Окружности Вилларсо и расслоение Хопфа

Арсений Акопян

Французский математик и астроном Ивон Вилларсо (1813—1883) заметил, что на торе помимо двух стандартных семейств окружностей (рис. 1) существует еще два неожиданных семейства, возникающие при сечении тора дважды касающейся его плоскостью (рис. 2). Теперь такие окружности называются *окружностями Вилларсо*, о них и пойдет речь в этой статье.

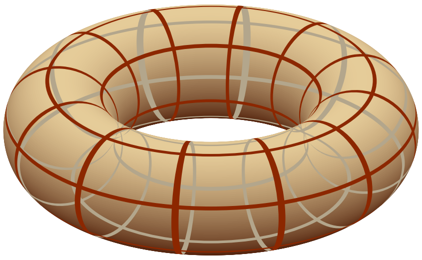

Рис. 1. Окружности на торе

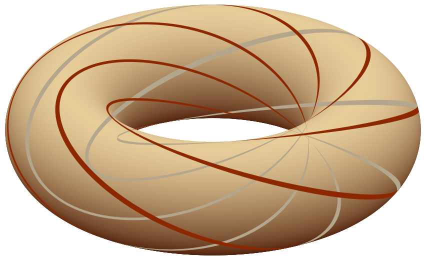

Рис. 2. Окружности Вилларсо

Что такое тор?

Тор — это фигура, похожая на поверхность бублика. С таким определением не очень удобно что-либо доказывать, поэтому дадим строгое определение. *Тор — это поверхность, получающаяся при вращении окружности (образующей) относительно прямой (оси) лежащей в плоскости этой окружности* (рис. 3). Если образующая окружность пересекает ось или касается её, тор будет иметь точки самопересечения (рис. 4) — кроме случая, когда ось проходит через центр образующей окружности (тогда при вращении получится сфера).

Мы будем изучать только случай, когда образующая окружность не пересекает ось — т. е., когда получается, так сказать, тор с дыркой.

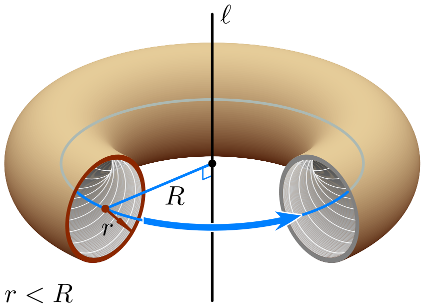

Рис. 3. Тор как поверхность вращения

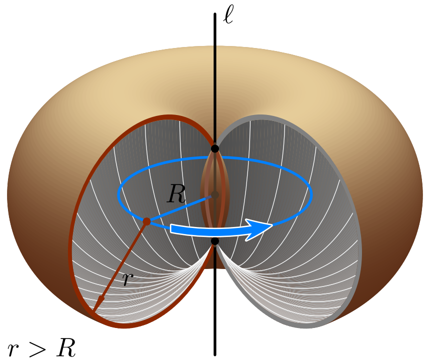

Рис. 4. Тор с самопересечениями

Назовём окружность, по которой двигается центр образующей окружности, *осевой окружностью*. Далее мы будем обозначать через R радиус осевой окружности, а через r — радиус образующей.

Тор можно определить как множество точек на фиксированном расстоянии от осевой окружности.

Упражнение 1. Пусть на плоскости лежит тор, у которого радиус образующей окружности равен 1, а радиус осевой окружности равен 4. На тор положили сферу так, что она коснулась плоскости. Чему равен радиус сферы?

Упражнение 2 (спортивный набор)**.** В цилиндрическую коробку положили теннисный мяч, на него — эспандер (резиновое кольцо в виде тора), и сверху — такой же мяч. Все три предмета вплотную прилегают к поверхности коробки и касаются друг друга. Во сколько раз ширина коробки больше толщины эспандера?

Упражнение 3. В торе, сделанном из резины, вырезали маленькую дырочку. Можно ли его вывернуть наизнанку?

Существование окружностей Вилларсо

Если разрезать тор плоскостью a, проходящей через его ось, то мы увидим две окружности радиуса r, центры которых находятся на расстоянии R от оси. К этим двум окружностям можно провести две общие внутренние касательные. Плоскость s проходящая через одну из этих касательных и перпендикулярная a, можно назвать *дважды касающейся тора*. Оказывается, что *плоскость s пересекает тор по двум окружностям* (рис. 5). Давайте покажем это.

Обозначим центр осевой окружности через O, а плоскость её содержащую через b. Отметим, что синус угла между плоскостями s и b равен r/R. Обозначим этот угол за α (рис. 6). Через P_1, Q_1, Q_2 и P_2 обозначим точки тора, лежащие на прямой образующейся при пересечении плоскостей s и b. Пусть ω — это окружность, лежащая в плоскости s и построенная на диаметре P_1Q_2, длина этого диаметра равна

$$OQ_2 + OP_1 = R - r + R + r = 2R.$$

Нам надо показать, что эта окружность лежит на поверхности тора.

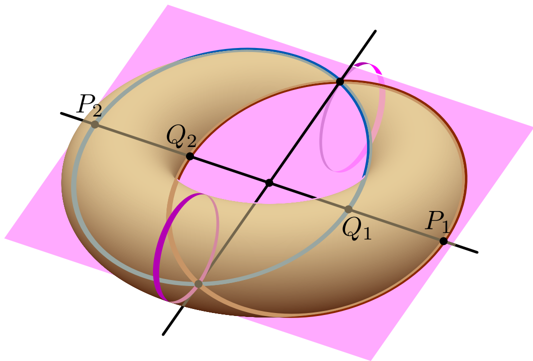

Рис. 5. Дважды касающаяся плоскость

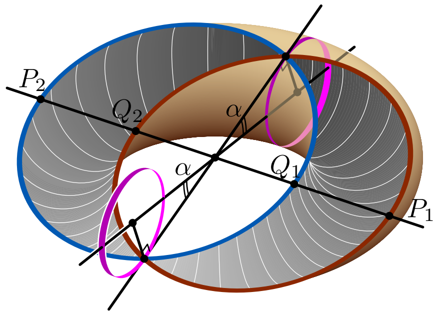

Рис. 6. Сечение тора дважды касающейся плоскостью

Обозначим через O_ω её центр (рис. 7, мы немного повернули тор на этом рисунке, чтобы сделать более наглядными дальнейшие рассуждения). Пусть X — произвольная точка на этой окружности, X_1 — её проекция на плоскость b.

Продлим луч OX_1 до пересечения с осевой окружностью тора в точке, которую обозначим O_x. Пусть ω_x — образующая окружность тора с центром в O_x. Заметим, что

$$|OO_\omega| = |O_\omega Q_2| - |OQ_2| = R - (R - r) = r.$$

Пусть T — проекция точки X на диамер P_1Q_2, O_1 — проекция точки O на XO_ω. Тогда $\angle XTX_1 = \alpha$, откуда

$$\begin{aligned}|XX_1| = |XT| \cdot \sin\alpha = |O_\omega X| \cdot \sin\angle XO_\omega O \cdot \sin\alpha = R \cdot \sin\alpha \cdot \sin\angle XO_\omega O = \\ = r \cdot \sin\angle XO_\omega O = OO_\omega \sin\angle XO_\omega = |OO_1|.\end{aligned}$$

Таким образом, прямоугольных треугольниках OXX_1 и XOO_1 равны (по гипотенузе и катету), откуда $\angle OXO_\omega = \angle XOO_x$. Тогда равны треугольники OXO_ω и XOO_x — по двум сторонам (OX — общая, $OO_x = O_\omega X = R$) и углу между ними. Отсюда $|O_xX| = |O_\omega O| = r$, т. е. точка X лежит на торе, что и необходимо было показать.

Аналогично доказывается, что окружность, лежащая в плоскости s и построенная на диаметре P_2Q_1, также лежит на торе. (Строго говоря, мы показали только, что в пересечении плоскости s и тора есть две окружности, а то, что лишних точек в этом пересечении нет, более-менее очевидно.)

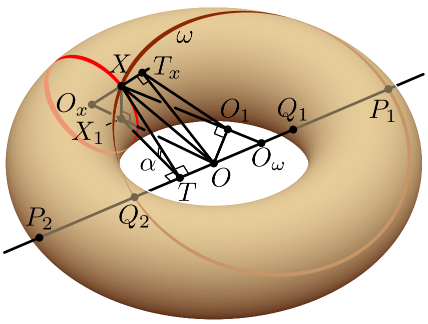

Рис. 7.

Итак существование окружностей Вилларсо доказано. Докажем, что *окружность Вилларсо пересекают все образующие под одним и тем же углом равным* $90^\circ - \alpha$.

Угол между пересекающимися окружностями определяется так: надо провести в точке пересечения к каждой окружности касательную; угол между этими касательными и есть угол между окружностями. Итак, на рисунке 7 изображены такие окружности, пересекающиеся в точке X: коричневая окружность Вилларсо и красная образующая окружность.

Касательная к окружности в данной точке перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку. Поэтому отрезок OO_1 параллелен касательной к коричневой окружности. Опустим перпендикуляр OT_x на продолжение радиуса O_xX — он будет параллелен касательной к красной окружности. Тогда угол между нужными нам касательными равен углу T_xOO_1. Докажем, что треугольник T_xOO_1 равен треугольнику TXX_1s — мгновенно следует нужное равенство $T_xOO_1 = 90^\circ - \alpha$.

Для этого рассмотрим тетраэдр $XOO_\omega O_x$. Заметим, что этот тетраэдр переходит в себя при повороте на 180° относительно прямой проходящей через середины OX и O_xO_ω. Получаем, что перпендикуляры, опущенные из O на XO_ω и O_xX, при этом повороте перейдут в перпендикуляры, опущенные из X на O_xO и $O_\omega O$ соответственно, т. е. при таком повороте треугольники T_xOO_1 и TXX_1 перейдут друг в друга, а потому они равны.

Теперь расскажем об интересных конструкциях, в которых участвуют окружности Виллларсо.

Расслоение Хопфа

То что существует расслоение трёхмерной сферы над двумерной сферой со слоем-окружностью было обнаружено Хайнцем Хопфом (1894–1971) в 1931-ом году и является очень важным результатом в математике. Мы не будем говорить здесь, что такое расслоение, а просто опишем эту замечательную конструкцию.

Четырехмерная пространство и трехмерное сфера

Как мы знаем, точки трехмерного пространства, можно определить их декартовыми координатами (x, y, z). При этом расстояние между двумя точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) определяется с помощью теоремы Пифагора и равно:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Четырехмерное евлкидово пространство аналогично трехмерному, только теперь точки определяются четырьмя координатами (x, y, z, t) и расстояние между (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) теперь равняется:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (t_1 - t_2)^2}.$$

Трехмерной сферой[1] в четырехмерном пространстве называется множество точек находящихся на расстоянии R от некоторой фиксированной точки O (пусть её коорди-

[1]Сфера называется трехмерной, потому что любой её маленький кусок выглядит как кусок трехмерного пространства, точно так же, как маленький кусочек обычной двумерной сферы, очень похож на кусок плоскости.

наты это (x_0, y_0, z_0, t_0)). Давайте напишем её уравнение:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (t - t_0)^2 = R^2.$$

Это скорее всего выглядит странным, определять пространство через четверки чисел, а сферу, как множество точек удовлетворяющих некоторому уравнению. Как себе представить такое? Наверное каждый математик решает этот вопрос по-своему и создает у себя в голове своё представление об этих объектах. Возможно следующие упражнения помогут вам развить некоторую интуицию связанную четырехмерным пространством.

Упражнение 4. а) Покажите, что прямая пересекает трехмерную сферу по двум точкам, либо касается её, либо не пересекается с ней вовсе.
б) Подумайте «как выглядит» двумерная и трехмерная плоскость в четырехмерном пространстве.
в) Исследуйте вопрос, как могут пересекаться между собой прямая, двумерная плоскость и трехмерное подпространство.
г) Как пересекается трехмерная сфера и двумерная и трехмерная плоскость?
д) Как пересекаются две трехмерные сферы?

Упражнение 5. а) Найдите длины диагоналей четырехмерного куба, ребра которого имеют длину 1?
б) Чему равен радиус описанной вокруг этого куба сферы? Чему равен радиус сферы касающийся всех его ребер?

Зацепленные окружности

Назовём окружности в пространстве *зацепленными*, если одна из них проходит через диск, который образует вторая окружуность. Иначе говоря, если бы они были сделаны из проволоки, то два обазовавшихся кольца нельзя было бы отделить друг от друга, не разрезав одно из них (рис. 8).

Рис. 8. Зацепленные окружности

Рис. 9. Зацепленные окружности Вилларсо. Фото Д. А. Рихтера.

Легко видеть, что две окружности Вилларсо, принадлежащие одному семейству на торе, как раз являются такими зацепленными окружностями (рис. 9).

Оказывается трёхмерную сферу можно разбить на зацпленные окружности, причем с помощью окружностей Вилларсо можно описать конструкцию, при которой все такие окружности будут большими кругами на сфере (то есть плоскости их содержащие будут проходить через центр сферы).

Упражнение 6. Подумайте, почему двумерную сферу нельзя разбить на окружности (не обязательно равные)?

Мы начнем с более привычного нам трёхмерного пространства. Отметим в нем прямую ℓ и на какой-нибудь полуплоскости с границей ℓ нарисуем семейство окружностей заметающих эту полуплоскость (рис. 10).

Вращая эти окружности вокруг ℓ мы получим семейство торов (один внутри другого и все они нанизаны на окружность — вырожденный тор), которые покрывают всё пространство за исключением прямой ℓ. Если каждый из этих торов разбить на семейство окружностей Вилларсо, то мы получим, что разбили трёхмерное пространство без прямой на зацепленные окружности (рис. 11).

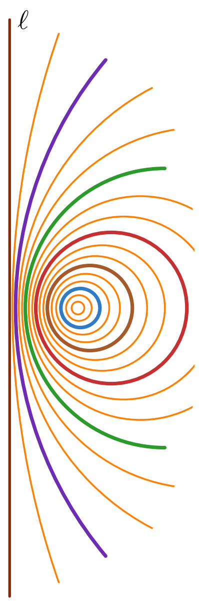

Рис. 10. Окружности заметающие полуплоскость

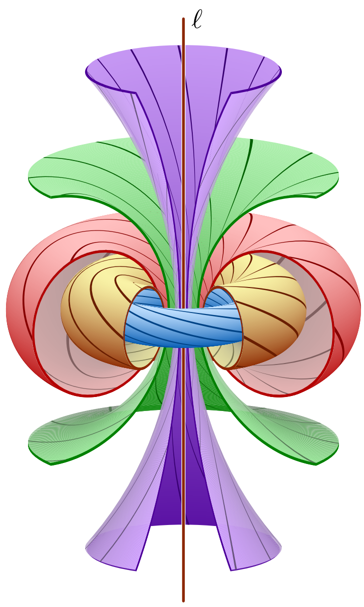

Рис. 11. Разбиение пространства на попарно зацепленные окружности и прямую

Трёхмерное пространство можно превратить в трёхмерную сферу с помощью стереографической проекции. Тогда вышеописанная конструкция перейдет в то самое расслоение Хопфа.

Стереографическая проекция — это способ изображать сферу в пространстве. На рис. 12 изображена стереографическая проекция двумерной сферы на плоскость. Мы провели плоскость через экватор сферы и каждой точке X на сфере сопоставили точку на плоскости, в которой прямая NX пересекает эту плоскость. Где N — это наиболее удалённая от плоскости точка на сфере. При этом, подразумевается, что сама точка N

соответствует «бесконечно удалённой» точки плоскости. Удивительным фактом является то, что при стереографической проекции окружности на сфере переходят в окружности на плоскости (кроме окружностей проходящих через N — они переходят в прямые). Подробнее об этом можно почитать в книге Г. С. М. Коксетера и С. Л. Грейтцера «Новые встречи с геометрией» или Б. А. Розенфельда и Н. Д. Сергеева «Стереографическая проекция» (серия «Популярные лекции по математике», вып. 53. М.: Наука, 1973).

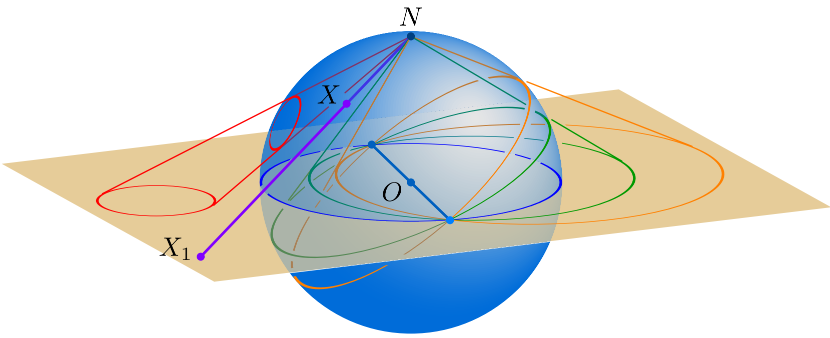

Рис. 12. Стереографическая проекция

С трёхмерной сферой ситуация является абсолютно аналогичной, просто её сложно изобразить также просто как и на рисунке 12: надо в четырёхмерном пространстве нарисовать трёхмерную сферу и отобразить её с помощью лучей NX в трёхмерное пространство проходящее через центр этой сферы. Можно сделать и обратное отображение.

Тогда вышеописанная конструкция из зацепленных окружностей в пространстве перейдет в конструкцию из зацепленных окружностей на трёхмерной сфере, при этом сама прямая ℓ тоже будет соответствовать некоторой окружности! Таким образом мы замостили всю сферу попарно зацепленными окружностями.

Можно ли сделать все окружности равными?

Оказывается, при правильно подобранной стереографической проекции можно добиться того, чтобы все окружности были равными.

Какие окружности при стереографической проекции соответствуют большим окружностям сферы (плоскость которых содержит центр сферы)? Ответ довольно прост. Если считать, что радиус сферы будет равен 1, а начало координат обозначить через O, то такие окружности можно описать как окружности плоскость которых проходит через O и *степенью точки O относительно них равна* -1^2. Это хорошо видно на рис. 12 — на окружности обязательно найдется точка на расстоянии 1 от O. Точка симметричная ей относительно O тоже должна лежать на этой окружности (из-за условия степени точки).

[2]Напомним, что степень точки P относительно окружности с центром в O радиуса R называется величина $|PO|^2 - R^2$. Полезным свойством степени точки, является то, что если P лежит на хорде AB окружности, то величина $|AP| \cdot |BP|$ равна степени точки P (взятая с отрицательным знаком, если P внутри окружности). Подробнее о степени точки и как её использовать при решении задача можно почитать в книге В. В. Прасолова «Задачи по планиметрии».

При стереографической проекции эти точки остаются на месте и переходят в противоположные точки на сфере, поэтому окружность должна перейти в большую окружность на сфере.

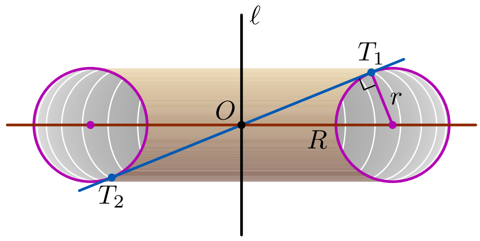

Рис. 13.

Можно подобрать такие торы, чтобы их окружности Вилларсо удовлетворяли этому требованию. Посмотрим на рис. 13 на котором изображено сечение тора плоскостью проходящей через ось. Из него видно, что O лежит на отрезке T_1T_2, соединяющем точки касания плоскости и тора. Поэтому степень O относительно окружности Вилларсо равна $-|OT_1|\cdot|OT_2| = -|OT_1|^2$. Таким образом, нам достаточно потребовать, чтобы степень точки O относительно образующих торов была равна 1. Этого несложно добиться. Для этого достаточно рассмотреть семейство образующих окружностей, центры которых лежат на перпендикуляре к ℓ в точки O и для которых выполнено соотношение $R^2 - r^2 = 1$, где r и R, это как и раньше, радиус образующей окружности и расстояние от её центра до точки O.

Расслоение Хопфа обладает массой других замечательных свойств и, конечно, имеет множество обобщений. Раздел математики занимающийся такого рода вопросами называется алгебраической топологией. Топология полна других интересных конструкций, которые одинаково удивляют как школьников так и специалистов в этой области. Читателю, заинтересовавшемуся этой темой, мы рекомендуем книги В. В. Прасолова «Наглядная топология» или В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича под тем же названием, в которых есть несколько других интересных примеров и описаны базовые понятия и теоремы топологии.

Ну и напоследок, подумайте на следующим вопросом.

Упражнение 7. Можно ли обычное трехмерное пространство разбить на окружности (не обязательно равные)?

Автор крайне благодарен М. Ю. Панову за подготовку иллюстраций к статье. Выражаю также признательность В. Ю. Протасову за помощь в подборе и формулировке упражнений и В. А. Тиморину, С. А. Дориченко, Е. М. Епифанову за ценные замечания.