \to B) \to B\}}\qquad \underline{(16)}$$

$$(A \to B) \to \{(\bar{A} \to B) \to \bar{\bar{B}}\}\qquad (24)$$

$$\underline{(26)}\qquad \frac{\{(\bar{A} \to B) \to \bar{\bar{B}}\} \to \{(\bar{A} \to B) \to B\}}{(A \to B) \to \{(\bar{A} \to B) \to B\}}\qquad \underline{(25)}$$

Таким образом, и вторая аксиома Гильберта доказана.

Формулы (12) и (24) являются из формул, доказуемых при помощи аксиом $\mathfrak{H}$ без аксиомы двойного отрицания, наиболее близкими к аксиомам отрицания Гильберта. Вторая из них, приближающаяся к принципу *tertium non datur*, означает: если *B* следует и из истинности и из ложности *A*, то *B* не может быть ложным. В самом деле, допустим, что *B* ложно, тогда *A* не может быть истинным, так как из *A* следовало бы *B*, но из ложности *A* следовала бы истинность *B*.

III. Частная логика суждений и область ее применимости

§ 1. Формулы, доказуемые на основании аксиом $\mathfrak{B}$, образуют общую логику суждений. Совокупность формул, доказуемых на основании шести аксиом $\mathfrak{H}$, будем называть частной логикой суждений.[12] Содержание частной логики суждений богаче, чем общей, но область применения уже. Все дальнейшее посвящено выяснению области применимости частной логики суждений. Эта область, может быть, и несколько уже, чем область применимости принципа *tertium non datur* в гильбертовой форме.

§ 2. Введем символы $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, . . ., обозначающие произвольное суждение, для которого из двойного отрицания его следует само суждение. Таковы финитные суждения. Таковы же все истинные суждения; это, впрочем, не найдет применения в дальнейшем. Брауэр показал, что таковы все отрицательные суждения (см. 16]). Доказательство, приводимое ниже, опирается только на аксиомы системы $\mathfrak{B}$.

На основании аксиом следования легко доказать формулу

$$(27)\qquad A \to A$$

$$(28)\qquad \frac{(A \to B) \to \{(A \to \bar{B}) \to \bar{A}\}}{(\bar{A} \to A) \to \{(\bar{A} \to \bar{A}) \to \bar{\bar{A}}\}}\qquad \text{Акс. } 5$$

$$(29)\qquad \frac{A \to (B \to A)}{A \to (\bar{A} \to A)}\qquad \text{Акс. } 1$$

$$A \to (\bar{A} \to A)\qquad (29)$$

$$(30)\qquad \frac{(\bar{A} \to A) \to \{(\bar{A} \to \bar{A}) \to \bar{\bar{A}}\}}{A \to \{(\bar{A} \to \bar{A}) \to \bar{\bar{A}}\}}\qquad (28)$$

$$(31)\qquad \frac{\{A \to (B \to C)\} \to \{B \to (A \to C)\}}{[A \to \{(\bar{A} \to \bar{A}) \to \bar{\bar{A}}\}] \to \{(\bar{A} \to \bar{A}) \to (A \to \bar{\bar{A}})\}}\qquad \text{Акс. } 3$$

$$[A \to \{(\bar{A} \to \bar{A}) \to \bar{\bar{A}}\}] \to \{(\bar{A} \to \bar{A}) \to (A \to \bar{\bar{A}})\}\qquad (31)$$

$$(32)\qquad \frac{A \to \{(\bar{A} \to \bar{A}) \to \bar{\bar{A}}\}}{(\bar{A} \to \bar{A}) \to (A \to \bar{\bar{A}})}\qquad (30)$$

$$(33)\qquad \frac{A \to A}{\bar{A} \to \bar{A}}\qquad (27)$$

12 Общая логика суждений имеет и другое, реальное определение (см. § 5 гл. I). Частная логика суждений пока может быть определена только формально, так как реальное значение ее формул будет установлено лишь впоследствии.

$$(\bar{A} \to \bar{A}) \to (A \to \bar{\bar{A}}) \qquad (32)$$

$$(34) \qquad \frac{\bar{A} \to \bar{A}}{A \to \bar{\bar{A}}} \qquad (33)$$

$$(35) \qquad \frac{(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})}{(A \to \bar{\bar{A}}) \to (\bar{\bar{\bar{A}}} \to \bar{A})} \qquad (10)$$

$$(A \to \bar{\bar{A}}) \to (\bar{\bar{\bar{A}}} \to \bar{A}) \qquad (35)$$

$$(36) \qquad \frac{A \to \bar{\bar{A}}}{\bar{\bar{\bar{A}}} \to \bar{A}} \qquad (34)$$

Последняя формула доказывает, что все отрицательные суждения суть суждения типа $A^\bullet$.

Система аксиом $\mathfrak{H}$ отличается от системы $\mathfrak{B}$, имеющей универсальную применимость, только аксиомой двойного отрицания. Для суждений типа $A^\bullet$ она выражается следующей формулой:

$$(37) \qquad \bar{\bar{A}}^\bullet \to A^\bullet.$$

Только эту формулу мы рассматриваем как истинную, формулу же (4) считаем необоснованной.

Но из сказанного еще не следует, что все формулы частной логики суждений верны для суждений типа $A^\bullet$; в самом деле, при их выводе аксиома двойного отрицания (4) применяется не только к элементарным суждениям, что для нашего случая суждений типа $A^\bullet$ узаконено формулой (37), но и к сложным формулам; между тем неизвестно, является ли, например, формула типа $A^\bullet \to B^\bullet$ формулой типа $A^\bullet$.

§ 3. Мы докажем теперь, что всякая формула, выраженная в символах $A^\bullet$, $B^\bullet$, $C^\bullet$, . . ., следования и отрицания, является формулой типа $A^\bullet$. Для этого достаточно разобрать два простейших случая.

Во-первых, всякое отрицательное суждение есть суждение типа $A^\bullet$ в силу брауэровской формулы (36).

Во-вторых, мы сейчас докажем, что суждение типа $A^\bullet \to B^\bullet$ является также суждением типа $A^\bullet$.

$$(38) \qquad \frac{A \to A}{(A \to B) \to (A \to B)} \qquad (27)$$

$$(39) \qquad \frac{\{A \to (B \to C)\} \to \{B \to (A \to C)\}}{\{(A \to B) \to (A \to B)\} \to [A \to \{(A \to B) \to B\}]} \qquad \text{Акс. 3}$$

$$\{(A \to B) \to (A \to B)\} \to [A \to \{(A \to B) \to B\}] \qquad (39)$$

$$(40) \qquad \frac{(A \to B) \to (A \to B)}{A \to \{(A \to B) \to B\}} \qquad (38)$$

$$(41) \qquad \frac{(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})}{(\bar{B} \to \bar{A}) \to (\bar{\bar{A}} \to \bar{\bar{B}})} \qquad (10)$$

$$(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A}) \qquad (10)$$

$$(42) \qquad \frac{(\bar{B} \to \bar{A}) \to (\bar{\bar{A}} \to \bar{\bar{B}})}{(A \to B) \to (\bar{\bar{A}} \to \bar{\bar{B}})} \qquad (41)$$

$$(43) \qquad \frac{(A \to B) \to (\bar{\bar{A}} \to \bar{\bar{B}})}{\{(A \to B) \to B\} \to \{(\overline{\overline{A \to B}}) \to \bar{\bar{B}}\}} \qquad (42)$$

$$A \to \{(A \to B) \to B\} \qquad (40)$$

$$(44) \qquad \frac{\{(A \to B) \to B\} \to \{(\overline{\overline{A \to B}}) \to \bar{\bar{B}}\}}{A \to \{(\overline{\overline{A \to B}}) \to \bar{\bar{B}}\}} \qquad (43)$$

$$(45) \qquad \frac{\{A \to (B \to C)\} \to \{B \to (A \to C)\}}{[A \to \{(\overline{\overline{A \to B}}) \to \bar{\bar{B}}\}] \to \{(\overline{\overline{A \to B}}) \to (A \to \bar{\bar{B}})\}} \qquad \text{Акс. 3}$$

$$[A \to \{(\overline{\overline{A \to B}}) \to \bar{\bar{B}}\}] \to \{(\overline{\overline{A \to B}}) \to (A \to \bar{\bar{B}})\} \qquad (45)$$

$$(46) \qquad \frac{A \to \{(\overline{\overline{A \to B}}) \to \bar{\bar{B}}\}}{(\overline{\overline{A \to B}}) \to (A \to \bar{\bar{B}})} \qquad (44)$$

Эта формула верна для произвольных суждений A и B. Заменяя A и B через $A^\bullet$ и $B^\bullet$, пользуясь формулой (37), легко вывести формулу

$$(47) \qquad (\overline{\overline{A^\bullet \to B^\bullet}}) \to (A^\bullet \to B^\bullet),$$

которая и показывает, что суждения типа $A^\bullet \to B^\bullet$ принадлежат к типу $A^\bullet$.

Восходя постепенно к более сложным формулам, можно доказать утверждение начала параграфа.

§ 4. Теперь можно утверждать, что все формулы частной логики суждений верны для суждений типа $A^\bullet$ в том числе для всех финитных и для всех отрицательных суждений. В самом деле, символы $A^\bullet$, $B^\bullet$, $C^\bullet$, . . ., $A^\bullet \to B^\bullet$ и $\bar{A}^\bullet$ допускают все те операции, что и символы общей логики суждений: подстановку вместо символов $A^\bullet$, $B^\bullet$, $C^\bullet$, . . .

Когда А.Н.Колмогоров вводил термин «*псевдоматематика*», он, конечно, не имел в виду математику формалистов (и уж тем более, не подразумевал под этим математику интуиционистов). Весь смысл введения такого «*усиленного*» термина состоял в том, чтобы показать следующее: если в основах математики заложено фундаментальное противоречие, то оно затрагивает как математику формалистов, так математику интуиционистов, тогда окажется, что «*псевдоматематикой*» занимаются и те, и другие.

любой формулы, написанной в рассматриваемых символах, и вывод по схеме $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T},\ \mathfrak{T} \mid \mathfrak{S}$; кроме того, для них верны все шесть аксиом $\mathfrak{H}$.

Этим найдена точная граница области применимости частной логики суждений: область эта совпадает с областью применимости формулы двойного отрицания (4).

IV. Математика псевдоистинности

§ 1. В предыдущей главе мы установили, что все формулы традиционной логики суждений могут быть действительно доказаны, как формулы частной логики суждений. Следует только признать, что они имеют отношение лишь к суждениям типа $\dot{A}$. При этом сами эти формулы оказываются формулами типа $\dot{A}$.

Теперь ставится вопрос: можно ли аналогично, наложив некоторые ограничения на их реальное толкование, восстановить значимость всех тех формул математики, которые доказываются при помощи незаконного применения формул частной логики суждений, в частности принципа *tertium non datur*, вне области их применимости? Эта задача оказывается выполнимой.

§ 2. Мы построим рядом с обычной математикой новую «*псевдоматематику*» так, что каждой формуле первой соответствует формула второй, и при этом так, чтобы каждая формула псевдоматематики была формулой типа $\dot{A}$. Пока мы не касаемся вопроса об истинности формул псевдоматематики; к нему мы вернемся в § 5 этой главы.

Формулой называется символ простой или сложный, выражающий суждение. Элементарными формулами, или формулами первого порядка, будем называть формулы, никакая часть которых не является формулой; такова формула $a = a$. Формулой n-го порядка будем называть формулу, части которой являются формулами порядка не выше $n — 1$. Например, формула

$$a = b \to \{A\ (a) \to B\ (a)\}$$

есть формула третьего порядка, так как ее составная часть $A\ (a) \to B\ (a)$ является формулой второго порядка.

Элементарной формуле $\mathfrak{S}$ соответствует в псевдоматематике формула

$$(48) \qquad \mathfrak{S}^* \equiv \overline{\overline{\mathfrak{S}}},$$

выражающая двойное отрицание $\mathfrak{S}$. В дальнейшем для удобства мы двойное отрицание $\mathfrak{S}$ будем обозначать через $n\ \mathfrak{S}$.

Формуле n-го порядка $F\ (\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_k)$, где $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_k$ — формулы не выше $(n — 1)$-го порядка, соответствует в псевдоматематике формула

$$(49) \qquad F\ (\mathfrak{S}_1,\ \mathfrak{S}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{S}_k)^* \equiv nF\ (\mathfrak{S}_1^*,\ \mathfrak{S}_2^*,\ \ldots,\ \mathfrak{S}_k^*),$$

причем $\mathfrak{S}_1^*, \mathfrak{S}_2^*, \ldots, \mathfrak{S}_k^*$ считаются уже определенными. Например, формуле

$$a = b \to \{A\ (a) \to B\ (a)\}$$

соответствует в псевдоматематике формула

$$n\ [n\ (a = b) \to n\ \{nA\ (a) \to nB\ (a)\}].$$

Каждому символу, не являющемуся формулой, также соответствует определенный символ псевдоматематики. Символу простому или сложному, никакая часть которого не является формулой, в псевдоматематике соответствует тождественный ему символ. Сложному символу, в состав которого входят формулы, соответствует символ, в котором все формулы $\mathfrak{S}$ заменены формулами $\mathfrak{S}^*$.

§ 3. Все формулы математики выводятся из аксиом,[13] которые мы обозначим $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$, при помощи операций подстановки частных значений вместо переменных

13 В число аксиом математики здесь включаются и все аксиомы логики.

и вывода по схеме $\mathfrak{S}, \mathfrak{S} \to \mathfrak{T} \mid \mathfrak{T}$. Аксиомам в псевдоматематике соответствуют формулы $\mathfrak{U}_1^*, \mathfrak{U}_2^*, \ldots, \mathfrak{U}_k^*$. Мы докажем, что всякая формула псевдоматематики, соответствующая формуле, доказуемой на основании аксиом $\mathfrak{U}$, является следствием формул $\mathfrak{U}^*$. Для доказательства достаточно установить следующие два факта.

Во-первых, если при подстановке в формулу $\mathfrak{S}$ вместо переменных частных значений получается формула $\mathfrak{T}$, то при подстановке в формулу $\mathfrak{S}^*$ на соответствующие места соответствующих формул и символов получается формула $\mathfrak{T}^*$.

Во-вторых, аналогично схеме $\mathfrak{S}, \mathfrak{S} \to \mathfrak{T} \mid \mathfrak{T}$ верна схема

$$\mathfrak{S}^*, (\mathfrak{S} \to \mathfrak{T})^* \mid \mathfrak{T}^*. \tag{50}$$

В самом деле,

$$(\mathfrak{S} \to \mathfrak{T})^* \equiv \overline{\overline{(\mathfrak{S}^* \to \mathfrak{T}^*)}}; \tag{51}$$

так как $\mathfrak{S}^*$ и $\mathfrak{T}^*$ являются формулами типа $A^{\cdot}$, то по формуле (47) имеем

$$\overline{\overline{(\mathfrak{S}^* \to \mathfrak{T}^*)}} \to (\mathfrak{S}^* \to \mathfrak{T}^*), \tag{52}$$

$$\frac{(\mathfrak{S} \to \mathfrak{T})^* \xrightarrow{\mathfrak{S}^*} (\mathfrak{S}^* \to \mathfrak{T}^*)}{\mathfrak{T}^*}. \tag{53}$$

Таким образом, мы видим, что всякому правильному доказательству в области обычной математики соответствует правильное доказательство в области псевдоматематики. Отсюда вытекает истинность выставленного в начале параграфа предложения.

§ 4. Пяти аксиомам общей логики суждений соответствуют в псевдоматематике следующие формулы:

$$(54) \quad \begin{aligned} &1.\ n\{nA \to n(nB \to nA)\}.\\ &2.\ n[n\{nA \to n(nA \to nB)\} \to n(nA \to nB)].\\ &3.\ n[n\{nA \to n(nB \to nC)\} \to n\{nB \to n(nA \to nC)\}].\\ &4.\ n[n(nB \to nC) \to n\{n(nA \to nB) \to n(nA \to nC)\}].\\ &5.\ n[n(nA \to nB) \to n\{n(nA \to n\overline{(nB)}) \to n\overline{(nA)}\}]. \end{aligned}$$

Формулы эти могут быть получены посредством подстановки nA, nB, nC вместо $A^{\cdot}$, $B^{\cdot}$, $C^{\cdot}$ из следующих:

$$(55) \quad \begin{aligned} &1.\ n\{A^{\cdot} \to n(B^{\cdot} \to A^{\cdot})\}.\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &5.\ n[n(A^{\cdot} \to B^{\cdot}) \to n\{n(A^{\cdot} \to n\overline{B}^{\cdot}) \to n\overline{A}^{\cdot}\}]. \end{aligned}$$

Формулы (55), как формулы частной логики суждений, мы имеем право доказывать, пользуясь всеми аксиомами $\mathfrak{H}$ или всеми аксиомами Гильберта. Доказательство их не представляет затруднений. Таким образом, все формулы (54) оказываются истинными. Из этого следует, что все формулы псевдоматематики, соответствующие истинным формулам общей логики суждений, истинны.

§ 5. Все известные нам аксиомы математики обладают тем же свойством, как и аксиомы общей логики суждений: формулы, соответствующие им в области псевдоматематики, истинны. Например, аксиоме

$$(a)\, A(a) \to A(a)$$

соответствует истинная формула

$$n\{n(a)\, nA(a) \to nA(a)\}.$$

Будем называть аксиомы, обладающие формулированным выше свойством, аксиомами типа $\mathfrak{R}$. Назовем далее формулами типа $\mathfrak{R}$ формулы, доказуемые на основе аксиом типа $\mathfrak{R}$. Все известные нам аксиомы и формулы математики принадлежат к типу $\mathfrak{R}$.[14]

В силу сказанного выше та часть псевдоматематики, формулы которой соответствуют формулам типа $\mathfrak{R}$, приобретают реальное значение: все формулы ее истинны, так

14 Иногда в математике признавались за аксиомы формулы, истинность которых не очевидна; такова, например, так называемая аксиома Цермело. Но и они обладают свойством $\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^*$.

➢ Здесь А.Н.Колмогоров употребляет квантор всеобщности «*все аксиомы*», характерный для формального стиля, что в интуиционизме недопустимо. Например, со времен античности известна аксиома неделимости единицы, которая не может принадлежать классу истинных. Кроме того, как заметил Пуанкаре, существуют еще и «*скрытые аксиомы*» (Пуанкаре А. О науке. М., 1983. С.36).

Античная аксиома неделимости единицы входит в класс **R**, так как математики признают теорему Гиппаса, доказанную с ее применением. Но легко доказать, что для нее не выполняется даже простая формула $a = a$ или $1 = 0,(9)$. Поэтому эти слова А.Н.Колмогорова относятся только к аксиомам геометрии, которые были формализованы и проверены Д.Гильбертом. Однако сам Гильберт считал, что этого, очевидно, недостаточно, что математику можно будет назвать «*настоящей математикой*» лишь тогда, когда будет доказана также непротиворечивость аксиом арифметики, то есть будет положительно решена 2-я проблема Гильберта. Когда Колмогоров писал эту статью (1925 год), ему еще не был известен результат К.Геделя (1931 год), согласно которому невозможно доказать непротиворечивость системы аксиом *S*, охватывающей арифметику целых чисел, средствами самой этой системы, а в рамках другой, более полной системы S_1 можно доказать лишь противоречивость *S*. То есть мы можем с полной уверенностью утверждать, что современная математика — это именно «*псевдоматематика*». И этой псевдонаукой (если мы признаем математику наукой, а не разновидностью литературы, где возможны любые, даже самые вздорные фантазии) в наши дни занимаются все математики, включая, в значительной мере, и самих интуиционистов. В связи с этим не лишним будет заметить, что правительства,

как они являются следствиями истинных формул, соответствующих в псевдоматематике аксиомам типа $\mathfrak{R}$. Название «*псевдоматематика*» для этой ее части, только пока и существующей, становится неподходящим: она как собрание истинных формул является частью настоящей математики.

Будем называть суждение псевдоистинным, если истинно его двойное отрицание. Суждение типа $n\mathfrak{S}$ утверждает таким образом псевдоистинность суждения $\mathfrak{S}$. Формулы псевдоматематики выражают всегда только суждения о псевдоистинности. Мы имеем право назвать поэтому ту часть псевдоматематики, которая имеет реальное значение, математикой псевдоистинности.

§ 6. В обычном изложении математики ряд выводов получается посредством незаконного употребления формул частной логики суждений, например принципа *tertium non datur*. Все эти случаи, как было показано, могут быть сведены к употреблению принципа двойного отрицания

$$(4) \qquad 6.\ \overline{\overline{A}} \to A.$$

Рассмотрим те из этих выводов, которые, кроме незаконной формулы (4), опираются только на аксиомы типа $\mathfrak{R}$. Формулы, их выражающие, будем называть формулами типа $\mathfrak{R}'$.

Построим формулы псевдоматематики, соответствующие формулам $\mathfrak{R}'$. Все они будут следовать из формул $\mathfrak{A}^*$, соответствующих аксиомам типа $\mathfrak{R}$, и из формулы

$$(56) \qquad n\{n(\overline{\overline{nA}}) \to nA\},$$

соответствующей формуле (4).

Формула Е6) является истинной. В самом деле, она вытекает в силу формулы (34) из следующей:

$$(57) \qquad n(\overline{\overline{nA}}) \to nA.$$

Формула (57) может быть получена посредством подстановки из формулы частной логики суждений

$$(58) \qquad n(\overline{\overline{A^*}}) \to A^*,$$

в частной же логике суждений, как известно, четное повторение отрицания приводится к утверждению.

Таким образом, в то время как рассматриваемые формулы обычной математики основаны на незаконном употреблении формулы (4), соответствующие формулы псевдоматематики опираются на истинную формулу (56).

Итак, окончательно получим:

Все выводы обычной математики, основанные на употреблении вне области финитного формулы двойного отрицания и других формул, от нее зависящих (как принцип *tertium non datur*), не могут считаться твердо установленными.

Но поскольку кроме этой формулы, они опираются только на аксиомы типа $\mathfrak{R}$, а других пока неизвестно, постольку соответствующие формулы псевдоматематики являются истинными и, следовательно, входят в математику псевдоистинности.

Иначе говоря, все выводы, основанные на аксиомах типа $\mathfrak{R}$ и формуле двойного отрицания, верны, если мы каждое входящее в них суждение будем понимать в смысле утверждения о его псевдоистинности, т. е. его двойного отрицания.

V. Приложения

§ 1. Обнаружив незаконность применения принципа *tertium non datur* к трансфинитным суждениям, Брауэр поставил задачу обоснования математики без помощи этого принципа, которую в значительной мере и выполнил.[15] Но при этом выяснилось, что существует ряд

15 См., например, [7].

различные фонды и налогоплательщики всего мира вполне легально занимаются финансированием псевдонауки... Если министерство образования РФ (после ухода министра Фурсенко) хотя бы предприняло попытку вникнуть в суть проблемы, то Российская академия наук привычно хранит «*царственное молчание*», не желая ни вникать, ни рассматривать, ни обсуждать, ни формулировать проблему, которой будет «*в обед сто лет*», не говоря уже о каких-то конкретных, не бюрократических действиях по ее решению. Не хочется бросать тень на всех, но факт в том, что в России нет ни одного интуициониста или философа математики с мировым именем, так как все направления, критикующие фундаментальную науку, планомерно были уничтожены и низведены в научной среде на нет, чтобы никто не мешал «*рулить*» большой наукой.

Двойное отрицание «*1 не не является нечетным, а значит является нечетным*» псевдоистинно, т.к. *1=0,(9)*, а *0,(9)* уже не является нечетным. Это значит, что как раз не все выводы из **R** будут верны. Как сказал выше сам Колмогоров, если выявить другие, «*неизвестные пока*» аксиомы, выводы из **R** не обязательно будут верными. Поэтому преждевременно заключать, что все формулы псевдоматематики истинны. Просто другое заключение формалисты не допустили бы для публикации в «Математическом сборнике».

математических предложений, которые не могут быть доказаны без помощи отвергнутого Брауэром принципа *t. n. d.* Далее мы рассмотрим некоторые примеры таких предложений.

Мы показали в предыдущих главах, что наряду с изложением математики без помощи принципа *t. n. d.* может быть сохранено и обычное изложение. Правда, при этом всем предложениям надлежит придать ограничительное толкование, именно: каждое суждение обычной математики надо заменить утверждением о его псевдоистинности. Но это изложение все же сохраняет два замечательных свойства.

1. Если при помощи рассуждений, основанных на применении принципа *t. n. d.*, хотя бы и в области трансфинитного, получен финитный вывод, то вывод этот истинен в обычном понимании. В самом деле, он может в силу предыдущего быть доказан, как вывод о псевдоистинности; в области же финитного псевдоистинность совпадает с обычной истинностью.

2. Применение принципа *t. n. d.* никогда не приведет к противоречию. В самом деле, если бы при его помощи была получена ложная формула, то соответствующая формула псевдоматематики была бы доказана без его помощи и все же приводила бы к противоречию.[16]

Первое из этих положений противоречит одному замечанию Брауэра,[17] который считает, что финитные выводы, основанные на трансфинитном применении принципа *t. n. d.*, также должны считаться недостоверными.

§ 5. Прекрасный пример предложения, недоказуемого без помощи незаконного применения принципа *tertium*

16 Предполагается, что все рассматриваемые аксиомы являются аксиомами типа $\mathfrak{R}$, кроме того, что формулы, прзнанные заведомо ложными, $\mathfrak{S}$ таковы, что соответствующие им $\mathfrak{S}$* также ложны.

17 См. [4, с. 252, примеч.].

Мнение Брауэра, в самом деле, кажется на первый взгляд несоответствующим никакой действительности. Например, если в группе *n*-ное число людей, то мы можем использовать *t. n. d.* для определения числа женщин *(y)*, зная число мужчин *(x)*. То есть $n—x = y$. Но вопрос в том, абсолютно ли всегда этот принцип будет работать верно? Разве не может оказаться в реальности, что кто-то из них не имеет определенного пола? Думается, уж в наши-то дни все слыхали, что есть люди, не относящие себя к *(y)* или

non datur, дан Брауэром (см. [6]): нельзя считать доказанным, что всякое действительное число имеет разложение в бесконечную десятичную дробь. Брауэром даже указано определенное число, про которое неизвестно, имеет ли оно первую цифру десятичного разложения.

Таково же предложение, утверждающее, что дополнение к замкнутому множеству есть область, т. е. что каждая точка, не принадлежащая к замкнутому множеству, содержится в некотором интервале, не заключающем в себе точек замкнутого множества.[18] Доказательство, как известно, осуществляется так: в силу принципа *t. n. d.* в форме **§ 2** этой главы или все интервалы, содержащие взятую точку, заключают в себе точки множества, или существует хотя бы один, их не содержащий; первое предположение приводит к противоречию, так как из него следует, что точка принадлежит множеству, следовательно, верно второе. В противоположность примеру Брауэра мы не умеем указать определенное замкнутое множество и определенную внешнюю для него точку, для которых было бы сомнительным существование требуемого интервала.

§ 6. Интереснее следующий пример: нельзя доказать без помощи принципа *t. n. d.* все предложения, доказательство которых сводится обычно к применению принципа трансфинитной индукции. Таково, например, предложение: каждое замкнутое множество является суммой совершенного и счетного множества.

Часто проводят доказательство подобных предложений без помощи принципа трансфинитной индукции. Но все такие доказательства опираются на принцип *t. n. d.*, примененный к бесконечным совокупностям, или на принцип двойного отрицания.

Важно отметить, что сам принцип трансфинитной индукции может быть выведен без всяких новых по срав-

18 Пример указан П. С. Новиковым.

(x) либо относящие себя и к *(y)*, и к *(x)*. Можно было бы даже назвать это *эффектом Бредли Менинга*: вы не можете точно подсчитать количество мужчин в *n-ой* группе американских солдат, если Менинг находится в процессе изменения пола. Поэтому, если математика претендует на некоторое описание реальности, следует учитывать, что даже в конечных множествах применение принципа «*третье-го не дано*» может привести к появлению недостоверного умозаключения. А раз так, то замечание Брауэра относительно финитных множеств все-таки нельзя полностью исключать из рассмотрения, хотя оно учитывает, порой, ненормальную в обычной логике суждений ситуацию. Но если мы обратимся к области физики, то и здесь нельзя утверждать, например, что если среди двух частиц одна имеет заряд «*минус*», то другая обязательно имеет заряд «*плюс*», т.к. существуют и нейтроны, не имеющие заряда.

нению с теорией точечных множеств допущений, но обязательно с применением принципа *t. n. d.* Следует только формулировать принцип трансфинитной индукции, не употребляя термина «*трансфинитное число*», введение которого потребовало бы новых аксиом. Будем вместо этого рассматривать расположенные вполне упорядоченно, слева направо, множества рациональных чисел. Будем называть отрезком такого множества его часть, расположенную левее какой-либо точки, принадлежащей или не принадлежащей ему. Отрезок всегда будет тоже вполне упорядоченным множеством. Множество отрезков само также будет вполне упорядоченным. Назовем отрезок правильным, если существуют точки множества, ему не принадлежащие.

Принцип трансфинитной индукции формулируется теперь так. Пусть некоторое свойство *J*, могущее быть присущим или не присущим вполне упорядоченным множествам рациональных чисел, удовлетворяет следующим условиям.

1. Множества, состоящие из одной точки, обладают свойством *J*.

2. Если все правильные отрезки некоторого множества обладают свойством *J*, то и само множество им обладает. При этих условиях все вполне упорядоченные множества рациональных чисел обладают свойством *J*.

Так формулированный принцип трансфинитной индукции может быть использован в тех же случаях, как и обычный. Доказательство его проводится так: или все множества обладают свойством *J*, или существует такое множество *E*, которое им не обладает; второе предположение приводит к противоречию: среди отрезков *E* должен быть первый, не обладающий свойством *J*, существование же такого отрезка противоречит условиям.

Приведенных примеров достаточно, чтобы показать, что наряду с развиваемым Брауэром изложением математики без помощи принципа *t. n. d.* должно быть сохранено обычное изложение, пользующееся этим принципом, правда, только как изложение математики псевдоистинности.

Москва, 30 сентября 1925 г.

Литература

1. Hilbert D. Die logischen Grundlagen der Mathematik.— Math. Ann., 1923, Bd. 88, S. 151—165.

2. Whitehead A.N., Russel B. Principia mathematica. Cambridge, 1910—1913. Vol. 1-3.

3. Ackermann W. Begründung des «tertium non datur» mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit.— Math. Ann., 1924, Bd. 93, S. 1—36.

4. Brouwer L. E. J. Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe. — Jahresber. Deutschen Math. Vereinigung, 1925, Bd. 33, S. 251—256.

5. Зигварт Х. Логика. СПб., 1908. Т. 1.

6. Brouwer L. E. J. Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung? — Math. Ann., 1921, Bd. 83, S. 201—210.

7. Brouwer L. E. J. Begründung der Mengenlehre unabhangig vom logischen Satz ausgeschlossenen Dritten. (I) Erster Teil: Allgemeine Mengenlehre. — Verh. Kon. ned. akad. wetensch. Amsterdam, I, 1918, vol. 12, N 5; (II) Zweiter Teil: Theorie der Punktmengen. — Ibid., 1919, vol. 12, N 7.

8. Аристотель. Об истолковании.— Сочинения. М.: Мысль, 1978, т. 2, с. 91—116.

9. Аристотель. О душе. — Сочинения. М.: Мысль, 1975, т. 1, с. 369—448.

10. Лейбниц Г. В. Новые опыты о человеческом разуме. Москва-Ленинград: Соцэкгиз, 1936. 484 с.

➢ Книги, вышедшие после 1925 года, были включены в список редакцией издания «Избранные труды А.Н. Колмогорова» (1985).

Д.С. Клещев

Доказуемость противоречий в основаниях математики типа $\mathfrak{R}$

Ум сугубо математический будет работать правильно, только если ему заранее известны все определения и начала, в противном случае он сбивается с толку и становится невыносимым.

Блез Паскаль. «Различие между познанием математическим и непосредственным»

Не нужно быть академиком, чтобы разоблачить шарлатана, который выманивает деньги у доверчивых людей, сидя перед хрустальным шаром и общаясь с воображаемыми объектами. Но представьте себе ситуацию, что точно такие же шарлатаны, манипулирующие воображаемыми объектами, сидят во всех университетах и институтах мира, обучают детей во всех школах. Представьте, что такие же точно мошенники управляют финансовыми потоками, создают гипнотическую виртуальную реальность, контролируют авторитетные научные журналы, разрабатывают теории о пространственно-временном континууме, не имея определения самого *континуума*. Не правда ли, картина вырисовывается абсурдная? Разве может мир науки быть по глубинной своей сути — псевдонаучным миром?

От редакции

В декабрьском номере «De Lapide Philosophorum» была опубликована статья «Аристотель: основания математики и теорема Гиппаса» Д.С. Клещева (DLP, 2016, № II (010), С. 146-164), посвященная интуиционистской критике античной теоремы, которая часто рассматривается как теорема существования квадратичных иррациональностей.

Отзывы на эту статью показали, насколько мало известно об интуиционизме в современном обществе. Смысл их сводился к тому, что теорема Гиппаса «*сама по себе*» доказана вполне корректно, поэтому ее можно продолжать использовать в математике, где применяются непрерывные десятичные дроби, даже если античные математики пользовались аксиомой неделимости единицы и не знали десятичных дробей.

Подобная позиция, согласно которой никому не позволено подвергать сомнению теоремы, составляющие основы основ «*общепризнанной науки*», отнюдь не нова. Однако критика оснований математики не является частным мнением одного человека, — это направление, к развитию которого имели отношение многие выдающиеся математики XX века, и чтобы это утверждение не показалось кому-то голословным, в данном выпуске «De Lapide» были представлены статьи основателя интуиционизма Лейтзена Брауэра, а также всемирно известных математиков — Германна Вейля и Андрея Николаевича Колмогорова.

Конечно же, кроме них были и другие исследователи, которые видели в интуиционизме источник математического вдохновения. Но следует признать, что эта концепция никогда не лежала на поверхности «*информационного поля*» и до сих пор является своего рода «*математическим андеграундом*». Тем не менее, это не повод, чтобы вводить запрет на обсуждение математических и философских проблем, выдвигаемых интуиционистами.

Кому-то, возможно, это могло бы напомнить времена средневековья, когда в ведущих университетах Европы преподавали астрологию и геоцентрическую систему Птолемея, а для лечения любых недугов врачи занимались кровопусканием. Однако аналогичная ситуация, несомненно, имеет место и в наши дни. Более того, если уровень развития науки определить как соотношение *знания* и *незнания*, то в современной науке *незнания* окажется существенно больше, чем в науке средневековой.

Разумеется, средневековый ученый не знал и половины того, что сегодня знает обычный школьник средней успеваемости, но и вопросов, которые могли бы возникнуть в голове у средневекового ученого, было на многие порядки меньше, чем теперь. По всей видимости, в схоластической науке был достигнут даже такой уровень «*знаний*», когда вопросов в академическом сообществе вообще не возникало, а кто пытался их задавать — тут же объявлялся невеждой или еретиком.

Поэтому далеко не всегда заявленный и демонстрируемый учеными уровень *знаний*, достигнутых человечеством, соответствует уровню реального *понимания*, существующего на данный момент в научной среде. И чем громче в мире науки кричат про «*покорение Луны, на которую ступила нога человека*», про полную «*расшифровку человеческого генома*», про обнаружение «*частицы Бога*», про появление нового вида «*информационного общества*», тем больше возникает сомнений, что ученые вообще понимают, о чем они говорят, подобно тому, как кибернетическая машина не понимает информации, которую получает, обрабатывает и выдает в соответствии со своей программой.

Если бы ученые более охотно рассказывали нам о проблемах, а не об успехах математических, физических, биологических и прочих наук, то очень быстро бы выяснилось, что многие важнейшие проблемы, сформулированные в прошлом веке на волне стремительного научно-технического прогресса, до сих пор не решены, а некоторые были незаметно списаны учеными в раздел «*неразрешимых*». При этом никто не желает обращать внимание, что ряд научных теорий развивается только на том шатком, гипотетическом основании, что в начале XX века решение соответствующих фундаментальных проблем казалось большинству ученых вполне выполнимой задачей.

И вот с непреодолимой силой и неизбежностью приближается пора, когда для самого существования науки необходимо сформулировать «*неразрешимые*» проблемы по-новому либо придется признать, что научное знание так же, как вненаучное, может быть основано на точно таких же недоказуемых, неопределенных и непостижимых постулатах.

На фоне колоссальных знаний, накопленных наукой, мы вместе с тем замечаем, что масштаб проблем, стоящих перед учеными XXI века как будто вышел за пределы человеческого разума. Как следствие — некоторым ученым-футурологам (то есть буквально *оракулам* науки) начинает казаться, что и сам человек измельчал, сделался интеллектуально ненужным и бессмысленным, ибо разум человека, как они полагают, перестал конкурировать с машиной не только при игре в шахматы, но и при доказательстве математических теорем.

Существует ставшая уже достаточно устойчивой тенденция измельчания самих ученых, которые предпочитают браться за проблемы «*рангом помельче, побезопаснее*». В научном мире это сделалось даже условием *sine qua non* для признания того или иного специалиста «*ученым*»: если специалист берется за исследование фундаментальной проблемы, он автоматически зачисляется в разряд «*подозрительных и потенциально опасных для науки чудаков*», а если изучает площадь поверхности, скажем, африканских слонов или занимается описанием подвида пресноводных водорослей, то ему не составит труда получить ученую степень, а то и — не в обиду будет сказано — высокое звание академика Российской академии наук. И подобная тенденция к потере импульса «*большой науки*» характерна для всех стран, где осуществляется переформатирование научного мира под нужды транснациональных корпораций. Это касается не только технических или естественных наук, в той же мере это относится и к математике.

Как гласит крылатая фраза, сколько в науке математики, столько в ней и науки. Но внутренняя трагедия математики состоит в том, что она работает с идеальными абстракциями и субстанциями, которые существуют только в воображении человека. Математика и вся, следом за ней, так называемая «*позитивная наука*» находится поэтому в жесткой зависимости от возможностей и свойств человеческого разума, от развития интуиции. И эта зависимость становится еще более сильной при попытках найти не имеющее аналогов решение (а фундаментальные проблемы потому так и называются, что они не имеют аналогов). Когда ученые занимаются решением стандартных задач, они всегда опираются на уже сложившийся опыт, на шаблон, который можно тщательно и искусно подогнать под тот или иной конкретный случай. Вопреки распространенному мнению, что ученые ориентируется на некие «*чистые*» результаты экспериментов, научная деятельность возможна лишь потому, что осуществляется она всегда через взаимную подгонку внешних экспериментов и внутреннего опыта, который никогда не бывает полностью «*очищенным от сознания*».

Когда же возникает необходимость в решении фундаментальной проблемы, прежний опыт зачастую не помогает, а мешает исследованию. Попытка свести решение, у которого еще не было аналогов, к известному шаблону обречена на провал, так сказать, по определению. Почти все возникавшие в науке «*неразрешимые проблемы*» возникали именно из-за веры ученого в вездесущую применимость старого шаблона. Такова, например, проблема *perpetuum mobile*, когда ученые, начиная с эпохи Возрождения вплоть до конца XIX века, пытались конструировать «*вечный движитель*», опираясь на свой повседневный опыт работы с конечными деталями и объектами, хотя для осуществления вечного движения энергии требуются не операции с конечными объектами, перемещаемыми друг относительно друга в пространстве, а само бесконечное пространство-время.

Несмотря на многочисленные ошибки, допущенные в прошлом, в научной парадигме по сей день живет вера в исключительную независимость науки от сознания, которое было вычеркнуто из «*картины мира*» во времена безраздельного господства Лапласовского детерминизма и не может быть введено в науку, которая не ставит своей задачей *осмысление* обретаемых знаний. А наука, в которой отсутствует осмысленность, всегда будет балансировать на тонкой грани псевдонаучного шарлатанства и прохиндейства.

Вместе с тем, если некоторое решение, не имевшее ранее аналогов, все-таки обнаруживается, ничто не мешает подогнать набор прежних шаблонов, имевшихся в распоряжении ученых, под новое представление или открытие. Лучше всего об этой особенности научного мышления сказала историк математики и методолог науки С.А.Яновская: «*Что значит решить задачу? Ответ оказывается несколько парадоксальным, хотя и поразительно простым: решить задачу — значит свести ее к уже решенным*».[1] За этим парадоксом (решить — значит найти новое, которое можно свести

1 Яновская С.А. Методологические проблемы науки. М., 1972. С.7

к уже решенному) кроется еще одна особенность процесса познания — его *непрерывность*. Познание непрерывно не только на протяжении всей человеческой истории — оно непрерывно на каждом интервале эволюции. То же самое можно сказать, выражаясь словами Г.Вейля: «*Подлинный континуум есть нечто связное в себе и не может быть разделен на отдельные куски, подобное разделение противоречит его сущности... В континууме не может существовать никаких других функций, кроме непрерывных*».[2]

Непрерывность познания означает, что зачатки любого *знания* всегда уже содержатся на предыдущих интервалах или этапах развития науки. Именно эта глубокая мысль об «*интуитивных основах науки*» выступает лейтмотивом известной монографии Т.Куна «Структура научных революций».[3] Данная структура — свойство частичного или полного предвосхищения будущих знаний, как в случае с гелиоцентрической моделью Коперника, описанной еще Аристархом (III век до н.э.),[4] связано с тем, что феномен интуиции и сознания имеет континуальную природу.

Мы наблюдаем континуальную природу не только в чередовании научных парадигм, но и в мифологических и вненаучных образах, когда «*ненаучная сказка*» становится «*научной былью*». Поэтому в концепции Т.Куна следовало бы сделать важное дополнение о том, что на предыдущих интервалах эволюционного процесса содержатся как зачатки будущих *знаний*, так и зачатки неопределенности, то есть — будущего *незнания*, с которым неизбежно сталкиваются ученые.

Как заметил, пожалуй, самый выдающийся математик и физик XX века А.Пуанкаре, развитие математики

2 Вейль Г. О философии математики. Москва-Ленинград, 1934. С.123, 126

3 Кун Т. Структура научных революций. М., 1977. С.250

4 Там же. С.107-108

и появление новых теорий можно уподобить эволюционному развитию живых организмов. Каким бы совершенным ни был вид организма, в эмбриональной стадии своего развития он всегда повторяет «*всю историю его предков в течение геологического времени. По-видимому, то же самое происходит и в развитии ума... По этой причине история науки должна быть нашим первым руководителем*».[5]

Эту мысль о тонкой взаимосвязи познания с эволюцией жизни можно продолжить, поскольку иерархия высших и низших биологических форм дает четкий коррелят с иерархией ментальных способностей. Причем в низших формах, оказывается, тоже содержатся предвосхищения будущих *знаний*, возникающих на самом пике эволюции — в человеческой цивилизации.

Когда наблюдение человека за птицами подсказывает ему идею самолетостроения, когда наблюдение за обитателями подводного мира наталкивает на мысль о строительстве субмарин, когда способность тех же птиц ориентироваться по магнитному полю повторяется в изобретении компаса, когда биотехнологи выделяют новые вещества, исследуя микроорганизмы, а дифференциация клеток и рост деревьев предвосхищают собой обнаружение ряда Фибоначчи, то все эти изобретения и открытия тоже следует рассматривать в виде непрерывного развертывания «*структуры познания*», охватывающей не только тысячи лет развития науки, но и миллиарды лет эволюции биосферы Земли.

В этом смысле новые решения, действительно, можно представить как «*хорошо забытые*» старые, уже существующие где-то на интуитивном уровне. Причем каждый из интервалов непрерывен и заключает в себе бесконечный потенциал эволюции сознания. Проблема в том, что к этим интуитивным решениям с необратимостью

5 Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М., 1967. С.10

времени присовокупляется и огромная неопределенность — тот самый уровень *незнания*, входящий в тот же континуальный интервал «*структуры познания*», преодолеть который способно только разумное существо — человек. Таким образом, для появления принципиально нового решения в действительности требуются сложные внешние и внутренние условия, приводящие к поиску многочисленных недостающих звеньев и к очищению интуиции от наслоений неопределенности.

Некоторые случаи, описывающие работу интуиции у математиков, приведены в научно-популярной книге Ж.Адамара «Исследование психологии процесса изобретения в области математики». Так, математик К.Ф.Гаусс сравнивал озарение со вспышкой молнии, а Гельмгольц и Пуанкаре независимо друг от друга выделяли два характерных свойства обретения интуитивного знания:

С тем же самым архетипом молнии (*Ваджра*) в индуизме и буддизме связывают очищение интуиции (*праджни*) при достижении *враджраического* сознания.

1) оно не имеет никакого отношения к предшествующим попыткам, следовательно, не вызвано предшествующей сознательной работой;

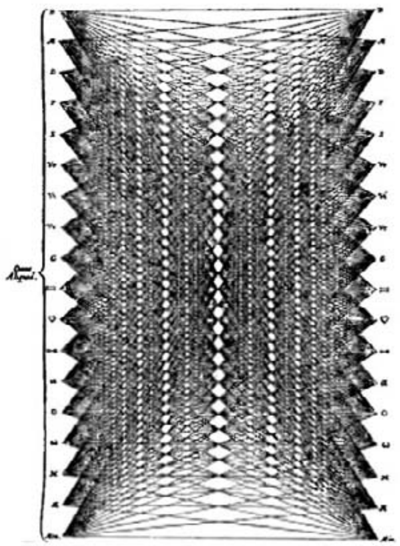
2) оно приходит настолько быстро, что не требуется никакой затраты времени на размышление.[6]

В научном мире подобные заявления могли бы счесть за псевдонаучную «*экстрасенсорику*» и низкопробную мистическую чепуху, которой изобилуют средства массовой информации. Однако эти свидетельства о неизвестно откуда взявшемся интуитивном знании, были оставлены учеными-первооткрывателями, результатами которых пользуется поколение нынешних «*жрецов науки*».

Процесс преодоления континуальной неопределенности при переходе к определенному (порой, единственному) решению Ж.Адамар представляет как выборку из

6 Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., 1970. С.19

«*чрезвычайно большого количества сочетаний*». Мы можем представить, например, какой объем «*вычислений*» необходимо было произвести сознанию Д.И.Менделеева, чтобы к нему во сне пришло озарение, показавшее, как упорядочить химические элементы. Если он работал над упорядочением, скажем, 36 — 50 химических элементов (многие атомные массы из ≈60 известных ему элементов определялись неточно или даже некорректно), то визуально такие вычисления можно изобразить в виде таблицы из трактата Афанасия Кирхера «Искусство большой науки»: количество сочетаний, которые могут образовать эти элементы равно числу *1 273 726 838 815 420 339 851 343 083 767 005 515 293 749 454 795 473 408 000 000 000 000*. Впрочем, в реальности возможных комбинаций при упорядочении химических элементов в таблице Менделеева могло быть как больше, так меньше этого числа.



Еще более поразительные возможности интуиции демонстрировал индийский математический гений — Рамануджан. В его математическом творчестве практически все формулы были получены в результате озарений и утраченной безвозвратно техники медитаций над последовательностями чисел. Никто из ученых, конечно, не поверит в его слова, что математические формулы ему открывала во сне богиня *Намакаль*, но факт в том, что он, в самом деле, записывал их, вставая утром с постели.[7]

«*Имеющая имя Кали*», от санскритского корня «*нама*» — «*имя*» и «*кала*» — «*считать*», «*направлять*» (*кāла* — «*время*», «*космический порядок*», супруга *Шивы* богиня *Кали*).

А ведь и основатель теории множеств Георг Кантор свидетельствовал о чем-то подобном — на математические

7 Левин В.И. Рамануджан. М., 1968. С.8

подвиги его вдохновляла некая таинственная муза, являвшаяся ему во снах и однажды указавшая лестницу из «*алефов*», ведущую к Господу. Для Кантора, как известно, интуитивные озарения закончились расщеплением личности. Математики, разделяющие его взгляды, пытаются обвинить в злополучной болезни Георга Кантора противников теории множеств (Кронекера, Гельмгольца и др.), которые якобы слишком рьяно его критиковали. Но любой психоаналитик подтвердит, что патологические изменения личности наступают лишь тогда, когда в самом сознании человека возникает и продолжительное время существует непреодолимое противоречие.

Когда мы сталкиваемся с подобными феноменами, а мы можем привести еще и другие примеры такого рода, мы должны понимать сознание как непрерывный процесс, включающий в себя и то, что психологи обыкновенно называют «*подсознанием*», и то, что вообще не является сознанием в привычном смысле этого слова. На условность введенного психологами деления (сознание/подсознание) очень верно указывает Ж.Адамар: «*Когда вы едете верхом, лошадь «выше» или «ниже» вас? Она сильнее вас и может бежать быстрее; тем не менее, вы управляете ею*».[8] Как знаток интуитивных математических озарений, Ж.Адамар уверовал в гипотезу континуума Кантора и поддержал его теорию, равно как ряд других математиков XX века, включая самого Д.Гильберта.

Но всегда ли удается, даже «*верхом на лошади*» достичь желаемого? Ведь не все обобщенные формулы Рамануджана были точными — некоторые были верны лишь до определенного конечного числа, а если говорить о Канторе, то он сам обнаружил противоречие в своей теории: трансфинитное множество всех трансфинитных множеств Ω должно включать само себя и, таким образом, оказаться больше себя самого.

8 Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., 1970. С.42

То есть, оказывается, что одной интуиции и желаний недостаточно для обретения всепроникающей истины, и дело даже не в требовании строгого соблюдения научной методологии, которая лишь систематизирует опыт, раскладывает имеющиеся шаблоны и заготовки «*по полочкам*»...

Есть вещи, которые может узнать только определенный человек в определенное время и в определенном месте; это вытекает из континуальных свойств сознания: неповторимое сложение нейро-пептидных связей в десятках миллиардах соединений нейронов, случайные, казалось бы, внешние события и сновидения, влияние эпохи, — никогда невозможно в точности повторить все те условия и воспроизвести то сознание, которое испытало однажды некоторое интуитивное озарение.

В науке считается, и это в сущности является только верой, а не наукой, что ученый выступает носителем научной истины. Но само развитие науки свидетельствует, что человек, каким бы ученым он ни был, не является носителем истинного *знания*, полностью очищенного от *незнания*. Мы можем говорить лишь о том, что каждый человек — носитель *со-знания*, которое занимает в континуальном развертывании «*структуры познания*» некоторый конечный интервал. Однако в этом интервале, безусловно, заложена та же самая потенциально-бесконечная непрерывность, которой обладает континуум.

Думать иначе — якобы в современной научной среде собраны в исключительной степени истинные знания — столь же абсурдно, как и предполагать, что в ограниченном объеме пространства-времени можно собрать настоящий *perpetuum mobile*.

Используя в своих выводах математический принцип *tertium non datur — третьего не дано*, наука признает истинным такое утверждение, которое можно доказать. Загвоздка только в том, что *доказывать* можно по-разному.

Здесь возникает такой же, по сути, парадокс, который в античности был известен как парадокс Эпименида: один критянин сказал, что все критяне лжецы — лжец ли он? Если он не лжец, то он, будучи критянином, тоже является лжецом. Но если он — тоже лжец, как все критяне, то он сказал правду, а значит, он не лжец... и так дальше до бесконечности. Заменив слово «*критянин*» на слово «*ученый*», мы получим логическую «*структуру научных революций*» по Т.Куну. Ведь каждый последующий ученый стремится найти и устранить неточности в знаниях предыдущего поколения ученых и, таким образом, все ученые оказываются «*лжецами*», которые пытаются сказать «*истину*» и — не могут.

Курт Гедель, абстрагируясь от истории науки, получил сходный результат, разбирая проблему доказуемости в математике: если мы заявляем в *S* об *S* «*Это утверждение ложно*», то оно, согласно ему самому, должно быть ложным, но если мы этому верим, то считаем его истинным. То есть в сознании конкретного ученого к «*ложному*» всегда примешивается свойство истинности, а к «*истинному*» — свойство ложности. Если истинно то, что доказуемо, а ложно то, что недоказуемо (именно такое мышление было привито научному миру принципом *tertium non datur*), то из результатов Геделя следует, что «*утверждение истинно в том и только в том случае, если оно недоказуемо*».[9] Но тогда необходимо признать, что ученые заблуждаются, считая абсолютной научной истиной то, что доказано.

Для примера можно рассмотреть парадокс «*истинности*» Птолемеево-Дантовой модели мира, обнаруженный русским мыслителем П.А.Флоренским. В наши дни любой ученый, не задумываясь, скажет, что Земля обращается вокруг Солнца, а не наоборот. Но, как обратил внимание П.А.Флоренский, тот же ученый верит в истинность теории относительности, одним из постулатов которой является равноправность инерциальных систем отсчета. Следовательно, ничто не мешает выбрать в качестве системы отсчета планету Земля, вокруг которой будут вращаться наблюдаемые звезды и Солнце. Можно сказать, что Птолемеева система, действительно, частично предвосхищает открытие теории относительности А.Пуанкаре и Г.Лоренца, развитую впоследствии А.Эйнштейном. Более того, в поэтическом путешествии Данте по девяти кругам Ада, когда он, совершая прямолинейное движение, попадает из центра Земли сразу же в Эмпирей, а затем, из Эмпирея, продолжая двигаться вперед, попадает обратно во Флоренцию, предвосхищает открытие односторонней Римановской эллиптической плоскости.[10]

Кажется, этого достаточно, чтобы показать, насколько сложным является вопрос о доказуемости и истинности. Если утверждение *S* — или истинное, или ложное, как утверждает наука, то сама наука становится псевдоистинной, потому что в действительности принцип *tertium non datur* даже в финитных классах может давать осечку, как в виде патологий, так в виде полезных изменений.

Для понимания, что в утверждении истинно, а что нет, требуется выход за рамки системы *S*. Например, выбрать в качестве точки отсчета какую-нибудь удаленную звезду S_n, открывающую новые области пространства-времени. Тогда мы поймем, что Птолемее-Дантова модель будет истинной только для ограниченного объема пространства. Причем, вселенная в Птолемеевой модели, действительно, ограничена сферой «*небесных движений*», которые в 27,5 раз дальше от Земли, чем Солнце.[11]

Итак, мы вплотную подошли к вопросу: если доказуемость не может быть надежным критерием истинности,

➢ То есть где-то между орбитами планеты Плутон (древнегреческий «Аид» или «Ад») и планеты Уран (древнегреческое «Небо» или «Эмпирей»).

9 Клайн М. Математика. Утрата определенности. М., 1984. С.305

10 Флоренский П.А. Мнимости в геометрии. М., 1991. С.46-48

11 Флоренский П.А. Мнимости в геометрии. М., 1991. С.50

если вполне надежны лишь доказательства неистинности или противоречивости утверждений, то что нужно сделать, чтобы доказать наличие противоречий в основаниях математики? Наука скажет: для этого надо доказать, что некая система аксиом *S* противоречива. Если система *S* содержит противоречие, то от него — скажет формалист — можно раз и навсегда избавиться введением аксиомы, исключающей возникновение противоречия. Как раз по пути добавления все новых и новых аксиом пошла математика XX века.

Но для интуициониста слепая вера формалистов в то, что они получили таким образом «*истинные основания математики*», по крайней мере, вызывает сомнения, а по большому счету — лишена смысла. Потому что преумножение экзистенциальных недоказуемых сущностей не добавляет утверждениям истинности и не может исключить обнаружение в будущем очередного противоречия.

Задача доказательства непротиворечивости математики была поставлена Д.Гильбертом в 1900 г. на II Международном конгрессе математиков в Париже. В то время математические парадоксы, возникшие в теории бесконечных множеств, в срочном порядке «*latались*» аксиоматизацией математики и введением новых аксиом, хотя никто не мог гарантировать, что это поможет избежать новых парадоксов.

В 1922 г. Д.Гильберт все-таки признал, что «*состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. Подумайте: в математике — в этом образце достоверности и истинности — образование понятий и ход умозаключений, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводят к нелепостям. Где же тогда искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?*».[12]

12 Виленкин Н.Я. В поисках бесконечности. М.,1983. С.136

Успешная формализация аксиом геометрии позволила Д.Гильберту надеяться на столь же успешную формализацию и доказательство непротиворечивости аксиом арифметики. Однако после публикации в 1931 г. статьи Курта Геделя «О формально неразрешимых утверждениях и родственных систем» позиции школы формализма, возглавляемой тогда Д.Гильбертом, существенно пошатнулись. Оказалось, что невозможно доказать непротиворечивость системы аксиом *S* средствами самой этой системы.

Из первой и второй теоремы Геделя о неполноте языка формальной математики следовало, что мы можем доказать лишь существование противоречия в системе аксиом *S* через посредство другой, более полной системы аксиом S_n. Об этом важном следствии почему-то забывают упомянуть многие авторы. Оно и понятно: ни научное сообщество, ни, тем более, математиков не может радовать перспектива того, что в основе «*общепризнанной*» математики содержатся внутренние противоречия. Ведь в этом случае окажется, что весь научный мир пользуется *неистинной* или *псевдоистинной* математикой, иначе говоря, занимается распространением *псевдонауки*.

Результаты К.Геделя свели на нет надежды Д.Гильберта получить, наконец, доказательство непротиворечивости аксиом арифметики. Программа аксиоматизации математики не помогла установить ее истинность, хотя математики, разумеется, верили в то, что занимаются истинной наукой. Они не хотели и не хотят признавать ничто иное, не взирая на то, что «*Брауэр установил, что интуитивно воспринимаемые истины часто лежат далеко за пределами того, что было доказано в классической математике, а Гедель доказал, что интуитивно воспринимаемые истины вообще выходят за рамки математического доказательства*».[13]

13 Клайн М. Математика. Утрата определенности. М., 1984. С.306

Казалось бы, в этих условиях следовало пристальней присмотреться к классической математике или хотя бы относиться более серьезно к критическим замечаниям интуиционистов. Однако интуиционизм до сих пор воспринимается как «*маргинальное*» направление, существующее в науке где-то особняком, как некий архипелаг.

Если Д.Гильберт еще мог открыто говорить об «*истинности математики*», то в настоящее время представители формализма вообще отказались от идеи применения понятия «*истина*» к математике: «*Вопрос об истинности или ложности математических суждений с формалистской точки зрения не имеет смысла. Можно говорить лишь об их доказуемости или опровержимости на основе аксиом*».[14] С еще более радикальными взглядами выступал в XX веке Карнап, который предлагал исключить слово «*истина*» даже из философских словарей. Действительно, это очень удобно: если нет «*истинной*», то не может быть и «*псевдоистинной*» науки, а значит, ничто не помешает и дальше игнорировать любую критику оснований математики.

В современном формализме принято отрицать какое бы то ни было «*интеллектуальное содержание*» математических понятий.[15] Причем лукавство подобной позиции прямо-таки поражает! Ведь в основе концепции формализма лежит теория множеств Г.Кантора, и достаточно вспомнить о «*таинственной музе*» Георга Кантора, которая являлась ему во снах, поддерживала и направляла его работу, чтобы обнаружить непосредственную связь основных понятий формализма с человеческим разумом, который, как мы знаем, не защищен от ошибочных суждений.

14 Успенский В.А., Плиско В.Е. Интуиционистская логика // Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. М., 1985. С.395

15 Бурбаки Н. Теория множеств. М., 1965. С.335

Игнорируя интуитивное понятие «*истины*», формалисты, вместе с тем, находят в себе моральное право выступать против интуиционизма, представляя его лишь некой «*исторической достопримечательностью*».[16] Один из поводов для критики в адрес интуиционистов звучит примерно так: «*Согласно концепции Брауэра математические объекты рождены человеческой мыслью и потому истинность суждений о них полностью определяется представлениями (об этих объектах) того математика, в сознании которого сложились эти объекты. Строго говоря, с точки зрения интуиционизма сколько математиков — столько и математик*».[17]

Зная, насколько пугливо относятся ученые к своей научной репутации, можно понять, почему математики теперь предпочитают заниматься «*безопасными*», как они думают, отраслями, не вникая в проблемы оснований, поднятые интуиционистами. В самом деле, кто захочет выглядеть в глазах других ученых сторонником кошмарной концепции, согласно которой «*Сколько в мире математиков, столько в нем и математик*» или «*Сколько в мире ученых, столько в нем и наук*»?

Но это явное передергивание, призванное отпугнуть от интуиционизма, вскрывает еще один немаловажный вопрос: а кого вообще следует считать «*ученым*» или «*математиком*»? Можно ли считать ученым человека, который ничего не открыл? А если он, действительно, что-то открыл, то выходит — наука, существовавшая до него, не тождественна науке после сделанного им открытия. Так что здесь интуиционизм, несомненно, более точен в отражении реального положения дел, чем концепция формализма, согласно которой достаточно приобрести ученую степень или звание, чтобы сделаться «*ученым*».

16 Бурбаки Н. Теория множеств. М., 1965. С.341

17 Успенский В.А., Плиско В.Е. Интуиционистская логика // Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. М., 1985. С.395

В истории науки эта зависимость «*количества наук*» от «*числа ученых*» проступает еще более рельефно — никто, пожалуй, не станет отрицать, что математика и физика времен Ньютона и Лейбница не тождественна математике и физике времен Гаусса и Максвелла, а наука XIX века не тождественна науке XX века. Наблюдаемый при этом уровень различий находится в прямой зависимости от количества ученых, сделавших действительно важные открытия.

Именно в этом смысле единый процесс познания предстает в интуиционизме как «*различные науки*», зависящие от числа ученых, делающих на том или ином интервале пространства-времени-сознания действительные, а не фиктивные открытия, а вовсе не в том превратном толковании, будто интуиционизм не признает за наукой какой бы то ни было объективности. Кстати говоря, развитие самого интуиционизма привело к появлению «*различных интуиционизмов*», поскольку взгляды Брауэра не во всем совпадали со взглядами Пуанкаре или Вейля, взгляды Гейтинга и Трулстра не во всем совпадали со взглядами Маркова, не говоря уже о различиях во взглядах Геделя, Колмогорова, Гливенко, Новикова, Крипке, Штрассена, Артемова и др.

В интуиционизме, если общим признаком интуиционизма считать настороженное отношение к принципу *tertium non datur*, пересмотру подвергается лишь закрепленное в формальной науке разделение на «*субъективное*» и «*объективное*», поскольку в реальном процессе познания человек всегда сталкивается с тонкой градацией и взаимодействием «*субъективного*» с «*объективным*», а еще точнее — бесконечного и непрерывного с конечным и дискретным.

Если формальная математика кажется со стороны некой единообразной наукой, то это указывает, прежде всего, на очень высокий уровень шаблонности мышления формалистов, но никак не доказывает непротиворечивость или истинность оснований математики. Шаблонность мышления означает применимость шаблона в одной и неприменимость его в другой ситуации, и отождествляя единообразие поведения с истинностью, человеческое общество никогда бы не достигло того уровня знаний, которым сейчас располагает.

За попытками принизить значение интуиционизма, изгнать его из «*общего доступа*» скрывается неуверенность математиков, страх научного сообщества перед тем, что однажды откроется интеллектуальный дефолт господствующей в математике концепции формализма, набравшей слишком много кредитов и оказавшейся не в состоянии их вернуть (будь то гипотеза континуума Г.Кантора или доказательство непротиворечивости аксиом арифметики). Дефолт, о котором предупреждал еще Г.Вейль, сравнивая абстрактные суждения формалистов, претендующие на всеобщность, с «*бумажной валютой*», тогда как подлинные математические знания можно уподобить непосредственно доступным «*материальным ресурсам и продуктам*».

Когда «*бумажной валюты*» становится намного больше, чем «*ресурсов*», которые можно за нее купить, в экономике неизбежно происходит обесценение «*бумажных денег*» — как бы ни старались банкиры обмануть экономических агентов, изымая из оборота, перенаправляя и скрывая от общества излишки «*бумаги*».

Вместо рассмотрения конкретных арифметических аксиом и утверждений формальный стиль требовал наиболее общих доказательств, которые бы сразу охватывали по возможности все области математики. Только интуиционизм признавал роль отдельных примеров и утверждений в качестве аргументов доказательства: если для некоторого «*общего*» экзистенциального утверждения находился контр-пример, такое утверждение теряло смысл «*общего*» утверждения.

Поскольку Д.Гильберт черпал свою мощную веру в непротиворечивость аксиом арифметики в успешной формализации аксиом геометрии, то для начала не мешало бы сравнить используемые в арифметике аксиомы с геометрическими аксиомами Гильберта. По всей видимости, никто из математиков за сотню лет так и не удосужился этого сделать. В противном случае несоответствие обнаружилось бы уже при сопоставлении аксиом арифметики с первой Гильбертовой аксиомой порядка:

«*Если A, B, C — точки одной прямой, и B лежит между A и C, то B лежит также между C и A*».[18]

Как заметил М.Я.Выгодский, в самой геометрии можно было бы обойтись и без Гильбертова определения понятия «*между*», ведь очевидно, что фраза «*B лежит между A и C*» подразумевает точно такой же смысл и у фразы «*B лежит между C и A*».[19] Но Д.Гильберт мыслил очень последовательно, руководствуясь более общими соображениями об упорядочении и аксиоматизации.

Итак, выберем для точек *A, B, C,* лежащими на одной прямой, простые числовые значения *1, 2, 3*, которые, согласно арифметической аксиоме эквивалентности, равны соответственно десятичным дробям *0,(9), 1,(9)* и *2,(9)*. Тогда переходы между этими точками в одном направлении $A \to B \to C$ будут включать в окрестность точек непрерывные *дроби с недостатком*, а вот при обратном направлении $C \to B \to A$ окажется, что окрестности точек *пусты*. Другими словами, непрерывность в таких конечных арифметических значениях достигается лишь наполовину, а значит, точка *B* при переходе от *A* к *C* не будет лежать в точности «*также*», как при обратном переходе от *C* к *A*.

18 Гильберт Д. Основания геометрии. Петроград, 1923. С.4

19 Выгодский М.Я. «Начала» Евклида // Историко-математические исследования. Москва-Ленинград, вып. 1, 1948. С.267

Более того, для нулевой точки, которая в арифметике обозначается числом *0*, окрестности по обе стороны числовой прямой в положительном и отрицательном направлении окажутся арифметически *пустыми*: *0=0,(0)*. Тогда спрашивается: почему для точек *1, 2, 3* мы находили окрестности, включающие *непрерывные дроби с недостатком*, а для числа *0* — только *пустые* окрестности? Выходит, даже понятие «*точка*», используемое в арифметике, не совпадает с понятием «*точка*», используемым в геометрии.

Конечно, такое несоответствие еще не означает обнаружение противоречия в системах аксиом арифметики, но оно могло бы насторожить математиков. Для устранения данного несоответствия потребовалось бы всего-навсего ввести непрерывные десятичные приближения с *недостатком* и *избытком*. Тогда можно было бы сказать, что в арифметике, как и в геометрии, существуют непрерывные переходы в прямом и обратном направлении, по крайней мере, между всеми точками числовой прямой, соответствующими рациональным числам и нулевому значению:

$$
\begin{aligned}
-0{,}000\ldots\infty 1 &= 0 = 0{,}000\ldots\infty 1;\\
0{,}999\ldots\infty &= 1 = 1{,}000\ldots\infty 1;\\
1{,}999\ldots\infty &= 2 = 2{,}000\ldots\infty 1;\\
2{,}999\ldots\infty &= 3 = 3{,}000\ldots\infty 1\ldots
\end{aligned}
$$

Именно в этом и состояло предложение Брауэра и Вейля рассматривать каждую точку континуума в качестве непрерывного интервала

$$\left(\frac{m-1}{10^h}, \frac{m+1}{10^h}\right),$$

где h — глубина десятичного интервала.

Загляните в любой учебник по элементарной математике — вы не найдете там даже упоминаний о десятичных

Тонкое различие между истинной и псевдоистинной математикой можно сравнить с вопросом о существовании «*кентавра*». Казалось бы, сам такой вопрос — уже абсурден: всем известно, что никаких «*кентавров*» не существует. Но вот вы видите нарисованного на бумаге или в кинофильме «*кентавра*», и вы уже не можете сказать, что «*кентавры*» вообще не существуют в какой бы то ни было форме. Так ведь? Точно таким же трюком пользуются формалисты, выдавая своих воображаемых «*кентавров*» за настоящую математику.

приближениях с избытком, симметричных на числовой прямой приближениям с недостатком. Зато во всех этих учебниках вы найдете массу слов о «*непрерывных функциях*». О какой «*непрерывности*» может идти речь, если в стандартной арифметике все рациональные значения, подобно мифологическому образу кентавра, непрерывны только наполовину, а нулевое значение как начальная точка отсчета вообще не обладает в такой арифметике свойством непрерывности?

Далее, поскольку мы дополнили арифметическую аксиому эквивалентности, назовем ее *(a)*, бесконечными приближениями с избытком, которые симметричны приближениям с недостатком, а именно непрерывным дробям с периодом *(9)*, для каждого рационального значения, то вместо прежней классической системы аксиом *S (a)* мы получили новую систему аксиом арифметики, которую можно назвать интуиционистской системой аксиом арифметики $S_i(a)$.

Если введенное нами дополнение действительно образует более полную систему S_i, а не является лишь тривиальной тавтологией, столь часто выдаваемой в формальной математике за новый научный результат, то, согласно теореме Геделя о неполноте, более полная система арифметических аксиом S_i позволит доказать противоречивость классической арифметики, использующей систему аксиом *S*.

Чтобы обнаружить такое противоречие в основаниях математики, не надо перебирать все понятия, формулы и доказательства с Геделевскими номерами, такими как 2^{900} или 3^{90}. Противоречие было известно с незапамятных времен, а в XIX веке на него вновь обратил внимание Р.Дедекинд. В работе «Непрерывность и иррациональные числа» (1859) он отмечает, что понятие «*непрерывность*», которым широко пользуются математики, нигде не определено, а самая большая трудность состоит в том, что классические иррациональные числа и классические рациональные числа разрывают числовую прямую на два класса, между которыми нет ни общих точек, ни величин, которые бы их соединяли.

Р.Дедекинд недоумевал по поводу столь безответственного отношения своих коллег к основаниям математики: «*Принятое до сих пор введение иррациональных чисел связывается именно с понятием о протяженных величинах — которое само нигде не определено — и определяет число как результат измерения такой величины другою такого же рода. Вместо этого я требую, чтобы арифметика развивалась сама из себя… чтобы иррациональные числа были вполне определены через посредство рациональных. Но как это сделать — вот в чем вопрос*».[20]

Для выхода из этого затруднения и получения непрерывности Дедекинд ввел абстрактную точку сечения α, которая могла произвольно относиться как к первому, так ко второму классу. За неимением других вариантов математики единогласно согласились с Дедекиндом, хотя сам Дедекинд отмечал, что он «*решительно не в состоянии привести какое бы то ни было доказательство справедливости этого принципа, и никто не в состоянии. Принятие этого свойства прямой линии есть не что иное как аксиома, посредством которой мы только и признаем за прямой ее непрерывность*».[21]

В интуиционистской математике, как уже было сказано, вместо точек с пустыми окрестностями и Дедекиндовых точек сечения вводятся интервалы:[22]

$$\left(\frac{m-1}{10^h}, \frac{m+1}{10^h}\right)$$

20 Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа. Одесса, 1923. С.16

21 Там же. С.18

22 Вейль Г. О философии математики. Москва-Ленинград, 1934. С.121

Это ведет к неожиданному, на первый взгляд, результату: для всех «*классических иррациональностей*» квадратичных, кубических и т.д. отпадает сама необходимость соединять между собой два класса точками сечения для получения континуальной непрерывности.

В частности, в системе арифметических аксиом S_i число *2* задано интервалом $1{,}999...\infty = 2 = 2{,}000...\ \infty 1$, что позволяет отнести числа *2* и $\sqrt{2}$ к одному классу, то есть представить $\sqrt{2}$ периодической десятичной дробью, поскольку найдется глубина потока *h*, необходимая для получения рационального числа:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\_(707\_)$$

В данном и во всех подобных случаях искомая непрерывность достигается не через абстрактную, произвольно относящуюся то ли к одному, то ли к другому классу «*точку сечения*», о которой математики не могут ничего сказать, кроме экзистенциального утверждения «*она существует*», а через конечное, рациональное интервальное значение *2,00_1*, задающее базис *1,414_* для получения бесконечно повторяющегося периода *(707_)*.

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{(1414\_707\_ - 1414\_)^2}{999\_000\_^2} = \frac{199\_700000\_1000\_}{99\_800\_1000000\_} = 2{,}00\_1.$$

В самом деле, если дробь $\sqrt{2}=1{,}414...$ является непериодической десятичной дробью, то при ее возведении в квадрат мы никак не сможем получить периодическое значение *1,(9)* равное *2*, а будем получать лишь такое же непериодическое значение $\sqrt{2}^2=1{,}9999u_1u_2u_3\ldots$ Иначе говоря, в классической арифметике нет совершенно никаких оснований для введения строгого арифметического тождества $\sqrt{2}^2=1{,}(9)=2$, которое между прочим в ней беззастенчиво используется.

Утверждение о том, что некая непериодическая десятичная дробь $\sqrt{2}=1{,}414...$ дает во второй степени периодическое десятичное значение или рациональное число $\sqrt{2}^2 = 1{,}(9) = 2$ столь же абсурдно, как и утверждение, что число $\pi=3{,}1415\ldots$ в некоторой степени n, $n\neq 0$, является «*рациональным числом*» π^n.

Вместо классического понятия «*множество*» Брауэр использовал для рассмотрения непрерывных числовых последовательностей понятие «*поток*». Вейль вместо понятия «*глубина h*» использовал термин «*h-тая ступень*», что подразумевает то же самое, что и «*глубина потока*».

Теперь на том же примере $\sqrt{2}$ (который можно распространить на все квадратичные, кубические и т.д. «*классические иррациональности*»), мы можем получить тот же вывод с помощью принципа противоречивости, который, как показал А.Н.Колмогоров, выполняется и в классической, и в интуиционистской логике суждений.[23]

Тезис А: пусть $\sqrt{2}$ обладает свойством иррациональности $\sim\rho$:

$$\sqrt{2} \in \sim\rho$$

Тезис В: тогда произведение $\sqrt{2} \bullet \sqrt{2}$ обладает тем же свойством иррациональности $\sim\rho$:

$$\sqrt{2} \bullet \sqrt{2} \in \sim\rho$$

Тезис ~В: в то же время нам известно, что произведение $\sqrt{2} \bullet \sqrt{2} = 1{,}(9) = 2$ обладает свойством ρ рационального числа:

$$\sqrt{2} \bullet \sqrt{2} \in \rho$$

В таком случае окажется, что $\sqrt{2}$ тоже обладает свойством рациональности ρ. То есть истинным будет...

Тезис ~А: число $\sqrt{2}$ обладает свойством ρ рационального числа:

$$\sqrt{2} \in \rho$$

Если из *А* следует *В* и *не-В*, то в действительности имеет место *не-А*:

$$(A \to B) \to \{(A \to \sim B) \to \sim A\}.$$

В системе арифметических аксиом S_i доказана противоречивость классической системы *S*, что согласуется с

23 Колмогоров А.Н. О принципе tertium non datur // Избранные труды. М., 1985. С.45-69

теоремой Геделя, а значит, интуиционистская система аксиом S_i , действительно, более полная, чем классическая система аксиом *S*.

Кроме того, мы можем подтвердить интерпретацию А.Н.Колмогорова в той ее части, что свойством *псевдоистинности* может в равной степени обладать как обычная математика, использующая принцип *tertium non datur*, так и математика интуиционистская, если в ней продолжают использовать систему арифметических аксиом *S*, ввиду того, что никаких других систем «*пока неизвестно*».[24]

Тогда и в той, и в другой математике будет содержаться завуалированное противоречие $\sim\rho=\rho$, когда «*классические иррациональности*», возведенные в ту или иную степень *n*, $n\neq 0$, вдруг дают периодические значения и становятся рациональными числами.

То есть, действительно, «*формула псевдоматематики может быть доказана и без применения принципа t. n. d. и все же вести к противоречию*».[25] Так, если нам неизвестна система аксиом S_i , в которой возникает рациональное интервальное значение *2,00_1*, мы можем легко доказать «*иррациональность*» $\sqrt{2}$ и без незаконного применения закона исключенного третьего, как это сделано в античном доказательстве Гиппаса о «*несоизмеримости*» стороны и диагонали квадрата. А именно — в системе *S* существует и другое, вполне конструктивное доказательство.

Теорема: десятичная дробь $\sqrt{2}=1{,}414\ldots$ несоизмерима в целых числах *p* и *q*.

Доказательство. Рассмотрим числа *p* и *q*, такие что $p^2=2q^2$. Так как рациональное число *2* можно записать в виде бесконечной десятичной дроби *1,(9)*, а при ее переводе в обыкновенную дробь в знаменателе получается конечная последовательность из одних девяток *199…8 / 999… = 2*, то запись целых чисел p^2/q^2 примет вид:

$$p^2 / 999\_^2 = 2,$$

откуда $p^2 = 2 \bullet 999\_^2 = 199\_600\_2$. Как видим, число *199_600_2* должно оканчиваться на *2*. Получить такую последовательность можно лишь возвышением в квадрат некоторого целого числа, на конце которого стоит одно из натуральных чисел от *0* до *9*, которое на конце образуемой последовательности *199_600_2* дает число *2*.

Простым перебором натуральных чисел от *0* до *9*, возведенных в квадрат, легко установить, что ни одно из них не дает на конце число *2*: $0^2=0$; $1^2=1$; $2^2=4$; $3^2=9$; $4^2=16$; $5^2=25$; $6^2=36$; $7^2=49$; $8^2=64$; $9^2=81$. Квадраты любых конечных последовательностей образуют на конце только числа *0, 1, 4, 9, 6, 5*, среди которых нет числа *2*. Следовательно, искомого таким способом целого числа *p* — не существует.

В таком конструктивном доказательстве не используется принцип *t. n. d.*, однако оно все равно будет *псевдоистинным*: не содержать в себе противоречия, и все же вести к противоречию $\sim\rho=\rho$.

Если нам не известна система аксиом S_i, дающая интервал *2,00_1*, и конкретный способ соизмерения, то сторона и диагональ квадрата, действительно, будут для нас «*несоизмеримы*». Поэтому в псевдоматематике утверждение об их «*несоизмеримости*» будет «*истинным*», а точнее псевдоистинным: раз не известен способ — нет и соизмерения. А.Н.Колмогоров очень тонко уловил этот нюанс: «*все формулы ее [псевдоматематики] истинны, так как они являются следствиями истинных формул, соответствующих в псевдоматематике аксиомам типа* $\mathfrak{R}$».[26]

24 Колмогоров А.Н. О принципе tertium non datur // Избранные труды. М., 1985. С.62

25 Там же. С.63

26 Колмогоров А.Н. О принципе tertium non datur // Избранные труды. М., 1985. С.61

Однако, в отличие от Л.Брауэра, он выдал обычной математике очередной крупный «*кредит*». Так как других аксиом, кроме типа $\mathfrak{R}$, «*пока неизвестно*» (апелляция к тезису «*ignorabimus*»), то «*название "псевдоматематика" для этой ее части, только пока и существующей, становится неподходящим: она как собрание истинных формул является частью настоящей математики*».[27]

Стало быть, вместе с появлением более полной системы арифметических аксиом S_i, не принадлежащей типу $\mathfrak{R}$, у нас нет уже прежних оснований отождествлять обычную математику с «*настоящей математикой*». Так называемая «*обычная математика*», построенная на основании аксиом типа $\mathfrak{R}$, в которой квадратичные, кубические и т.д. «*классические иррациональности*» признаются непериодическими десятичными дробями, является именно *псевдоистинной* математикой в терминах Колмогорова.

Возникает вопрос: каким же образом математикам удавалось так долго скрывать от самих себя существование в основаниях обычной арифметики противоречия ~ρ=ρ? Оказывается, ими было введено весьма остроумное исключение из правил, согласно которому «*любая бесконечная периодическая дробь с периодом, отличным от 9, является рациональным числом*».[28]

Как вам это нравится? Воспользовавшись этим исключением, можно сказать, что произведение $\sqrt{2} \bullet \sqrt{2}$ равно *1,(9)*, а эта периодическая десятичная дробь *1,(9)* с периодом *(9)* — исключена из рациональных чисел. Вместе с тем, в исключении не говорится, что *1,(9)* является иррациональным числом. Таким образом, оно не является ни тем, ни этим, и противоречия ~ρ=ρ на этом шаге не возникает. Не возникает его и на следующем шаге, когда утверждается, что дробь *1,(9)* с периодом *(9)* равна рациональному числу *2*. Ведь из исключения следует только то, что дробь *1,(9)* не является рациональным, а что число *1,(9)* иррационально — об этом никто не сказал. Следовательно, когда мы утверждаем, что *1,(9) = 2*, противоречия ~ρ=ρ «*иррациональное равно рациональному*» тоже формально как бы не возникает. В исключении содержится только суждение, что число *1,(9)* не является рациональным, а каким именно его считать — вообще не указано.

Как тут не вспомнить слова Г.Вейля, только он сравнивал доказательства формалистов с листом бумаги или картой, на которой никак не отмечено расположение нужного объекта или «*сокровища*»,[29] а здесь вам вообще протягивают пустые руки и говорят, что в них находится... очень-очень точная карта от самого-самого ценного сокровища.

Подобный экзистенциальный подход весьма характерен для формального стиля мышления. Когда формалист чего-то не знает, он никогда не признается, что он чего-то не знает, потому что, не признавая *незнания*, можно продолжать по-прежнему думать и вести себя так, будто тебе все известно. Такая вот получается формальная логика. Но в случае с исключением, согласно которому «*бесконечные периодические дроби с периодом (9)*» не являются рациональными числами, формалисты лишь придали противоречию ~ρ=ρ новый вид. Отчего противоречие стало еще пышнее и краше. Теперь ему можно придать разные формы.

Пусть $\sqrt{2} \bullet \sqrt{2}$ *= 1,(9)*, а про число *1,(9)* сказано, что оно не рационально, и не сказано, что оно иррационально (свойство ?ρ). Если *1,(9) = 2*, то и про *2* следует говорить, что оно не рационально, и не говорить, что оно ирраци-

27 Колмогоров А.Н. О принципе tertium non datur // Избранные труды. М., 1985. С.61

28 Е.С.Кочетков, Е.С.Кочеткова. Алгебра и элементарные функции. Ч.I. М., 1966. С.85

29 Вейль Г. О философии математики. Москва-Ленинград, 1934. С.23

Спор вокруг оснований математики, действительно, напоминает судебную тяжбу. Пока не установлены мотивы, улики и состав преступления, подсудимого можно лишь подозревать в незаконных деяниях. Интуиционизм во главе с Л.Брауэром выступает в этом затяжном процессе в качестве «*обвинителя*», который собрал немало улик. А.Н.Колмогоров, первым формализовавший логику интуиционистов, выступил в 1925 году в качестве мощной «*защиты*». Его аргумент сводился к тому, что для вынесения приговора требуются не только улики, которые можно сфальсифицировать, но и, вообще говоря, некоторый «*пострадавший*» или «*свидетель*» — хоть кто-то, кроме самой общепризнанной математики. Ведь подсудимый не обязан свидетельствовать против самого себя, если, конечно, он не хочет чистосердечно признать вину. По логике так и выходит: нет пострадавшего — нет и преступления. Криминальным путем преступник может избавиться от всех свидетелей и пострадавших — и с формальной точки зрения он окажется ни в чем невиновным. Система аксиом S_i и есть такой сторонний наблюдатель, привлеченный интуиционизмом из строения «*классических иррациональных чисел*», который позволяет предоставить стороне «*обвинения*» даже «*свидетеля*» незаконных деяний. Но проблема оказалась шире (об этой трудности Л.Брауэр, кажется, не мог даже подозревать). Теперь стало ясно, что и судья, и присяжные в этом процессе — все они тоже участники незаконных деяний...

онально ($2 \in\ ?\rho$). Но в то же время математики говорят, что число *2* рационально ($2 \in \rho$). Тогда по тому же принципу противоречивости истинным будет суждение, что число *1,(9)* рационально ($1,(9) \in \rho$), а если оно рационально, то будет рационально и $\sqrt{2} \bullet \sqrt{2} = 1,(9)$, то есть ($\sqrt{2} \bullet \sqrt{2} \in \rho$), что возвращает нас к противоречию $\sim\rho=\rho$, из которого, как показано выше, вытекает, что $\sqrt{2}$ рационально ($\sqrt{2} \in \rho$).

Если вы продолжаете упорствовать и утверждать, что периодическая (!) десятичная дробь *1,(9)* не является рациональным числом, то вместо парадокса $\sim\rho=\rho$ «*иррациональное равно рациональному*» вы получаете парадокс $?\rho=\rho$ «*не рациональное, о котором запрещено говорить, что оно иррационально, равно рациональному*» только и всего.

Несмотря на то, что такие выдающиеся математики как Л.Брауэр, А.Гейтинг, А.Н.Колмогоров исследовали пропозиционное исчисление суждений в контексте истинности и доказуемости, получившее затем обобщенное название «*семантика Брауэра-Гейтинга-Колмогорова (БГК)*», а К.Гедель в теоремах о неполноте обосновал доказуемость лишь существования противоречий в системе аксиом арифметики в рамках более полной системы, никто из них, как известно, так и не применил принцип противоречия непосредственно к основаниям математики. Хотя, как справедливо отмечает биограф Л.Брауэра и специалист по интуиционизму Дирк ван Дален, чтобы работать в этой области и «*формализовывать понятие, его нужно сначала понять*».[30] То есть у всех, кто разрабатывал эту семантику, имелись свои примеры парадоксов. Поэтому и подходы к проблеме противоречий у них были несколько различны.

30 ван Дален Д. Колмогоров и Брауэр о конструктивной импликации и правило противоречия // Успехи математических наук. Т. 59, вып. 2(356), 2004. С.55

Причем, как пишет Дирк ван Дален, только А.Гейтинг, чьи взгляды изначально были наиболее близки взглядам Л.Брауэра (прохладно относившегося к самой идее полной формализации интуиционизма), сохранил до конца верность принципу противоречия и стал его трактовать как «*предложение, выражающее задачу или, еще лучше, ожидание*»[31] построения, приводящего к противоречию.

А.Н.Колмогоров, и это особенно четко заявлено в статье «О принципе tertium non datur», наоборот, трактовал отсутствие построения системы, не принадлежащей типу $\mathfrak{R}$, в пользу отсутствия реального, неисправимого в рамках $\mathfrak{R}$ противоречия. Поэтому он, написав еще одну статью «К толкованию интуиционистской логики», добавил к принципу противоречия связку «*есть решение*» (если *~A* решено, то решение *A* невозможно),[32] и больше напрямую не возвращался к этой теме. Впрочем, проблема истинности и доказуемости подтолкнула его к введению понятия т.н. Колмогоровской степени сложности (минимальная длина совокупности знаков, описывающая математический объект и его свойства), а затем Г.Чейтин указал на существование предела, не позволяющего использовать для данного объекта какой-то единый, универсальный алгоритм построения.

Можно сказать, что установка на «*обещающий*» характер трактовки А.Гейтинга принципа противоречия получила тем самым косвенное подтверждение. Но существенным здесь является то, что исчислимые предикаты и формы суждений имеют своей целью переход от менее истинного к более истинному, а он осуществляется всегда через обнаружение и доказательство *contradictio in adjecto* («*внутреннего противоречия*»). Так что только непосредственная *применимость* принципа противоре-

31 ван Дален Д. Колмогоров и Брауэр о конструктивной импликации и правило противоречия // Успехи математических наук. Т. 59, вып. 2(356), 2004. С.60

32 Там же. С.60

➢ Можно объяснить разницу между подходами А.Н.Колмогорова и А.Гейтинга тем, что первый выдавал большие «*кредиты*» обычной науке, существующей на конкретном историческом промежутке времени, а второй выдавал скромные, но все-таки тоже «*кредиты*» науке, могущей сложиться в будущем. И тот, и другой доверяли свои «*кредиты*» интуитивно, но доверяли разным «*наукам*», разделенным во времени поколениями ученых.

чия была целью всего процесса формализации интуиционистской логики. Без применимости не может быть никакой доказуемости, а без доказуемости интуиционистская логика становится такой же мертвой «*бумагой*» кредитного займа, который однажды взяли, но так и не вернули формалисты. И тем удивительнее наблюдать, как современный интуиционизм поэтапно отказывается от требования применимости, т.е. от непосредственных доказательств внутренних противоречий, превращаясь лишь в более рафинированную оболочку прежнего формализма.

Далеко не случайно, что самый принцип противоречия начинает выглядеть для ряда исследователей даже сомнительным.[33] Ведь в любой формализации применимость отождествляется с импликацией логических суждений, а такое суждение как «*принцип противоречия*» оказывается вроде как пустым и незаполненным. А чтобы он и дальше оставался незаполненной *формой* суждения, достаточно просто игнорировать любое его применение.

Не сложно понять причину, по которой научное сообщество не выдает и, надо полагать, никогда не выдаст по доброй воле ни одного «*ордера*» на применение принципа противоречия. В этом принципе заключена слишком большая, слишком необузданная сила и опасность для науки, которая хотя и пользуется интуитивными озарениями, но состоит «*в официальном браке*» с формализмом, и этот брак требует исходить всегда из имеющихся средств для достижения намеченных целей.

Однако поставленные интуиционизмом задачи не могут быть решены за конечное время жизни одного человека планомерным «*движением от средств к цели*». От

33 ван Дален Д. Колмогоров и Брауэр о конструктивной импликации и правило противоречия // Успехи математических наук. Т. 59, вып. 2(356), 2004. С.59

этого как раз и отталкивался Л.Брауэр, выдвигая столь непонятное и даже, пожалуй, абсурдное для нынешней научной методологии, почти Ницшеанское, требование «*скачка от цели к средствам*». Только если подумать, сколько лет пришлось бы ждать Д.И.Менделееву, пока средствами и методами науки XIX века будет оглашен весь список «*необходимых элементов*», чтобы получить, наконец, отмашку научного сообщества на их упорядочение, то станет совершенно ясно, что сам Менделеев просто бы не дожил до такого счастливого момента, а научное сообщество могло бы еще и в наши дни спорить, сколько в списке должно быть «*необходимых элементов*».

В математике, где операции упорядочения охватывают не 50 и не 100, а порой многие миллиарды математических элементов и объектов, требование «*скачка от цели к средствам*» было с древнейших времен даже не требованием, а скорее одним из условий существования математической науки.

Например, Ж.Адамар, обнаружил минимум кривизны поверхности в гиперпространствах Римана, перескочив через «*средство*» — группу преобразований Лоренца, на основании которой строится теория относительности,[34] и он рассматривает целый ряд других подобных случаев из личного опыта. Фактически «*скачок от цели к средствам*» происходит в истории науки на каждом этапе ее развития.

Можно сказать, оба эти случая: «*движение от средств к цели*» и «*скачек от цели к средствам*», — следствие той самой первой Гильбертовой аксиомы порядка, который сам по себе возможен лишь при условии равноправия переходов как в направлении $A \to B \to C$, так в направлении $C \to B \to A$. Что выглядит как нарушение «*стрелы времени*» или перемещения информации только в одном направлении из прошлого в будущее, но поскольку в

34 Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., 1970. С.51

пространстве-времени-сознании перемещаются только интервалы, то есть только части континуальной информации, то никакого противоречия в этом нет: часть более полной информации не только может, но и должна уже содержаться на более ранних интервалах времени. И если научная методология не признает спонтанных перемещений информации из будущего в прошлое, то это говорит о противоречивости самих основ науки или о неспособности ученых *осознавать* свои знания и адекватно воспринимать свойства континуума.

Сосредоточенная медитация сознания и его расширение в область воображения или «*подсознания*» позволяют совершать преобразования, необходимые для всякой интуиции (и достаточно ясной, и содержащей высокий уровень неопределенности), возможности которой тем сильнее и тем шире, чем сильнее и шире каждое конкретное сознание способно концентрироваться и расширяться. Через эту способность, так сказать, искривлять пространство-время-сознания, и достигается озарение, заключающееся в просачивании образов, решений, идей и т.д., которые могли, как кажется со стороны, возникнуть лишь в некотором, порой, в очень отдаленном будущем.

Таким образом, интуиция не является ни прошлым, ни будущим, она не является также и настоящим, как мы его себе представляем, находясь в ситуации вполне определенной исторической эпохи и т.п.; интуиция и есть *непрерывность*, соединяющая различные интервалы или точки пространства-времени: объективного, внутреннего нейрофизиологического, математического, космологического и даже пространства мифологического или воображаемого.

На это обстоятельство обращал внимание еще Карл Густав Юнг, например, в описанном им «*эффекте скарабея*»: пациентка рассказывает о сне про золотого скарабея, и в окно кабинета влетает вполне реальный жук-скарабей.

Риман, предложив для поиска простых чисел использовать свойства ζ-функции, способной принимать действительные или мнимые значения, так и не опубликовал выражение, из которого выводятся свойства этой функции, поскольку «*не смог его достаточно упростить*».[35] И гипотеза Римана о существовании такого «*выражения*» до сих пор занимает умы многих математиков. Так что, словами Ж.Адамара, «*почти невозможно понять, как он [Риман] мог его [свойство ζ-функции] открыть, не используя частично этих [открытых позже] общих принципов*».[36]

Завуалированный вопрос Ж.Адамара можно сформулировать иначе, в более явной форме, как, например, это сделал в своем докладе Дж. Халперн: «*Допустим некто знает произведение двух (очень больших) простых чисел. В каком смысле он/она знает каждое из этих чисел, если разложение на множители может потребовать миллиарды лет вычислений?*».[37]

Подобный «*скачок*» сознания кажется совсем уж чем-то фантастическим и немыслимым. В обычной математике потому-то и возникают, словами Г.Вейля, экзистенциальные «*карты*» о существовании «*сокровищ*», не указывающие, где они находится, что в формальном подходе никто всерьез и не намерен их добывать. Но вы не можете быть шахтером, если вы никогда не спускались в шахту, не так ли? В этом смысле критика Л.Брауэра вполне убедительна, хотя даже интуиционизм не ставит задачу «*добыть все сокровища*» и не отвергает полностью экзистенциальные суждения, а предлагает хотя бы иногда их проверять конкретными построениями во избежание неистинных суждений, выдаваемых учеными с завидным упорством за истинные.

Тем не менее, в научном сообществе довольствуются тем, что наука и так уже обладает необходимыми и до-

35 Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., 1970. С.111

36 Там же. С.111

37 Артемов С.Н. Подход Колмогорова и Геделя к интуиционистской логике и работы последнего десятилетия в этом направлении // Успехи математических наук. Т. 59, вып. 2(356), 2004.

статочными знаниями, так что степень истинности или глубина знаний давно перестала волновать большинство ученых. Наука избрала для себя путь незнания, и в этом видится опасность деградации научного опыта вследствие феноменальной косности ученых и все возрастающего отрыва абстрактных знаний от непосредственного опыта. «*Наша наука с большим успехом увеличивает нашу мощь, чем наделяет нас знаниями...*», — так описывал этот тревожный симптом Юджин Вигнер,[38] связывая с низким уровнем осмысления знаний трудности при их передаче последующим поколениям.

Если Ю.Вигнер еще мог признаться, что кредит доверия к науке, осознающей лишь то, что ее возможности не безграничны, отнюдь не возрастает, а стремительно падает, то ученые XXI века вынуждены, наоборот, и дальше набирать все новые и новые кредиты, «*играя на повышение*». Наука, действительно, превратилась в банковское искусство — в искусство выдавать кредиты для того, чтобы выдавать кредиты, а банковское искусство из особой формы благотворительности превратилось — и превратилось довольно давно — в искусство порабощения.

Когда интуиция исследователя стреножена либо полностью обезножена «*научными методами*», а «*научные методы*» вырождаются в псевдонаучные, так как не обеспечивают достаточной точности и надежности оснований, то становится невозможным ни дальнейшее «*движение от средств к цели*», ни «*скачок от цели к средствам*».

Конечно, интуитивные решения о произведении двух очень больших простых чисел по Дж. Халперну или о произведении дробей *√2 • √2*, конечный базис периода которых *1,414_* также представляет собой большое или очень большое число, то есть когда речь может идти о миллиардах лет компьютерных вычислений (что само по себе налагает много практически невыполнимых условий), не говоря уже о невозможности полной записи таких чисел на клочке бумаги, ни в коем случае не следует понимать как чудесное обретение готовых, проверенных самой интуицией знаний. Тогда бы интуиционизм мало чем отличался от мистических откровений, выступающих «*символом веры*» формалистов, протягивающих пустые руки вместо «*самых несметных сокровищ*», для добычи которых под аплодисменты академического сообщества брались совершенно ошеломительные и недоступные другим направлениям кредиты.

В том-то и дело, что интуиционизм как «*скачок от цели к средствам*» требует вслед за обретением интуитивного знания вполне конструктивных построений — не туманных формальных описаний или логических доводов, которые могут служить в качестве вспомогательных средств или инструкций, а именно выполнимых за конечное время геометрических и алгоритмических построений! Несомненно, это требование оказывается невыполнимым для смелых, но интуитивно неочевидных экзистенциальных суждений, вроде той же Дедекиндовой «*точки сечения*», которая в интерпретации Кантора стала относиться не произвольно к тому или другому классу, а к классу трансфинитных, сиречь актуально-бесконечных множеств. И здесь интуиционизм оказывается в значительной мере возвращением к традиционному пониманию науки как знаний, которые должны иметь применение к действительности.

Что касается геометрического построения для дроби *√2=1,414_(707_)*, то оно уже много раз демонстрировалось.[39] Это построение, подобно другим построениям для такого рода чисел, связано с разбиением квадрата *ABCD* на дискретную решетку и нахождением элементов

38 Вигнер Ю. Этюды о симметрии. М., 1971. С.176

39 Клещев Д.С. Ключ Давида (о решении второй математической проблемы Дэвида Гильберта) // Философская мысль. №3, 2012. С.44-118

диагонального квадрата $ACEF=x^2$. Важно отметить, что сама возможность такого построения является ярким примером, подтверждающим справедливость теоремы Г.Чейтина о существовании предела для объектов Колмогоровской степени сложности, при достижении которого один и тот же с формальной точки зрения объект может быть построен разными способами, дополняющими представления об этом объекте и его свойствах.

Действительно, для обычной математики, в которой не требуется выполнять операции с очень большими числами, когда для того, чтобы задача считалась решенной, достаточно указать лишь несколько цифр десятичной последовательности, а видимость «*точных*» равенств на калькуляторе достигается с помощью программы, обрывающей вычисление на *32*-м разряде, можно использовать фиктивный алгоритм для построения $\sqrt{2}$:

$$S(ACEF) = 2S(ABCD)$$

Данный алгоритм является фиктивным, так как в нем, по сути, утверждается, что «*число 2 является квадратным*», т.е. таким же квадратным, как числа *1, 4, 9, 16*... (или $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$...). Данное утверждение о «*квадратности*» числа *2* не соответствует действительности, точнее говоря, оно является псевдоистинным, и дальше из него вытекает псевдоистинное утверждение о том, что диагональ квадрата «*несоизмерима*» с его стороной: нет построения — нет и соизмерения!

Но тогда мы должны задаться вопросом, который следует из теоремы Г.Чейтина: является ли этот фиктивный алгоритм универсальным? Другими словами, не поменяет ли совокупность знаков, описывающих $\sqrt{2}$, свои свойства, если Колмогоровская степень сложности будет увеличена?

Если свойства $\sqrt{2}$, действительно, не зависят от увеличения степени сложности, то мы полностью согласимся с выводом А.Н.Колмогорова, что в данном конкретном случае «*псевдоистинная формула является истинной*».[40] Если обнаружится, что свойства $\sqrt{2}$ находятся в зависимости от увеличения длины совокупности знаков, то мы согласимся с выводом Г.Чейтина о существовании в данном случае предела сложности, и тогда утверждение о том, что «*псевдоистинная формула*» $S(ACEF)=2S(ABCD)$ является «*истинной*», придется отвергнуть.

При разбиении квадрата *ABCD* на дискретную решетку, в самом деле, можно найти принципиально другой алгоритм для построения $\sqrt{2}$:

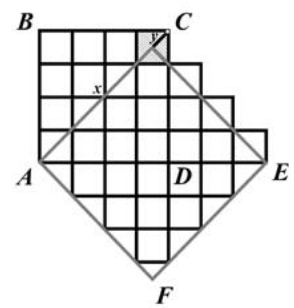
$$S(ACEF) = 2S(ABCD)-(2(AB)-1)$$

или

$$x^2 = 2n^2-(2n-1),$$

где n — число элементов, из которых состоит сторона квадрата *ABCD*.

То есть, если мы используем десятичные дроби, совсем не обязательно сводить отношение площади *S* квадрата *ACEF* к *целочисленному* значению *2S (ABCD)*, что само по себе не имеет смысла, ведь *2* — число не квадратное. На самом деле достаточно найти разбиение $x^2=1414\_$, такое что его можно повторить для каждого *n-го* элемента диагонали. Тогда при $n \to \infty$ мы перейдем к периодической десятичной дроби $\sqrt{2}=1{,}414\_(707\_)$...



Такое разбиение для $n = 4$ выполняется не за миллиарды лет, а за пару мгновений. Так, диагональный квадрат *ACEF* равен $25=5^2=x^2$. А значит, предел при $n \to \infty$ становится периодически повторяющейся последовательностью.

Мы получили два алгоритма: один из них является фиктивным, так как

40 Колмогоров А.Н. О принципе tertium non datur // Избранные труды. М., 1985. С.62

из него можно получить некорректное высказывание, что «*число 2 является квадратным*»; другой позволяет обойти это некорректное высказывание, поскольку из него следует, что $x^2 = 1414\_ = 199\_800\_1$. Во втором случае мы получаем не фиктивный квадрат, которому в обычной математике не соответствует никакого построения, а именно квадратное число.

Причем как раз в режиме построения такого квадратного числа *199_800_1* и находится каждый шаг приближения в дроби $\sqrt{2}=1,414...$:

$$1,41^2 = 1,9\_881$$
$$1,414^2 = 1,99\_9396$$
$$1,4142^2 = 1,999\_96164$$
$$1,41421^2 = 1,9999\_899241$$
$$1,414213^2 = 1,99999\_8409369;$$
$$1,4142135^2 = 1,999999\_82358225;$$
$$1,41421356^2 = 1,9999999\_932878736 \text{ и т.д.}$$

Если бы десятичное значение $\sqrt{2}=1,414...$ было непериодическим, как утверждается в псевдоистинной математике, то на каждом шаге мы бы получали хаотичный набор из девяток и *не*-девяток. В реальности мы получаем такое число девяток, которое указывает на приближение к разрядности числа *199_800_1*. При подробном изучении выявляется целый ряд других свойств числа $\sqrt{2}=1,414...$, которыми могут обладать только периодические десятичные дроби.

Иначе говоря, свойства $\sqrt{2}$ зависят от длины совокупности знаков. В так называемой обычной математике, конечно, это не так уж и важно: многие результаты псевдоистинной математики будут походить на результаты истинной (или, скажем точнее, более истинной математики). Но такие свойства как «*периодичность*» или «*непериодичность*», «*рациональность*» или «*иррациональность*» будут иметь критическое значение, если требуется обосновать непрерывность континуума или сходимость последовательности $\sqrt{2}^2=1,414...^2$ к значению числа *2*.

В XIX веке профессор Леопольд Кронекер, как известно, резко выступавший против теории множеств, предупреждал о ненадежности выводов анализа, неподтвержденных арифметически: «*Скоро арифметика покажет настоящие точные пути анализу и убедит в неверности всех тех умозаключений, с которыми работает современный, так называемый, анализ*».[41] Выдающийся математик Вейерштрасс на старости лет был буквально доведен до слез такими замечаниями Кронекера.[42]

Но в начале XX века, действительно, появилось направление интуиционизма, которое подвергло радикально глубокой критике основания математической науки. В ответ на эту малоприятную для математиков критику Д.Гильберт мог ответить только следующее: «*То, что делают Вейль и Брауэр, есть ни что иное как возрождение идей Кронекера! Они стремятся спасти математику, выбрасывая за борт все то, что причиняет беспокойства... Если бы мы приняли реформу, которую они предлагают, то подверглись бы риску потерять большую часть наших самых ценных сокровищ*».[43]

Послушайте, ну, так где они, эти пресловутые «*самые ценные сокровища*»? Что считать «*сокровищем*»? Фиктивные доказательства, в которых искусственно вводятся исключения и ограничивается выбор алгоритмов? Тогда «*сокровищем*» следует считать и, например, следующее псевдоистинное доказательство «*неделимости единицы*»: ограничим алгоритм делением только на единицу, тогда, разделив единицу, получим *1/1=1*, следовательно, «*единица неделима*». Можно смеяться или плакать, но такая схема нередко используется в фиктивных доказательствах «*обычной математики*» и теории множеств.

➢ Эти два условия: искусственное исключение и ограничение выбора алгоритма, — являются условиями для применения двойных стандартов, столь распространенных в наши дни в международной политике и в масс-медиа, создающих фейковые новости, фейковую историю и фейковое общественное сознание.

41 Васильев А.В. Вступительная статья «От Евклида до Гильберта» // Д.Гильберт. Основания геометрии. Петроград, 1923, С.XXIV

42 Рид К. Гильберт. М.,1977. С.40

43 Рид К. Гильберт. М.,1977. С.202

Не случайно весь этот список «*сокровищ*», перечисленных Д.Гильбертом в 1922 году на собрании математиков в Гамбурге, начинается с «*общего понятия иррационального числа*». Как было показано выше, именно в «*классических иррациональностях*» квадратичных, кубических и др. возникает парадокс ~ρ=ρ, для исключения которого периодические дроби с периодом *(9)* были наделены еще более сомнительным свойством ?ρ «*не рациональности*», лишь заменившим один парадокс другим ?ρ=ρ.

Пытаясь отстоять сложившуюся «*общепризнанную*» математику, Д.Гильберт заявлял: «*Насколько у Кронекера было мало шансов упразднить иррациональные числа... настолько же маловероятен и успех Вейля и Брауэра. Брауэр не представляет собой революцию, как это считает Вейль, — только повторение попытки организовать Putsch*».[44]

Но историк науки может задаться вопросом: а когда же в действительности произошел первый «*математический путч*»? И ответ вновь оказывается не в пользу школы формалистов. Ведь самый первый «*математический путч*» произошел как раз во времена Пифагорейского братства (V в до н.э.), когда математик Гиппас получил свое знаменитое псевдоистинное доказательство «*несоизмеримости*» стороны и диагонали квадрата.

В отличие от нынешних формалистов, назвавших это доказательство «*наилучшим классическим примером рассуждения от противного в математике*»,[45] в античности вокруг этой теоремы развернулась ожесточенная борьба. Пифагорейцы отказывались ее признавать, так что Гиппас был изгнан из Пифагорейского братства, после чего он примкнул к зачинщикам Кротонского погрома.[46]

44 Рид К. Гильберт. М.,1977. С.204

45 Бурбаки Н. Теоря множеств. М., 1965. С.300

46 Ямвлих. Жизнь Пифагора / Под ред. В.Б.Черниговского. М., 1998. С.150

По этическим соображениям об этом не принято говорить, но после физической расправы над пифагорейцами во время Кротонского бунта Гиппас и его сторонники оказались носителями «*единственно истинной математики*», согласно которой диагональ была несоизмерима на том основании, что единица считалась неделимым числом.[47] Означает ли это, что мы и теперь должны относить античную аксиому неделимости единицы к «*самым ценным сокровищам*» математики?

Ведь на дворе уже XXI век, и ссылки на авторитет Платона и Аристотеля,[48] признававших аксиому неделимости единицы и, следовательно, теорему Гиппаса, оставленные нам самим Кантором,[49] уже не выглядят столь убедительными. По крайней мере, для интуиционистов.

Если математики хранят на борту своего корабля тайную доктрину о «*неделимости*» единицы, а сами занимаются ее делением, используя десятичные дроби, то в таком корабле зияют чудовищно большие дыры! По словам Д.Гильберта, «*если какому-нибудь понятию присвоены признаки, которые друг другу противоречат, то... это понятие математически не существует*».[50] Следовательно, в псевдоматематике, которую в учебниках преподносят как «*истинную науку*», отсутствует даже понятие «*единица*». Вы, конечно, можете плыть куда угодно на таком корабле, но только в своем воображении, пока ваш «*корабль*» не спустили на воду.

Кризис оснований математики, разразившийся в конце XIX — начале XX века и продолжающийся вплоть до наших дней, не является поэтому результатом обнаружения одних лишь пародоксов теории множеств Георга Кантора, как об этом сообщается во всех монографи-

47 ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. М., 1959. С.69

48 Аристотель. Сочинения в четырех томах. М., 1981, ТIII. С.120

49 Кантор Г. К учению о трансфинитном // Труды по теории множеств.М., 1985. С.273

50 Гильберт Д. Математические проблемы. М., 1969. С.26

ях по философии математики. Настоящие корни этого кризиса уходят в античность, а по большому счету — в псевдоистинную теорему Гиппаса, поставившую задачу о построении заведомо несуществующего «*квадратного числа 2*», хотя за рамками «*общепризнанной*» системы типа $\mathfrak{R}$ существует вполне конструктивное решение.

Подход к решению этой проблемы, как мы видели, невозможен без первой аксиомы порядка Гильберта, так что интуиционизм не предлагает и не предлагал «*разрушать до оснований*» здание математики. Интуиционизм убедительно совмещает в себе атомистическое восприятие с восприятием континуальным через понятие интервала — и такое взаимодействие двух понятийных аппаратов характерно не только для основ математики, оно лежит в основе самого феномена сознания как сопряжения «*левостороннего*» и «*правостороннего*» мышления.

Что же касается формализма, то он оказывается лишь оторвавшейся от правого полушария частью общей интуиционистской математики — сиречь возгордившимся *интеллектом*, вкусившим плоды познания и отпавшим от истины, решив подменить собой бесконечный и безначальный *Разум*. Истинная математика — та и только та, что открывается нам в глубинах сознания, ибо никакой другой математики, равно как понятий о казуальных связях мира, включая понятие о времени и пространстве, вне мышления и сознания не существует и существовать не может. В этом смысле Л.Брауэр — это и спустя сто лет революция, а теорема Гиппаса — противоречие и кризис даже спустя две с половиной тысячи лет!

Здесь легко угадывается аллюзия на слова Д.Гильберта: «*Никто не сможет изгнать нас из трансфинитного рая, открытого Кантором*».

В интуиции человека заложены поистине неисчерпаемые возможности — способность находить решения, для которых потребовались бы миллиарды и миллиарды лет вычислений, немыслимые количества энергии и ресурсов. И хотя интуиция человека, как показывает история науки, не всегда оказывается источником надежных знаний — это единственный источник новых знаний и открытий, которым мы, в конечном счете, располагаем.

Камень наш подобен человеку,
его телу, душе и духу

Междисциплинарное периодическое издание
«De Lapide Philosophorum».
Дата публикации 09.06.2017.
Адрес редакции: www.de-lapide-philosophorum.umi.ru
Почтовый адрес: de.lapide.philosophorum@gmail.com
ISSN 2409-1022