

Ерохов И.В.

Структура графа электрической цепи и ее использование при моделировании схем

Научно-техническое эссе

2018 -2021

г. Запорожье

Внимание: Книга содержит научное открытие.

Игорь Васильевич Ерохов закончил эту книгу за 11 дней до смерти.
Публикуется в авторской редакции.

Благодарность Мордовкиной Валентине Михайловне.

Оглавление

Введение.....	4
1. Контур – простейшая структура электрической цепи	7
2. Законы Кирхгофа и математическое описание сложных электрических цепей.....	20
3. Раздельное использование системы уравнений Кирхгофа	34
4. Уравнение баланса мощностей электрической цепи.....	47
5. Особый случай уравнения баланса мощностей электрической цепи	56
6. Первое обращение к структуре при решении уравнений цепи	72
7. Структура цепи и вычисления определителей.....	84
8. Структура решений системы алгебраических уравнений.....	103
9. Метод Гаусса и решение систем уравнений с помощью цепных дробей.....	113
10. Структура схемных функций электрической цепи.....	126
11. Числовой индекс графа и его частей.....	140
12. Структура цепи и характеристический полином	154
13. Аксиоматический подход к изучению структуры цепей.....	164
14. Принцип взаимности и теорема Зеляха-Теллегена.....	175
15. Скрытая структура числа	182
16. Особенности численных методов решения	192
17. Переменные электрической цепи как понятие	207
18. Переменные состояния.....	217
19. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ПРИ РАСЧЕТЕ	224
20. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	238
Литература	242
Ерохов Игорь Васильевич (12.08.1939-11.05.2021)	247
1. В.В. Фролов, К 80-летию Ерохова И.В., сборник «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» Ульяновского государственного технического университета	247
2. Страница автора на сайте «Академия Тринитаризма»	253
Контакты	255

Введение

Электрические явления наблюдались людьми веками и достаточно долго изучались. В этом ряду надо числить проявления атмосферного электричества и явление электризации диэлектриков трением. Надо отметить, что статическое электричество изучалось с привлечением математических методов и дало много нового для понимания его природы. Но только неожиданное открытие контактной разности потенциалов, возникающая при совмещении различных по свойствам металлов, дало возможность создать реальный источник электричества. Основываясь на этом открытии, был сконструирован вольтов столб – источник постоянного тока.

Изучение «гальванического» электричества привело к бурному развитию всех «электрических» наук. Возникали новые термины, которые обозначали объекты исследования: электрический ток, электрическое напряжение. Они вызывали истинное удивление исследователей, т.к. объект изучения, например электрический ток, существовал только в замкнутой цепи. При разрыве цепи он удивительным образом «исчезал». Чтобы наблюдать этот объект дольше, В. Петров и Г. Ом, независимо друг от друга, стремились усовершенствовать вольтов столб, так как без надежного источника энергии опыты теряли смысл [1], [2]. Удача сопутствовала Петрову, который преобразовал вертикальный вольтов **столб** в горизонтальное **бревно** Петрова и получил источник с напряжением в несколько тысяч вольт. Только поэтому ему удалось открыть электрическую дугу.

И Петров, и Ом исследовали простейшую электрическую цепь – контур. Отметим, что Ом не ограничился простым контуром, содержащим один элемент и источник. Увеличивая число элементов контура, он стремился описывать каждый из них математически. Теория статического электричества предпочитала геометрический язык описания явлений как наиболее понятный. Г. Ом продолжил традицию и описал сложный контур геометрически с помощью потенциальной диаграммы. Однако никто из пионеров изучения гальванического электричества не поднялся на достаточный уровень общности, чтобы понять главное – условием существования электрического тока в схеме является наличие связной структуры электрической цепи.

Заполнить этот пробел они предоставили Г. Кирхгофу [3], [4]. В своей первой научной статье он сформулировал свои знаменитые законы, которые расположил в конце текста, в примечании [3]. В следующей статье [4] ученый применил эти уравнения для описания электрической цепи произвольного размера. Стоит отметить, что в этой статье Кирхгоф впервые изобразил электрическую схему с помощью графа.

Даже Максвелл не понял значения уравнений Кирхгофа, считая, что первый закон очевиден и не нуждается в доказательстве, а второй закон открыт Г. Омом. Кирхгоф сформулировал законы электрических цепей в форме математических утверждений, каждое из которых доказывается как теорема (*der Satz*). Уравнения Кирхгофа описывают фрагменты структуры электрической цепи, т.е. контура и узлы. В дальнейшем, ветви узлов и контуров были определены как схемные множества, что закрепило за ними роль элементов структуры цепи [5].

Простые уравнения, записанные в упорядоченной форме, содержали еще один сюрприз. Надо отметить, что к моменту написания статьи [4] понятие матрицы еще не было сформулировано, однако в упорядоченной записи систем уравнений ее можно было увидеть. Даже матрицы инцидентий просматривались в записи систем уравнений благодаря введению коэффициентов α . Для этого было достаточно подставить численные значения этих коэффициентов, которые Кирхгоф задал множеством всего из трех членов: 0, 1, -1. Каждое из чисел фиксировало факт отсутствия или наличия (с разным знаком) слагаемых в любом уравнении Кирхгофа.

В современной теории электрических цепей матрицы контурных $[B]$ и узловых $[A]$ инцидентий стали привычными математическими объектами. Их используют для записи структуры электрической цепи при «ручном» и «машинном» составлении уравнений математической модели электрической (электронной) схемы. В транспонированном виде они могут служить тензорами, связывающими, например, напряжения (потенциалы) узлов и напряжения ветвей, значений контурных токов и токов ветвей [6].

Роль структуры электрической цепи при построении математической модели сегодня является общепризнанной, а ролью структуры при нахождении решений системы уравнений исследователи обычно не интересуются. Без сомнения, логично ожидать, что решения системы

уравнений структурированного объекта должны отражать структуру его математической модели. Однако, численные методы, применяемые сегодня при решении систем дифференциальных уравнений, не способствуют таким исследованиям, т.к. считается, что главное получить численные значения переменных, а остальное никого не должно интересовать. Напомним, что любое число имеет свою структуру, которую просто надо уметь вскрыть.

Настоящая работа является попыткой обратить внимание специалистов на исключительную роль структуры как при составлении системы уравнений электрической цепи, так и при ее решении.

1. Контур – простейшая структура электрической цепи

«С возникновением *абстракций* только ведь и начинается *наука*».

Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Несмотря на то, что ученые-физики, изучающие электрические явления, строили теорию электричества на прочном фундаменте точно установленных фактов, применение математического аппарата не всегда считалось обязательным. Например, для решения задач электростатики математику применяли давно и успешно. Это считалось само собой разумеющимся, т.к. применение геометрии делало процесс решения наглядным. Однако с открытием «гальванического» электричества возникла проблема в математическом описании движения носителей заряда. Применять геометрический подход к решению новых задач тогда затруднялись. Мало того, большинство ученых считали, что само «гальваническое» электричество является, всего лишь, физическим феноменом, не имеющим практического значения.

Явление возникновения разности потенциалов при контакте разных металлов было открыто Луиджи Гальвани в 1786 году. Ученый описал процесс сокращения свежепрепарированной мышцы, закрепленной на **медных** крючках при прикосновении **стального** скальпеля. В сокращении мышцы Гальвани видел проявление «животного электричества». В 1800 году Алессандро Вольта, проверяя опыты Гальвани, создал гальванический элемент, а затем – батарею гальванических элементов, т.е. вольтов столб. Русский академик В.В. Петров в 1802 году изменил положение столба, расположив его горизонтально, что дало ему возможность создать самый мощный источник электричества того времени.

По свидетельству В.В. Петрова в России вольтовые столбы создавались кем угодно и без каких-либо расчетов, так как элементы конструкции столба можно было купить почти в каждой лавке Москвы и Санкт Петербурга [1]. Любознательные граждане собирали дома источники «гальванического» электричества, дабы повторить известные опыты Луиджи Гальвани с препаратами, полученными от разных животных. Все казалось простым и доступным, у общества не было запроса на серьезный, научный анализ «гальванических» процессов.

С учетом сказанного выше, можно в полной мере оценить смелость Георга Ома, который назвал свою монографию буквально вызывающе: **«Гальваническая цепь, описанная математически»** [2]. Книга была издана в Берлине в 1827 году и стала первой научной публикацией, которая восстанавливала роль математики при изучении электрических явлений. Ученый строил свою теорию на основании экспериментальных данных, полученных в результате собственных измерений. Свои опыты он считал продолжением исследований Шарля Огюста де Кулона, который с помощью крутильных весов измерил силу взаимодействия электрических зарядов.

Выбор измерительных приборов для экспериментов у Ома был небольшой, так как в начале девятнадцатого века электроскоп был, пожалуй, единственным «серийным» прибором, которым можно было фиксировать наличие потенциала. Принцип работы электроскопа, как и крутильных весов, основан на свойстве взаимодействия электрических зарядов. Главному элементу прибора – металлическому стержню – сообщался заряд, лепестки из бумаги, а иногда из золотой фольги, имеющие со стержнем шарнирное соединение, также получали часть этого заряда. В результате известного свойства взаимодействия зарядов одного знака лепестки отклонялись от исходного положения на определенный угол. По шкале, укрепленной за стержнем, можно было установить численное значение угла, размер которого связывали с величиной **«электроскопической силы»**.

Электроскоп имел металлический корпус, который можно было соединять либо с Землей, либо с общим узлом схемы. В зависимости от этого измеренную величину можно было трактовать либо как потенциал относительно Земли, либо как потенциал относительно общего узла схемы.

Крутильные весы Кулона работают на том же принципе, однако были более удобны в процессе измерений. Роль лепестков там выполнял **подвижный** заряд, подвешенный вблизи **неподвижного** заряда на упругой нити. Сила взаимодействия зарядов отклоняла подвижный заряд от исходного положения на определенный угол. Для того чтобы произвести измерение этой силы, подвижный элемент возвращали в положение, которое он занимал ранее. Поворот подвижного заряда вокруг оси создает определенный момент в упругой нити. По достижении начального положения подвижного заряда уравниваются моменты, созданные силой взаимодействия зарядов и упругой нитью подвеса. Угол поворота оси

ставится в соответствие величине этого момента. По значению угла поворота оси вычисляют либо силу взаимодействия зарядов, либо величину заряда.

Г. Ом изучал простейшую электрическую цепь, состоящую из одного контура, в котором источник **«гальванического»** электричества подключался к одному или нескольким **«предметам»**, способным проводить ток. **Разность потенциалов** (зарядов) на концах **«проводящего тела»** Ом назвал **напряжением**, которое считал причиной **«движения электричества»**. Другую величину, силовую характеристику потока носителей заряда, он называл по-разному, в том числе, **«силой электричества»**.

В результате скрупулёзных и подробных исследований ученый убедился в том, что движение зарядов в любом проводящем предмете, которые он менял, можно описать простой формулой:

$$S = \frac{A}{L}. \quad (1.1)$$

где S – величина, характеризующая поток;

A – суммарная величина напряжений;

L – длина **«проводящего тела»**.

Формулу (1.1) Г. Ом записал словами следующим образом:

«Величина тока в произвольной гальванической цепи прямо пропорциональна сумме всех напряжений и обратно пропорциональна всем редуцированным длинам цепи»,

И далее

«при этом необходимо напомнить, что под редуцированной длиной понимается сумма всех соотношений, принадлежащих однородным частям цепи и состоящих из реальных длин и произведений удельной проводимости на площадь поперечного сечения».

Перевод можно проверить по цитате из оригинальной работы Ома:

später noch benutzt werden. Die zweite der vorigen Gleichungen geht durch die getroffene Abänderung über in

$$S = \frac{\Lambda}{L},$$

welche allgemein gültig ist und die Gleichheit der Größe des Stromes an allen Stellen der Kette schon durch ihre Form zu erkennen gibt; sie lautet in Worten so: *Die Größe des Stromes in einer galvanischen Kette ist der Summe aller Spannungen direkt, und der ganzen reduzierten Länge der Kette umgekehrt proportional*, wobei man sich erinnern muß, daß jetzt unter reduzierter Länge die Summe aller Quotienten verstanden wird, die aus den zu homogenen Theilen gehörigen wirklichen Längen und dem Produkte der entsprechenden Leitungsvermögen und Querschnitte gebildet werden.

Приведенный текст легко записать в виде формулы:

$$L' = \sum_{i=1, \dots, n} \frac{L_i}{\gamma_i \cdot S_i}, \quad (1.2)$$

где L_i – длина одного из «проводящих тел» контура, [м];

γ_i – удельная проводимость одного из «проводящих тел» контура,

[Ом⁻¹/м];

S_i – площадь поперечного сечения одного из «проводящих тел»

контура, [м²].

Размерность величины «редуцированной длины» вычисляется ниже:

$$[L'] = \frac{m}{[Om^{-1} / m] \cdot m^2} = Om.$$

Запишем формулу (1.1) в современных обозначениях для произвольного контура (der Kreis):

$$I_k = \frac{\sum_i U_i}{\sum_j R_j}, \quad (1.1k)$$

где U_i – напряжение элемента контура;

R_j – сопротивление элемента контура;

I_k – ток контура.

Если представить, что изучается только ветвь (die Zweig) контура, то выражение (1.1k) примет вид (1.1z).

$$I_z = \frac{\sum_i \Delta\varphi_i}{\sum_i R_i} \quad (1.1z)$$

где $\Delta\varphi_i = U_i$ – разность потенциалов на i – той ветви;

R_i – сопротивление i – той ветви.

Выражения (1.1k), (1.1z) идентичны, а, следовательно, закон Ома применим к любому фрагменту электрической цепи: контуру, ветви, произвольному пути. Выражение (1.1) универсально, конечно, с некоторыми уточнениями, которые имеются в тексте монографии [2] и реализованы в (1.1k), (1.1z).

Легко представить, что сопротивление «проводящего тела» измеряется с помощью линейки, если проводник имеет правильную геометрическую форму, а также известна величина его удельного сопротивления. Однако Г. Ом экспериментировал с «телами» произвольной формы и измерял их сопротивление линейкой. Ошибки измерений не было потому, что поток носителей заряда принимает форму минимального сечения «проводящих тел» контура, т.е. был геометрически правильным.

Из книги [2] следует, что «проводящих тел», соединенных последовательно, в эксперименте могло быть несколько, как и источников электричества. Таким образом, исследуемый контур мог включать в себя,

говоря современным языком, несколько резисторов и источников ЭДС. Такой контур уже сложно называть элементарным. Анализируя выражения (1.1) и (1.2), а также описание эксперимента, можно трактовать результат Георга Ома как первый шаг к формулировке второго закона Кирхгофа.

Для определения направления движения тока у Г. Ома была одна понятная всем возможность – обозначить направление движения зарядов от положительного полюса источника к отрицательному полюсу (или наоборот). Не желая связывать направление движения носителей заряда с условными обозначениями полюсов источника, ученый сформулировал следующее правило:

- «Ток в цепи движется в направлении от точки, с большим значением потенциала, к точке, с меньшим значением потенциала».

Это высказывание получило название «**принципа Ома**».

Сегодня принято записывать уравнение Ома в следующей форме:

$$U = R \cdot I, \quad (1.3)$$

где U – напряжение на участке цепи, [В];

I – ток участка цепи, [А];

R – сопротивление участка цепи, [Ом].

Сравним уравнение (1.3) с уравнением (1.1), записанным с помощью современных обозначений:

$$I = G \cdot U, \quad (1.4)$$

где $G = \frac{1}{R}$ – электрическая проводимость, [Ом⁻¹].

Уравнения (1.3), (1.4) описывают один и тот же объект – резистор и являются записью одного и того же закона. Выражения обладают одинаковой структурой, что можно трактовать как сходство, но используют разные комплекты физических величин, что подчеркивает их различия. В теории категорий такие выражения называют двойственными, приведем цитату из математической энциклопедии (т.2, сб.762):

«Для каждого предложения теории категорий существует двойственное предложение, которое получается формальным «обращением стрелок».

Постараемся применить это правило:

$$\begin{array}{ccc} U & = & R \cdot I \\ \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ I & = & G \cdot U \end{array} .$$

В нашем случае от уравнения (1.3), перемещаясь по стрелкам, получаем уравнение (1.4) с помощью формальной замены одного комплекта переменных другим. Направление стрелок можно обратить.

Имеет смысл привести правило проверки истинности, которое применяют в теории категорий:

«При этом справедлив, так называемый, принцип двойственности: предложение P истинно в теории категорий тогда и только тогда, когда в этой теории истинно двойственное предложение P^* ».

В нашем случае этот принцип действует, так как оба уравнения (1.3), (1.4) содержат один и тот же физический смысл.

Действительно, умножим слева обе части уравнения (1.3) на величину тока I и в результате получим формулу Ленца - Джоуля:

$$P = U \cdot I = RI^2, \quad (1.5)$$

где P – мощность, выделяемая на резисторе при протекании тока.

Аналогично, умножим слева обе части уравнения (1.4) на величину напряжения U и в результате получим ту же формулу Ленца - Джоуля:

$$P = I \cdot U = GU^2. \quad (1.6)$$

Преобразования выражений (1.3), (1.4) в формулы для определения мощности (1.5), (1.6) дают нам право называть уравнения (1.3), (1.4) **законом Ома** для участка цепи. Очевидно, что формулы закона Ома можно получить обратным преобразованием из выражений мощности.

В своей монографии Г. Ом приводит результаты экспериментов в наглядной форме, в виде эпюров. Сама система координат не изображается,

но расположение осей соблюдаются. По оси абсцисс откладывается длина «проводящего тела», а по оси ординат – величина потенциалов выбранных точек контура. Прямая линия **FG**, замыкающая два отрезка осей, отображает распределение потенциалов вдоль контура. Отрезки **FH** и **HG** являются катетами прямоугольного треугольника, поэтому тангенс наклона гипотенузы **FG** равен значению электрического тока, но только в том случае, если отрезок **FH** представляет редуцированную длину проводящего тела.

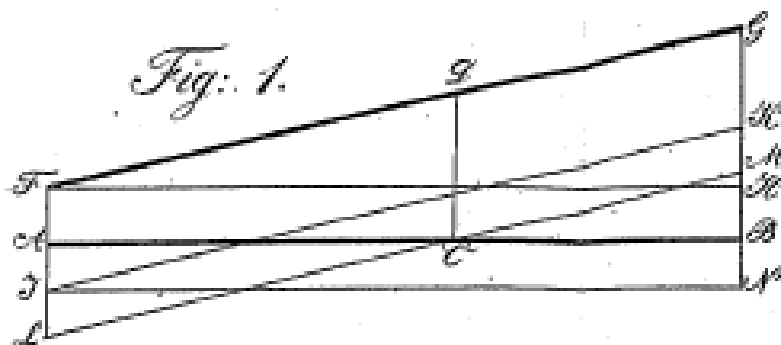


Рис. 1.1. Потенциальная диаграмма для одного «проводящего тела».

На рис.1.1 представлена первая из трех иллюстраций книги [2], которая отображает результаты измерений величин потенциалов в разных точках элементарного контура, содержащего единственное «проводящее тело». Потенциал точки **C** равен длине отрезка **DC**, конечно, с учетом принятого масштаба. В современной теории электрических цепей приведенный чертеж получил название потенциальной диаграммы и используется при изучении линейных схем.

Рассмотрим потенциальную диаграмму, рис.1.1, подробнее. Допустим, что отрезок **HF**, параллельный отрезку **AB**, т.е. оси абсцисс, соответствует редуцированной длине L' «проводящего тела» (R), а отрезок **GH**, параллельный оси ординат, соответствует разности потенциалов, измеренной на «проводящем теле» (U). Отрезок **AF**, вероятно представляет контактную разность потенциалов (проводящее тело – проводник от источника гальванического электричества). Запишем соотношение отрезков **GH**, **HF** как это требуется в (1.1):

$$S = \frac{A}{L'} = \frac{GH}{HF} = \frac{U}{R} = I. \quad (1.7)$$

Длина отрезка **BG** пропорциональна сумме напряжений источника и контактной разности потенциалов.

Линии **KI**, **LM** представляют результат определенного построения, которое можно восстановить по тексту. На прямой линии **FG** была выбрана точка **D**, из которой проведена прямая, параллельная оси ординат. Пересечение с прямой **AB** обозначено буквой **C**. Через эту точку была проведена прямая **LM**, параллельная линии распределения потенциалов на проводящем теле **FG**. Треугольники **FGH** и **IKN** подобны, так как их стороны взаимно параллельны. Проводящие свойства контура не изменялись и напряжения **GH**, **KN** равны, что следует из построения. Тогда можно сделать вывод, что треугольники равны и распределения потенциалов по линиям **FG**, **KI** одинаковые. Заметим, что описанное выше построение представлено, как правило, более тонкими линиями.

Вторая иллюстрация из книги Г. Ома, рис.1.2, соответствует более сложному контуру, состоящему из двух «проводящих тел». Впервые возникает определение контура как разнородного, что дает возможность разделить эксперимент на два этапа. На рис.1.2 представлена потенциальная диаграмма этого контура. Распределение потенциалов в контуре, установленное в результате измерений, представляется фигурой **FGHI**. Отметим, что наклоны линий распределения потенциалов **FG**, **KI** расположены под разными углами, хотя тела (с разной удельной проводимостью) включены в один контур. Г. Ом применяет преобразование, которое позволяет включить элементы схемы в один контур. С помощью определенного построения потенциальная диаграмма **FG**, **KI** может быть представлена в виде другой диаграммы **FG'**, **H'I**. Наклоны этих прямых одинаковы, а, следовательно, значение тока в этих проводящих телах равны.

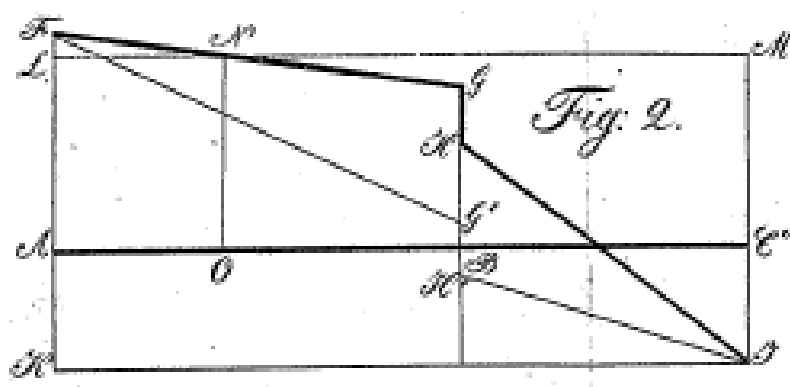


Рис. 1.2. Потенциальная диаграмма контура, составленного из двух «тел».

Контур, потенциальная диаграмма которого изображена на рис.1.2, представлен на рис.3 в виде электрической цепи с двумя «проводящими телами» (R_1 , R_2) и двумя источниками напряжения (E_i , E_k). Соответствие

схемы и потенциальной диаграммы легко устанавливается по обозначениям четырех устранимых узлов, рис.1.3.

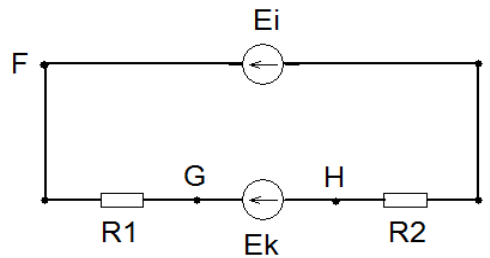


Рис.1.3. Цепь, соответствующая потенциальной диаграмме рис.1.2.

Контур, представленный идеальной электрической цепью, рис.1.3, содержит два «проводящих тела» R_1 , R_2 , вольтов столб E_i , и источник E_k , который является имитацией контактной разности потенциалов, возникающей на стыке «тел» из разных металлов. Напряжение внешнего источника равно длине отрезка **FK**, а контактная разность потенциалов равна отрезку **GH**. Отметим, что нумерация резисторов производится по потенциальной диаграмме «слева-направо».

Многие положения, которые сегодня не нуждаются в доказательстве, тогда были в новинку. Вероятно, было необходимо отметить, что величина электрического тока в каждом элементе контура имеет одно и то же значение. Об этом свидетельствует следующая цитата:

ist, geben sogleich zu erkennen, dass die Größe des Stromes in einer solchen galvanischen Kette an allen Stellen überall dieselbe bleibt

В переводе на русский язык она выглядит так:

«следует также осознать, что величина тока в такой гальванической цепи остается той же самой везде, во всех местах».

Запишем уравнение Ома в виде соотношения отрезков из рис.1.2, а также по изображению электрической цепи рис.1.3:

$$S = \frac{FK - GH}{AC} \quad \text{или} \quad I = \frac{(\varphi_F - \varphi_K) - E_k}{R_1 + R_2}. \quad (1.8)$$

Сумма напряжений на резисторах будет равна разности отрезков **FK** и **GH**. Потенциал точки **F** равен расстоянию до оси абсцисс, эта физическая величина имеет знак плюс, а потенциал точки **K** равен расстоянию до той же оси, но имеет знак минус. Итак, в числителе формул (1.8) находится суммы напряжений резисторов, а в знаменателе сумма сопротивлений резисторов электрической цепи рис.1.3.

На рис.1.4 представлена последняя иллюстрация Г. Ома, третья потенциальная диаграмма из источника [2].

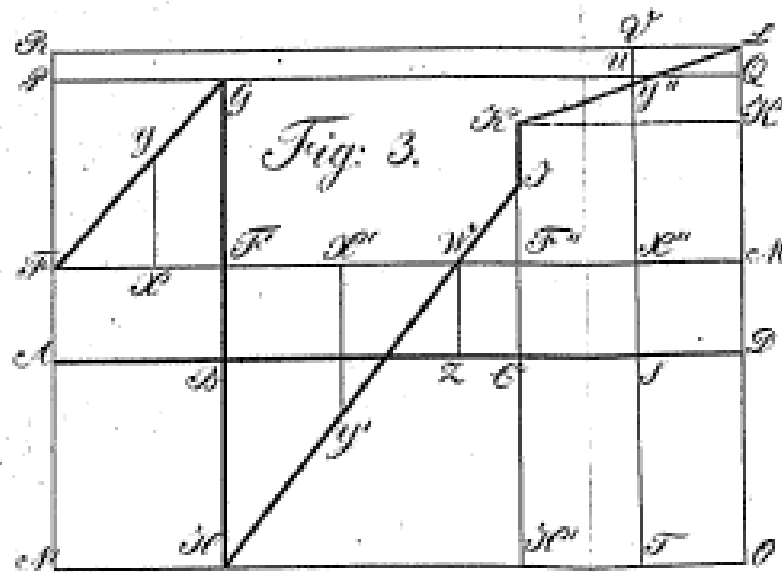


Рис. 1.4. Третья потенциальная диаграмма контура.

В разнородный контур включены три «проводящих тела», поэтому диаграмма разделена на три части: **AB**, **BC**, **CD**. Распределение потенциалов в контуре, установленное в результате измерений, представляется фигурой **FGHIKL**. Очевидно, что преобразование экспериментальной потенциальной диаграммы по включению «проводящих тел» в единый контур не выполнено.

Объяснение потенциальной диаграммы рис.1.4 занимает семь страниц оригинального текста. Вероятно, описывать ее подробно нет необходимости, т.к. все рассуждения сводятся к выводу, который записывается следующем образом:

$$S = \frac{\sum_i A_i}{\sum_j L'_j} \quad (1.9)$$

В числителе формулы (1.9) находится сумма всех напряжений контура, а в знаменателе сумма редуцированных длин всех проводящих тел. Г. Ома настаивал на универсальной записи своего закона в виде формул (1.1), (1.9). Разделение закона Ома на две формулировки – для участка цепи и для ветви, произошло значительно позже, что не улучшило понимание физической сути явления. Вот и все о рождении первых уравнений теории электрических цепей.

На 83-ей странице монографии заканчивается изложение теории распространения гальванического электричества в проводящих телах Г. Ома. Кроме основного текста, монография снабжена обстоятельными Приложениями – 87 – 200 стр., а также Дополнением – 203 – 243 стр. Содержание этих частей монографии не касается темы настоящего раздела, поэтому остаются без комментариев.

У Г. Ома были предшественники, например, Генри Кавендиш, который один из первых в 1781 году открыл закон (1.9), но не опубликовал этот научный результат. Об этом стало известно только в 1879 году, когда Джеймс Максвелл собрал все неопубликованные труды ученого и издал их отдельной книгой. Были у Ома и другие предшественники, но это не умаляет значения его научного труда.

Монография, изданная в 1827 году, была замечена учеными того времени. Вероятно, пришло время, когда научная общественность была готова к восприятию подобного материала. Книга получилась обстоятельной и понятной для читателя. Отметим еще раз, что закон Ома имеет только одну формулировку, которая отражена в формуле (1.9). Цитаты из оригинального текста подтверждают это. Таким образом, **есть ли собственные источники у ветви или их нет, величина тока определяется как соотношение суммы напряжения на элементах ветви и суммы ее сопротивлений.**

В заключение раздела отметим, что работа Георга Ома [2] больше похожа на отчет физика-экспериментатора. Очевидно, что по какой-то причине ученый не хотел говорить открыто о движении носителей электричества как особом явлении. Он говорит о движении электрического тока, о силе тока, о разности потенциалов как причине этого движения, но избегает высказываться о нем как физик-теоретик.

К тому времени механика, как наука, достигла определенного совершенства. Механическое движение изучалось с помощью совершенного математического аппарата. Мало того, движение легко было наблюдать, а законы Ньютона казались констатацией очевидных истин. В случае электрического движения все было по-другому, без приборов о нем ничего нельзя было сказать.

Приведем, например, формулировку первого закона Ньютона:

Всякое тело продолжает удерживаться в своём состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

Как его применить к электрическому движению? Признать, что носители электричества не имеют массы, а, следовательно, у них отсутствует инерционное движение? Действительно, все могут видеть, что бильярдный шар, получив импульс силы, продолжает самостоятельно перемещаться по столу. В противоположность этому электрическое движение возможно только при постоянном воздействии определенной разности потенциалов, т.е. при постоянном воздействии электрической силы.

Разность потенциалов источника электрической энергии, вызывает движение носителей электричества в «проводящем теле», но почему движение продолжается внутри источника? Какая разность потенциалов продолжает это движение? Такие вопросы возникают сами собой, т.к. электрическое движение постоянно сравнивают с движением механическим. Главным условием электрического движения является наличие замкнутых циклов. Другими словами, только чисто геометрическое условие делает возможным возникновение электрического движения. Для него необходимо наличие замкнутых путей для тока.

Итак, Георгу Ому удалось ввести в научный оборот переменные, которые характеризуют электрическое состояние участка электрической цепи. Конечно, дальнейшие исследования будут уточнять природу этих переменных. Однако результат, достигнутый ученым, сегодня используется как в науке, так и на практике. Это произошло потому, что ученый сумел задать удачный уровень абстракции, при анализе результатов реальных измерений и использовал знакомую всем модель. До сих пор мы говорим: - Ток течет, т.е. ведет себя как вода.

2. Законы Кирхгофа и математическое описание сложных электрических цепей

«Во-первых, мы должны понимать, что мы не создали математику, мы ее **обнаружили**».

Никола Тесла.

В своей первой научной статье по теории электрических цепей Г. Кирхгоф с восторгом цитирует отрывки из монографии Г. Ома [2], и особенно часто возвращается к новому понятию – **«принципу Ома»**. Вероятно, для проверки «принципа Ома» и был поставлен эксперимент, описание которого занимает большую часть статьи [3].

Лабораторная установка представляла собой проводящий лист круглой формы с двумя зажимами, к которым подключался вольтов столб. После подключения вольтова столба к этим зажимам, в теле листа начиналось движение носителей электричества. Предполагалось опытным путем проследить распространение носителей электричества на поверхности листа и сравнить экспериментальную картину трасс электрического тока с той, что была предсказана теоретически. Уравнения для линий тока, как того требовала традиция, были теоретически определены в процессе решения геометрической задачи, в чем выбранная форма проводящего листа играла не последнюю роль.

В эксперименте использовался интересный «измерительный прибор», который носил название мультипликатора. Он состоял из чаши Петри, в которую была налита ртуть. В центре этого озера ртути на подставке располагался компас, а к стенкам чаши диаметрально друг к другу были прикреплены измерительные концы прибора. Электрический контакт измерительных концов осуществлялся погружением их в жидкий металл – надежному контакту способствовало хорошее смачивание проводов ртутью.

Если на мультипликатор подавалась некоторая разность потенциалов, то в слоях ртути возникало большое количество линий тока. Каждая линия тока создавала вокруг себя магнитное поле, а множество магнитных силовых линии объединялись в своеобразный соленоид. Объединенное магнитное поле «соленоида» взаимодействовало с магнитной стрелкой компаса, и она отклонялась от исходного положения. Если разность потенциалов была равна нулю, такое движение стрелки компаса отсутствовало, однако этот факт надо было суметь зафиксировать.

Во время измерений экспериментатор действовал следующим образом: один измерительный конец оставался на выбранной точке, а другой переносился в точку с выбранным значением потенциала. Далее определялись другие точки с тем же значением потенциала, координаты которых записывались. На чертеже, куда переносились координаты точек, их объединяло подобие линии равного потенциала. Точки соединялись плавными кривыми, чтобы линия равного потенциала выглядела непрерывной. Измерения повторялись несколько раз для получения достаточного количества линий равного потенциала при других значениях. Перпендикулярно линиям равного потенциала располагаются линии тока, т.е. силовые линии электрического поля. Их наносят на чертеж с некоторым шагом.

Согласно принципу Ома носители заряда должны преодолевать расстояния между линиями равного потенциала по кратчайшему пути в направлении от линии с бóльшим значением потенциала к линии с меньшим значением потенциала. Можно только удивляться тому, что на уровне измерительной техники 19-го века студенту Кёнигсбергского университета (Г. Кирхгофу) удалось показать соответствие теоретических и экспериментальных линий тока, возникших на чертеже с несовершенными кривыми равного потенциала.

Вероятно, что по примеру М. Фарадея в теле проводящего листа Кирхгоф выделял единичные трубки линий тока. Протекание тока в этих трубках описывалась формулой, которая в современных обозначениях выглядит следующим образом [3]:

$$I = -\gamma th \frac{d\varphi}{dn}, \quad (2.1)$$

где I – сила электрического тока, в амперах $[A]$;

γ – удельная проводимость материала размерности $[Om^{-1}/m]$;

t – толщина металла экспериментального листа, $[m]$;

h – отрезок между соседними линиями тока, $[m]$;

φ – величина электрического потенциала, $[B]$;

n – нормаль к линиям равного потенциала, $[m]$.

Проведем преобразование уравнение (2.1) следующим образом:

$$\frac{I}{\gamma th} = -\frac{d\varphi}{dn}. \quad (2.2)$$

Размерность левой части уравнения (2.2) равна [В/М], что соответствует величине напряженности электрического поля, поэтому запишем:

$$\vec{E} = -grad\varphi, \quad (2.3)$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля, [В·м⁻¹].

Завершая эксперимент, Г. Кирхгоф решил измерить сопротивление проводящего листа по отношению к клеммам источника питания. Измерения сопротивления осуществлялось по схеме баланса С. Кристи, известной сегодня под именем моста Уитстона. Конечно, сама измерительная схема была создана тут же из имеющихся в лаборатории проводников, как это делал известный английский физик – автор этого метода измерения электрического сопротивления. После достижения измерительной схемой режима баланса величина измеряемого сопротивления вычислялась по формуле Кристи.

Подражая Г. Ому, Кирхгоф выводит эту формулу аналитически [3]:

«Чтобы удобнее вывести приведенную выше пропорцию, я докажу сначала теорему.

Пусть по системе проводников, произвольно соединенных между собой, течет ток. Тогда:

1) если проводники 1, 2, ... μ соединяются в одной точке, то

$$I_1 + I_2 + \dots + I_\mu = 0, \quad (2.4)$$

где I_1, I_2, \dots - силы токов, текущих по этим проводникам (все токи, текущие к общей точке, считаются положительными);

2) если проводники 1, 2, ... ν образуют замкнутый контур, то сумма

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + \dots + I_\nu\omega_\nu \quad (2.5)$$

(2.5) будет равна сумме всех электродвижущих сил, встречающихся при обходе проводников в последовательности $1, 2, \dots, \nu$; $\omega_1, \omega_2, \dots$ - сопротивления проводников; I_1, I_2, \dots - силы текущих по проводникам токов (для всех токов положительным считается одно направление)».

Первая часть теоремы (2.4) не доказывалась за очевидностью, т.к. у узла нет возможности накапливать энергию. Вторая часть теоремы (2.5) была доказана, как сказали бы сегодня, с помощью закона Ома. Напомним, что Г. Ом исследовал не только контур с одним проводящим телом, но и контура с несколькими проводящими телами. В процессе эксперимента он пришел к выводу, что на каждом участке контура выполняется один и тот же закон, названный потом законом Ома. Если записать напряжение на каждом участке контура с помощью этого закона, то получим выражение (2.5).

В приложении к статье [3] были сформулированы уравнения Кирхгофа. Отметим, что это было сделано исключительно со служебной целью. Ниже приводим выдержку из оригинальной работы Г. Кирхгофа:

Um die angegebene Proportion auf eine bequeme Weise ableiten zu können, will ich zuerst den folgenden Satz beweisen:

Wird ein System von Drähten, die auf eine ganz beliebige Weise mit einander verbunden sind, von galvanischen Strömen durchflossen, so ist:

1) wenn die Drähte $1, 2, \dots, \mu$ in einem Punkte zusammenstoßen,

$$I_1 + I_2 + \dots + I_\mu = 0,$$

wo I_1, I_2, \dots die Intensitäten der Ströme bezeichnen, die jene Drähte durchfließen, alle nach dem Berührungspunkte zu als positiv gerechnet;

2) wenn die Drähte $1, 2, \dots, \nu$ eine geschlossene Figur bilden,

$$I_1 \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_2 + \dots + I_\nu \cdot \omega_\nu$$

= der Summe aller elektromotorischen Kräfte, die sich auf dem Wege: $1, 2, \dots, \nu$ befinden; wo $\omega_1, \omega_2, \dots$ die

Widerstände der Drähte, I_1, I_2, \dots die Intensitäten der Ströme bezeichnen, von denen diese durchflossen werden, alle nach *einer* Richtung als positiv gerechnet.

Теоретическое и практическое значение уравнений (2.4), (2.5) ученый раскрыл в другой своей статье [4], в которой он применил их для описания системы проводников. Впервые, математическая модель своеобразной электрической цепи была составлена алгоритмически – от контура к контуру, от узла к узлу. Целью Кирхгофа было определение расчетным путем значений токов ветвей с помощью универсального метода для решения системы алгебраических уравнений. Проследим становление современных методов математического моделирования электрических цепей, начиная со статьи [4].

В статье приведена математическая модель системы проводников, размер которой не был ограничен. Сложность поставленной математической задачи вынуждала Г. Кирхгофа записывать уравнения в упорядоченной форме:

«Поскольку теоремы 1 и 2 должны дать необходимое число уравнений для определения величин I_1, I_2, \dots, I_n , эти уравнения, как было доказано выше, должны иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^1 w_1 I_1 + \alpha_2^1 w_2 I_2 + \dots + \alpha_n^1 w_n I_n &= \alpha_1^1 E_1 + \alpha_2^1 E_2 + \dots + \alpha_n^1 E_n \\
 \alpha_1^2 w_1 I_1 + \alpha_2^2 w_2 I_2 + \dots + \alpha_n^2 w_n I_n &= \alpha_1^2 E_1 + \alpha_2^2 E_2 + \dots + \alpha_n^2 E_n \\
 \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 \alpha_1^\mu w_1 I_1 + \alpha_2^\mu w_2 I_2 + \dots + \alpha_n^\mu w_n I_n &= \alpha_1^\mu E_1 + \alpha_2^\mu E_2 + \dots + \alpha_n^\mu E_n \\
 \\
 \alpha_1^{\mu+1} I_1 + \alpha_2^{\mu+1} I_2 + \dots + \alpha_n^{\mu+1} I_n &= 0 \\
 \alpha_1^{\mu+2} I_1 + \alpha_2^{\mu+2} I_2 + \dots + \alpha_n^{\mu+2} I_n &= 0 \quad , \quad (2.6) \\
 \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\
 \alpha_1^n I_1 + \alpha_2^n I_2 + \dots + \alpha_n^n I_n &= 0
 \end{aligned}$$

где часть коэффициентов α равна +1, часть -1 и 0, а μ означает то же, что и раньше».

Буквой w обозначена величина сопротивления ветви, а буквой E – величина ЭДС источника напряжения. Уравнения (2.6) составлены только для независимых контуров и узлов.

К моменту написания статьи [4] понятие матрицы в математике только формировалось, и Кирхгоф не мог им воспользоваться. Однако, благодаря упорядоченной форме записи уравнений математической модели (2.6), в ней нетрудно обнаружить матрицы инциденций, особенно, после подстановки численных значений коэффициентов α . Значения этих коэффициентов в статье были заданы ограниченным множеством чисел – (1, -1, 0), где единицы соответствуют слагаемым уравнений с тем же знаком, а ноль – отсутствию слагаемого в любом уравнении. Отметим, что уравнения математической модели не объединены скобкой. Однако они расположены автором без разрыва, что заставляет рассматривать их как полную математическую модель электрической цепи.

Пример.

Запишем систему уравнений (2.6) для электрической цепи рис.2.1, проставляя численные значения коэффициентов α . Заметим, что правую часть системы уравнений нет смысла раскрывать подробно, так как источник ЭДС содержится только в ветви 6 электрической цепи. В нижней подсистеме уравнений (2.6) правая часть содержит только нули, т.к. номинал эквивалентного источника тока входит в ток ветви 6.

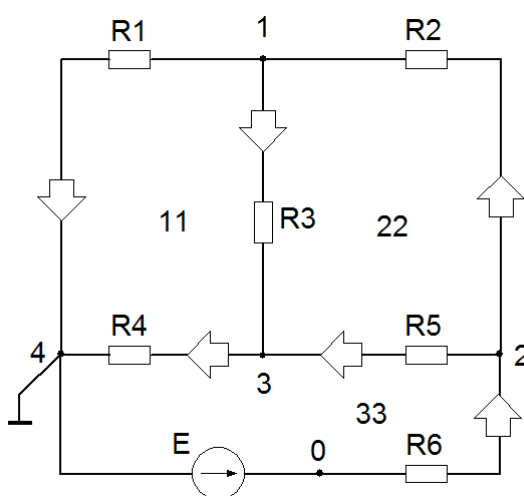


Рис. 2.1. Схема моста Уитстона.

Коэффициенты α из уравнений (2.6) в системе уравнений принимают знак слагаемых конкретных уравнений Кирхгофа и отделены точкой от других математических символов:

$$\begin{array}{rcccccc}
 +1 \cdot I_1^b R_1 & +0 \cdot I_2^b R_2 & -1 \cdot I_3^b R_3 & -1 \cdot I_4^b R_4 & +0 \cdot I_5^b R_5 & +0 \cdot I_6^b R_6 & = & 0 \\
 0 \cdot I_1^b R_1 & +1 \cdot I_2^b R_2 & +1 \cdot I_3^b R_3 & +0 \cdot I_4^b R_4 & -1 \cdot I_5^b R_5 & +0 \cdot I_6^b R_6 & = & 0 \\
 0 \cdot I_1^b R_1 & +0 \cdot I_2^b R_2 & +0 \cdot I_3^b R_3 & +1 \cdot I_4^b R_4 & +1 \cdot I_5^b R_5 & +1 \cdot I_6^b R_6 & = & +1 \cdot E_6 \\
 +1 \cdot I_1^b & -1 \cdot I_2^b & +1 \cdot I_3^b & +0 \cdot I_4^b & +0 \cdot I_5^b & +0 \cdot I_6^b & = & 0 \\
 0 \cdot I_1^b & +1 \cdot I_2^b & +0 \cdot I_3^b & +0 \cdot I_4^b & +1 \cdot I_5^b & -1 \cdot I_6^b & = & 0 \\
 0 \cdot I_1^b & +0 \cdot I_2^b & -1 \cdot I_3^b & +1 \cdot I_4^b & -1 \cdot I_5^b & +0 \cdot I_6^b & = & 0
 \end{array}$$

(2.6a)

В выражении (2.6 а) современная теория электрических цепей выделяет две системы уравнений: контурную и узловую. Очевидно, что каждую подсистему уравнений можно преобразовать к виду:

$$[B] \cdot \bar{U} = \bar{E}, \quad [A] \cdot \bar{I}^b = \bar{0}, \quad (2.6б)$$

где $[B]$, $[A]$ – матрицы контурных и узловых инциденций;

\bar{U} , \bar{I}^b , \bar{E} – вектора напряжений, токов ветвей и источников ЭДС.

Именно, матрицы инциденций, де-факто введенные в статье [4], дают нам право называть законы Кирхгофа структурными. Ведь матрицы инциденций являются лишь алгебраической записью графа электрической цепи. Кстати, выражения (2.6 б) являются матричной записью **законов Кирхгофа**.

Итак, структура электрической цепи может быть записана как с помощью контурной $[B]$, так и с помощью узловой $[A]$ матриц инциденций, т.е. каждая из них отображает схему соединений электрической цепи. Запись законов Кирхгофа в матричной форме (2.6б) обнаруживает определенное сходство этих уравнений. Подобие матриц состоит в том, что они отражают структуру одного и того же графа, а различия матриц проявляется в том, что при их составлении использовались различные элементы графа – контура и узлы [5].

Пример.

Запишем полную систему уравнений Кирхгофа для цепи рис.2.1:

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & -R_3 & -R_4 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & R_6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^b \\ I_2^b \\ I_3^b \\ I_4^b \\ I_5^b \\ I_6^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{П.2.1})$$

Зададим параметры резисторов и номинал источника:

$$R_1 = 10 \text{ Ом}; \quad R_2 = 15 \text{ Ом}; \quad R_3 = 20 \text{ Ом}; \quad R_4 = 25 \text{ Ом}; \quad R_5 = 30 \text{ Ом}; \quad R_6 = 35. \\ E = 20 \text{ В}.$$

Представим матричное уравнение (П.2.1) в численном виде и в соответствии с методом Крамера вычислим необходимые детерминанты этой матрицы. Соотношения детерминант дают нам численные значения переменных системы уравнений.

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & -20 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 20 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 30 & 35 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{44500}{165625} = 0,268679 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{43000}{165625} = 0,259623 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{-1500}{165625} = -0,00906 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{19000}{165625} = 0,114717 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{20500}{165625} = 0,123774 \text{ А}; \quad I_6 = \frac{63500}{165625} = 0,383396 \text{ А}.$$

Запишем двойственную систему уравнений, (П.2.1):

$$\begin{bmatrix} g_1 & -g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & 0 & g_5 & -g_6 \\ 0 & 0 & -g_3 & g_4 & -g_5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^b \\ U_2^b \\ U_3^b \\ U_4^b \\ U_5^b \\ U_6^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{П.2.2})$$

Решение системы уравнений (П.2.2) дает результат, который соответствует рассматриваемой электрической цепи. При желании это легко проверить.

Отметим, что матрицы уравнений (П.2.1), (П.2.2) содержат обе матрицы инцидентий, что становится очевидным, если задать единичные параметры элементам электрической цепи. После подстановки единичных параметров в уравнения (П.2.1) верхняя подматрица преобразуется в контурную матрицу инцидентий. Результаты подстановки приведены ниже (П.2.3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}. \quad (\text{П.2.3})$$

Результат подстановки единичных параметров матрицу уравнения (П.2.2) будет следующим:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}. \quad (\text{П.2.4})$$

Матрицы (П.2.3), (П.2.4) можно использовать как новый математический объект. Детерминанты этих матриц равны 16 и -16, что соответствует числу деревьев графа. Несмотря на то, что каждая подматрица отдельно представляет структуру графа схемы, модуль определителя не равен удвоенному числу деревьев графа. Матрицы уравнений (П.2.1), (П.2.2), преобразованные заданием единичных параметров электрической цепи, обозначим следующим образом:

$$\text{а) } K_R = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}, \quad \text{б) } K_G = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}. \quad (\text{П.2.5})$$

Отметим, что матрицы (П.2.5) содержат полную структурную информацию об электрической цепи в любом ее представлении – как системой контуров, так и системой узлов. Зафиксируем очевидное свойство матриц (П.2.5):

$$\Delta \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{П.2.6})$$

Повторим матричную запись законов Кирхгофа (2.6б), заполнив вектора переменных напряжениями и токами ветвей:

$$[A] \bar{I}^b = \bar{0}, \quad [B] \bar{U}^b = \bar{0}. \quad (\text{П.2.7})$$

Итак, при рассмотрении законов Кирхгофа следует акцентировать внимание на их структуру, которая задана схемой соединений элементов в электрическую цепь [6].

Уравнения Кирхгофа надо бы называть структурными, чтобы подчеркнуть их главное содержание. Отметим, что математическая модель любой электрической цепи создается на основании уравнений Кирхгофа, даже та, которая используется в комплексе программ анализа электрических и электронных схем. Рассмотрим эту модель более подробно [7].

В описании любой программы анализа говорится, что уравнения цепи составляются по методу переменных состояния. Он иногда преподносится как что-то абсолютно новое, поэтому у некоторых пользователей возникает даже убеждение, что это особый метод, не имеющий ничего общего со школьными уравнениями Кирхгофа. Однако особенность метода состоит лишь в том, что распределение энергии по элементам электрической цепи

считается главным для режима схемы. Такой подход к описанию схем считается обязательным, если в цепи есть реактивные элементы, состояние которых зависит от начального запаса энергии. Переменными, по которым определяется энергетическое состояние реактивных элементов, являются: напряжение конденсатора и ток индуктивности. Эти напряжение и ток получили название переменных состояния.

Пример.

Приведем процесс составления уравнений состояния для простой электрической цепи, рис. 2.2 [7]. Запишем уравнения Кирхгофа для электрической цепи рис. 2.2:

$$\begin{aligned} -j(t) - i_L + i_R + i_C &= 0 \\ R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt} + R_2 i_R &= e(t) \\ u_C - i_R R_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

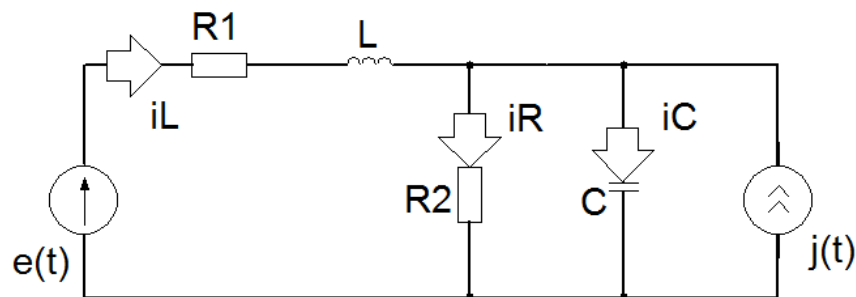


Рис. 2.2. Пример составления системы уравнений состояния.

Преобразуем уравнение единственного независимого узла цепи рис. 2.2

$$\begin{aligned} i_R &= i_L - i_C + j(t), \\ i_R &= i_L - C \frac{du_C}{dt} + j(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Теперь в правой части уравнения (2.9) кроме номинала источника находятся только слагаемые, содержащие переменные состояния.

Преобразуем второе контурное уравнение электрической цепи рис. 2.2, применяя уравнение (2.9) в качестве подстановки:

$$u_C - \left[i_L - C \frac{du_C}{dt} + j(t) \right] R_2 = 0, \quad (2.10)$$

откуда получаем одно из уравнений метода переменных состояния:

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L - \frac{1}{CR_2} u_C + \frac{1}{C} j(t). \quad (2.11)$$

Преобразуем первое контурное уравнение электрической цепи рис. 2.2, применяя в качестве подстановки уравнение (2.9):

$$R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt} + R_2 \left[i_L - C \frac{du_C}{dt} + j(t) \right] = e(t). \quad (2.12)$$

Из уравнения (2.10) можно получить следующую подстановку:

$$u_C = \left[i_L - C \frac{du_C}{dt} + j(t) \right] R_2,$$

тогда выражение (2.12) примет следующий вид:

$$R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt} + u_C = e(t).$$

В результате получаем второе уравнение метода переменных состояния:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1}{L} i_L - \frac{1}{L} u_C + \frac{1}{L} e(t). \quad (2.13)$$

Запишем первое дифференциальное уравнение метода переменных состояния в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} i'_L \\ u'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Для того чтобы сформировать второе уравнение, по которому находятся другие переменные цепи, выразим их через переменные состояния:

$$i_R = \frac{u_C}{R_2}; \quad i_C = i_L - \frac{u_C}{R_2} + j(t); \quad u_L = -R_1 i_L - u_C + e(t).$$

Запишем второе уравнение метода переменных состояния в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} i_R \\ i_C \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \\ 1 & -\frac{1}{R_2} \\ -R_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Оба уравнения метода переменных состояния объединяются в систему [8]:

$$\begin{cases} [\bar{X}'] = [A][\bar{X}] + [B][\bar{u}] \\ [\bar{Y}] = [C][\bar{X}] + [D][\bar{u}] \end{cases}, \quad (2.16)$$

где \bar{X} – вектор переменных состояния;

\bar{X}' – вектор производных (по времени) переменных состояния;

\bar{u} – вектор источников;

\bar{Y} – вектор выходных переменных;

$[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ – матрицы, составленные по графу схемы.

Очевидно, что вывод уравнений состояния начинался с составления уравнений Кирхгофа, где переменными выступают напряжения и токи. Уравнения (2.16) записаны в матричной форме и подготовлены для решения численными методами. Для сложных электрических цепей эти уравнения составляются автоматически программами анализа электронных схем. Преимущество уравнений (2.16) состоит в том, что переменные состояния позволяют проводить анализ потоков энергии (мощностей). Эти уравнения являются сегодня основными при исследовании электрических цепей как динамической системы.

Выше было показано, каким образом уравнения состояния связаны с уравнениями Кирхгофа, однако считаем, что на этом надо сделать акцент:

Уравнения состояния, как и неизвестные сегодня системы уравнений, получены и будут получаться с помощью законов Кирхгофа. Причина такой безысходности в том, что уравнения Кирхгофа, прежде всего, являются структурными, т.е. содержат информацию о соединении элементов в электрическую цепь.

Таким образом, информация о структуре электрической цепи является главной при моделировании электрических схем. На фоне этого утверждения информацию о параметрах элементов следует рассматривать как второстепенную.

3. Раздельное использование системы уравнений Кирхгофа

«...в целях уразумения действительности мы разделяем ее на отдельные ... **абстрактные моменты** и изучаем их изолированно с тем, чтобы потом ... воссоздать ту **их общую ...связь**, из которой они были извлечены первоначально». Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Систему уравнений Кирхгофа (2.6) давно принято разделять на две подсистемы и использовать каждую отдельно. Следует отметить, что размеры современных схем значительно превосходят те, которые исследовали Г. Ом и Г. Кирхгоф, поэтому разделение на части полной системы уравнений не встречает возражений. Первая подсистема содержит уравнения контуров, т.е. представляет схему как систему взаимосвязанных контуров. Другая подсистема содержит уравнения узлов, т.е. представляет схему как систему взаимосвязанных узлов. Начнем рассмотрение с первой подсистемы уравнений.

Воспользуемся матрицей контурных инцидентий для компактной записи первой подсистемы, уравнения которой составлены по второму закону Кирхгофа:

$$[B]\bar{U} = \bar{E}_k, \quad (3.1)$$

где $[B]$ – матрица контурных инцидентий;

\bar{U} – вектор напряжений на элементах контуров;

\bar{E}_k – вектор источников напряжения в контурах.

Для того чтобы облегчить расчет токов ветвей, уменьшить размеры матриц, Максвелл ввел понятие контурного тока, который он рассматривал как вспомогательную, расчетную величину:

$$\left[[B][R_0][B]^t \right] \bar{I}_k = \bar{E}_k, \quad (3.2)$$

где $[R_0]$ – диагональная матрица сопротивлений ветвей;

$[B]^t$ – транспонированная матрица контурных инцидентий.

Величины токов ветвей электрической схемы находим по уравнению:

$$[B]^t \bar{I}_k = \bar{I}^b. \quad (3.3)$$

Отметим, что в выражении (3.3) транспонированная контурная матрица выступает как тензор. Другими словами, преобразовывает вектор контурных токов с **любыми значениями** элементов в вектор токов ветвей, значения которых **соответствуют первому закону** Кирхгофа. Уравнение (3.3) можно записать в другом виде:

$$\bar{I}_k^t [B] = \bar{I}_b^t. \quad (3.3^*)$$

Вторая подсистема уравнений (2.6) представляет электрическую схему как множество взаимосвязанных узлов. Это двойственное представление одной и той же схемы. Воспользуемся матрицей узловых инцидентий для записи второй подсистемы, уравнения которой составлены по первому закону Кирхгофа:

$$[A] \bar{I}^b = \bar{0}, \quad (3.4)$$

где $[A]$ – матрица узловых инцидентий;

\bar{I}^b – вектор токов ветвей.

В качестве переменных используются понятие напряжения (потенциал) узла:

$$[[A][G_0][A]^t] \bar{\varphi} = -\bar{J}_n, \quad (3.5)$$

где $[G_0]$ – диагональная матрица проводимостей ветвей;

$[A]^t$ – транспонированная матрица узловых инцидентий;

$\bar{\varphi}$ – вектор напряжений (потенциалов) узлов схемы.

Напряжения ветвей электрической схемы получаем по уравнению:

$$[A]^t \bar{\varphi} = \bar{U}^b. \quad (3.6)$$

Отметим, что в выражении (3.6) транспонированная матрица выступает как тензор. Другими словами, преобразовывает вектор узловых напряжений (потенциалов) с **любыми значениями** элементов в вектор напряжений ветвей, значения которых **соответствуют второму закону** Кирхгофа. Уравнение (3.6) можно записать в другом виде:

$$\bar{\varphi}^t [A] = \bar{U}_b^t. \quad (3.6^*)$$

Пример. Воспользуемся схемой, взятой из предыдущего раздела.

Подставим численные значения ($R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 15 \text{ Ом}$; $R_3 = 20 \text{ Ом}$; $R_4 = 25 \text{ Ом}$; $R_5 = 30 \text{ Ом}$; $R_6 = 35$. $E = 20 \text{ В}$) в матричное уравнение (3.2)

и получим систему уравнений, составленную по методу контурных токов:

$$\begin{bmatrix} 55 & -20 & -25 \\ -20 & 65 & -30 \\ -25 & -30 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Найдем значения контурных токов:

$$I_{11} = 0.268679 \text{ A}, \quad I_{22} = 0.249623 \text{ A}, \quad I_{33} = 0.383396 \text{ A}.$$

По формуле (3.3) определим значения токов ветвей:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.268679 \\ 0.249623 \\ 0.383396 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.268679 \\ 0.259623 \\ -0.00906 \\ 0.114717 \\ 0.123774 \\ 0.383396 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}.$$

Соответствие значений первому закону Кирхгофа легко проверить по рис.2.1.

Зададим произвольные значения контурных токов и определим по формуле (3.3) токи ветвей рассматриваемой электрической цепи:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}.$$

Проверим полученные значения на уравнении первого узла:

$$I_1^b - I_2^b + I_3^b = 0 \Rightarrow 3 - 4 + 1 = 0.$$

Проверку выполнения первого закона Кирхгофа на уравнениях других узлов оставляем читателю.

После подстановки численных значений в матричное уравнение (3.5) получим систему уравнений, составленную по методу узловых потенциалов:

$$\begin{bmatrix} 0.216666 & -0.06667 & -0.05 \\ -0.06667 & 0.12857 & -0.03333 \\ -0.05 & -0.03333 & 0.12333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.571428 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В процессе решения этой системы получим следующие значения узловых потенциалов, а также найдем по формуле (3.6) значения напряжений ветвей:

$$\varphi_1 = 2.686798B, \quad \varphi_2 = 6.581184B, \quad \varphi_3 = 2.867931B,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.686798 \\ 6.581184 \\ 2.867931 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.686798 \\ 3.894386 \\ -0.18113 \\ 2.867931 \\ 3.713253 \\ -6.58118 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}.$$

Соответствие значений второму закону Кирхгофа легко проверить по рис.2.1.

Зададим произвольные значения узловым напряжениям (потенциалам) и определим по формуле (3.6) напряжения ветвей рассматриваемой электрической цепи:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}.$$

Проверим полученные значения на уравнении контура 11:

$$U_1^b - U_3^b - U_4^b \Rightarrow 6 + 2 - 8 = 0.$$

Проверку выполнения второго закона Кирхгофа на уравнениях других контуров оставляем читателю.

Разработка программ автоматического анализа электрических схем дала мощный импульс к дальнейшему развитию теории электрических цепей. Одним из первых достижений в алгоритмизации процесса составления системы уравнений стало разделение ветвей и их переменных по принадлежности к дереву графа схемы или его связям. Вторым достижением является разделение структуры электрической цепи и ее параметров. Матрицы инцидентий стали блочными, блоки содержат ветви, принадлежащие или дереву, или связям [8]. Список параметров разделился на две части, в одной из которых размещены постоянные величины, а во второй – переменные, изменяющиеся от итерации к итерации.

Покажем пример разделение ветвей системы уравнений, матрица которой составлена в соответствие с нумерацией ветвей. Произведем группирование столбцов в матрице контурных инцидентий с помощью простой перестановки (столбцы меняются местами). Дерево в нашем примере состоит из ветвей 3,4, 5, тогда получается, что ветви 1, 2, 6 будут связями:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ [B] = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & = & [B_f]. \end{matrix}$$

Блоки фундаментальной матрицы контурных инцидентов принято обозначать следующим образом [9]:

$$[B_f] = [K \quad E]. \quad (3.7)$$

Блоки матрицы (3.7) можно поменять местами:

$$[B_f] = [E \quad K]. \quad (3.7^*)$$

Подобное преобразование может производиться и с узловой матрицей инцидентов.

Проведем группирование столбцов в матрице узловых инцидентов:

$$[A] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & & \begin{matrix} 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Обозначим первый блок преобразованной матрицы буквой **T**, а второй блок буквой **C**, что соответствует первым буквам английских слов: дерево (Tree) и соединение (Coupling). Учитывая формулу (3.7), считаем, что первый блок фундаментальной матрицы узловых инцидентов должен быть единичным. Достичь этого можно умножением слева блока дерева на его собственную обратную матрицу:

$$[T_A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow [T_A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица блока дерева **T** всегда имеет квадратную форму, что следует из формулы Эйлера:

$$n_k = n_g - (n_y - 1) = 0. \quad (3.8)$$

В словесной форме формула (3.8) читается следующим образом: **число ветвей дерева равно числу независимых узлов.**

Умножаем преобразованную матрицу узловых инцидентий слева на обратную матрицу блока дерева:

$$[T_A]^{-1} [T_A \quad C_A] = [A_f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [E \quad F].$$

Конечно, неединичный блок узловой фундаментальной матрицы можно получить, не прибегая к вычислению обратной матрицы [9]:

$$F = -K^t \quad (3.9)$$

Найдем блок F для нашего примера:

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -K^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = F.$$

Разделение ветвей схемы на два подмножества соблюдается на всех этапах расчета с помощью компьютерных программ.

Фундаментальную матрицу контурных инцидентий можно получить непосредственно из графа схемы, последовательно выполняя следующие этапы алгоритма:

1. Устанавливаем условные направления для токов ветвей графа.
2. Выбираем дерево графа.
3. Записываем множество ветвей связи с обозначением узлов и условного направления тока.
4. Подсоединяем к дереву одну из ветвей связи и фиксируем возникающий контур.
5. Записываем уравнение контура, считая положительным условное направление тока в подсоединенной ветви связи.
6. Удаляем ранее присоединенную ветвь связи и подсоединяем следующую ветвь из множества ветвей связи. Возникает второй контур, который остается только зафиксировать.
7. Записываем следующее уравнение контура, считая положительным условное направление тока в подсоединенной ветви связи.

Алгоритм заканчивает свою работу тогда, когда исчерпывается множество ветвей связи. Отметим, что каждый контур содержит только одну ветвь связи, добавленную к ветвям дерева. Ток этой ветви нужно считать контурным. Очевидно, что каждое дерево формирует свою систему независимых контуров и свой вектор контурных токов.

Как видно из алгоритма построения системы независимых контуров, разделение ветвей по принадлежности к дереву или связям имеет важное теоретическое значение. С одной стороны, устанавливается порядок в записи структуры электрической цепи. С другой стороны, подчеркивается роль ветвей связи, т.е. контурных токов.

Пример.

1. Покажем действие алгоритма на графе электрической цепи, выбранной нами для примера, рис.2.1.
2. Условные направления токов ветвей выбраны, рис.3.1.
3. Ветви 1, 4, 6 будем считать ветвями дерева графа.
4. Следовательно ветви 2, 3, 5 будут принадлежать связям.
5. Подсоединяем к дереву графа ветвь связи под номером 2.
6. Образуется контур 1, 2, 6. Записываем уравнение контура, считая положительным направление ветви связи:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_6 R_6 = E .$$

7. Удаляем связь 2 и подсоединяем связь 3.

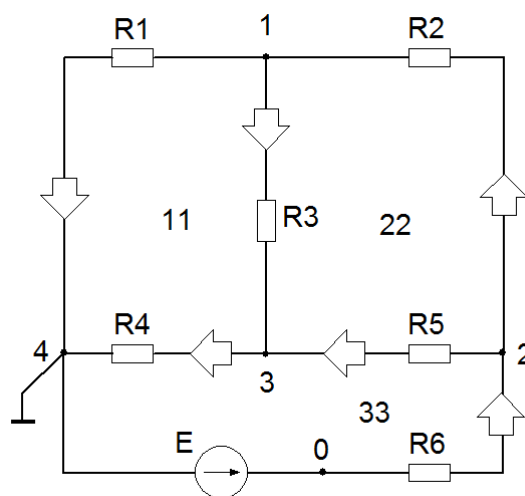


Рис. 3.1. Пример электрической цепи (повтор рис. 2.1)

8. Образуется контур 1, 3, 4. Записываем уравнение контура, считая положительным направление ветви связи 3:

$$-I_1R_1 + I_3R_3 + I_4R_4 = 0.$$

9. Удаляем связь 3 и подсоединяем связь 5.

10. Образуется контур 4, 5, 6. Записываем уравнение контура, считая положительным направление ветви связи 5:

$$I_4R_4 + I_5R_5 + I_6R_6 = E.$$

Из полученных уравнений составляем систему, соблюдая порядок расположения слагаемых в матричных ячейках каждой строки, как принадлежащих дереву, так и принадлежащих связям. У системы уравнений получается следующая фундаментальная матрица контурных инцидентий:

$$[B_f] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

С помощью уравнения (3.9) из блока **K** получаем блок **F** фундаментальной матрицы узловых инцидентий и записывается матрицу:

$$[A_f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица узловых инцидентий может быть получена прямо из графа с помощью системы главных сечений электрической цепи, дерево графа необходимо выбрать предварительно.

Сечением называется множество ветвей, которые пересекаются линией, разделяющей граф на две части. Главное сечение содержит только одну ветвь дерева.

Каждому дереву соответствует своя матрица главных сечений. Дерево (1, 4, 6) образует следующую матрицу главных сечений:

$$[S] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

На рис.3.2 представлены главные сечения графа для выбранного дерева.

Сгруппируем столбцы матрицы главных сечений по принадлежности дереву или связям:

$$[S] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Умножим слева преобразованную матрицу на обратную матрицу блока дерева:

$$T_s^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

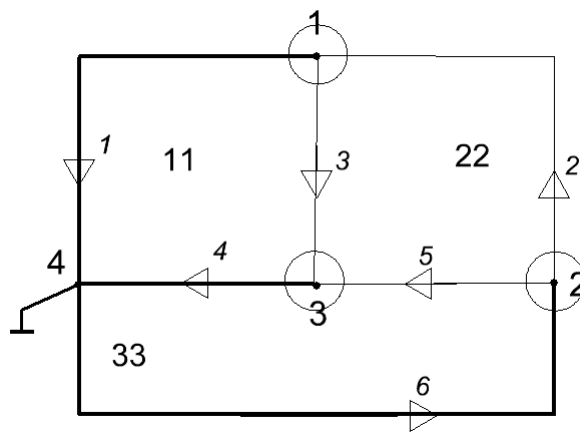


Рис. 3.2. Главные сечения графа, дерево 1, 4, 6.

В результате получим фундаментальную матрицу узловых инцидентий:

$$[A_f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу главных сечений легко сопоставить с рис.3.2.

Итак, выше было показано, что значения контурных токов и узловых напряжений (потенциалов) можно задавать произвольно, не интересуясь значениями параметров, благодаря которым они достигаются. Это свойство было использовано в работе [10] для тиражирования комплектов значений переменных, которым соответствует постоянная структура ветвей электрической схемы.

Были введены понятия операторов Кирхгофа по току и по напряжению:

«Оператор k_1 называется оператором Кирхгофа по току, если он применяется к узловым уравнениям, определяющим распределение токов таким образом, что из равенства $[A] \cdot \bar{I}^b = \bar{0}$ следует $[A] \cdot k_1 \bar{I}^b = \bar{0}$. Отсюда также следует, что контурный ток имеет такое значение \tilde{I}_k , что возможно следующее равенство $k_1 \bar{I}^b = [B]^t \tilde{I}_k$ ».

Оператор Кирхгофа по напряжению k_2 определяется как двойственный оператору по току – заменяются лишь название оператора, матрицы и вектора: **«из равенства $[B] \cdot \bar{U}^b = \bar{0}$ следует $[B] \cdot k_2 \bar{U}^b = \bar{0}$ », а также выполняется «равенство $k_2 \bar{U}^b = [A]^t \tilde{\varphi}$ ».**

Конечно, на практике вначале следует изменить значения контурных токов и узловых потенциалов, чтобы получить изменения токов ветвей и напряжений ветвей. По этой причине следует изменить формулы, приведенные в этой статье:

$$k_1 \bar{I}^b = [B]^t \tilde{I}_k \Rightarrow \tilde{I}^b = [B]^t k_1 \bar{I}_k, \quad (3.10)$$

$$k_2 \bar{U}^b = [A]^t \tilde{\varphi} \Rightarrow \tilde{U}^b = [A]^t k_2 \bar{\varphi}. \quad (3.11)$$

$$\tilde{U}^b = [A_f]^t \cdot \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \bar{\varphi} = [A_f]^t \cdot \begin{bmatrix} 0.93921 \\ 3.815231 \\ -0.286205 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.93921 \\ 3.815231 \\ -0.286205 \\ -0.65301 \\ -2.87602 \\ -3.52903 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}$$

Полученные результаты можно проверить, подставляя значения в формулы транспонированных матриц инцидентий. Аналогично можно проверить выполнение законов Кирхгофа. Следует подчеркнуть, что изменяются только переменные электрической цепи, граф остается постоянным, рис.3.1.

Понятие оператора Кирхгофа дало возможность алгоритмически создавать множества векторов токов и напряжений ветвей, соответствующих одному и тому же графу конкретной электрической цепи. Подчеркнем, что каждый комплект переменных, полученный указанным образом, подчиняется законам Кирхгофа. Такой результат можно достичь только при раздельном анализе частей полной системы уравнений электрической цепи.

4. Уравнение баланса мощностей электрической цепи

«Алгебра тоже есть, конечно, наука о функциях.

Что такое **уравнение** как не *функция*?»

Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

В учебниках по теории электрических цепей, как правило, для проверки результатов расчета токов и напряжений предлагается составить уравнение баланса мощностей на элементах электрической цепи. Для нашего примера, рис.4.1, уравнение баланса мощностей будет иметь следующий вид:

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = -E_1 I_1 - E_3 I_3 + E_5 I_5 + E_6 I_6 \quad (4.1)$$

Отметим, что уравнение баланса мощностей содержит установившиеся значения токов и напряжений. Записано оно только для того, чтобы обратить внимание читателя на структуру уравнения, которая очевидно не зависит от схемы соединений элементов в цепь. Итак, получается, что уравнения, описывающие электрическую цепь, отражают структуру электрической цепи, а уравнение баланса мощностей (4.1) – нет.

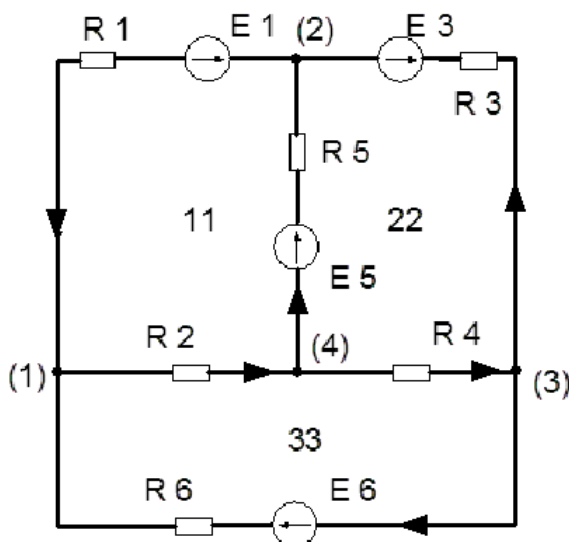


Рис. 4.1. Простая электрическая цепь.

Распределение мощностей по элементам электрической цепи интересовало многих ученых. Действительно, протекающий ток нагревает резисторы, и эта часть энергии безвозвратно уходит из цепи в виде тепла,

согревая окружающие предметы и воздух. Логично задаться вопросом о суммарной величине потерь и о возможности привести их к минимуму. В свое время, Максвелл рассмотрел эту проблему, результатом которого стала теорема о тепле [11]. Текст теоремы приводится ниже:

«В любой системе проводников, не содержащей внутренних электродвижущих сил, тепло, производимое токами, распределенными по закону Ома, оказывается меньше, чем, если бы токи были распределены любым другим способом, совместным с реальными условиями втекания и вытекания тока.

Тепло, которое действительно производится в цепи при выполнении закона Ома, эквивалентно в механическом отношении величине $\sum P_p Q_p$, т.е. сумме произведений количеств электричества, подводимых к разным внешним электродам, на потенциалы соответствующих электродов».

Вероятно, требуются некоторые комментарии к тексту теоремы потому, что Максвелл не упоминает законов Кирхгофа.

Законы Кирхгофа были известны Максвеллу. Несколько выше цитируемого пункта 284, он пишет:

«Теория сопряженных проводников была исследована Кирхгофом. Он сформулировал законы для линейной системы следующим образом, обходя рассмотрение потенциала.

- 1. (Условие «непрерывности»).** В любой точке системы сумма всех токов, текущих к этой точке, равна нулю.
- 2. В любом замкнутом контуре, образованном проводниками, сумма электродвижущих сил, действующих в контуре, равна сумме произведений тока в каждом проводнике на его сопротивление.**

Мы получаем этот результат, складывая уравнения ... для замкнутого контура, когда потенциалы с необходимостью исчезают».

Понятие электрического потенциала было необходимо Максвеллу для доказательства теоремы о тепле, поэтому он легко составляет уравнение баланса потенциалов узлов контура и скрывает их при переходе к понятию напряжения ветви.

Например, для первого контура (1, 2, 5) электрической цепи рис.4.1, уравнение баланса узловых потенциалов будет иметь вид:

$$(\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_4) + (\varphi_4 - \varphi_2) = U_1^b + U_2^b + U_5^b = 0. \quad (4.2)$$

Однако, если уравнение второго закона Кирхгофа (4.2) записать в другой форме, то получается выражение, которое использовал Г. Ом при изучении контура с тремя проводящими телами

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_5 R_5 = -E_1 + E_5.$$

Таким образом, Максвелл считал, что второй закон является калькой уравнений Ома. Кроме того, он отрицал значение первого закона Кирхгофа, называя баланс токов в узле условием «непрерывности» потока.

Теорему о тепле требовалось доказать, поэтому ученый начинает с положения, которое не вызывает споров. Суммарная мощность цепи находится с помощью следующего уравнения:

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k \cdot I_k, \quad (4.3)$$

где φ_k – потенциал зажима k -того внешнего источника;

I_k – ток, поступающий через зажим k -того источника.

Тепло, излучаемое элементами цепи, составляет часть суммарной мощности, поступающей в электрическую цепь (4.3). Полное доказательство теоремы занимает весь пункт 283 [11], содержание которого излагается ниже с заменой авторских обозначений физических величин современными символами.

Механический эквивалент количества тепла, производимого в единицу времени в проводнике с сопротивлением R при протекании тока I определяется выражением:

$$J \cdot P = R \cdot I^2, \quad (4.4)$$

где J – численный коэффициент, который для проводника равен 0,24.

Проводник, соединяющий узлы A_p и A_q , имеет проводимость G_{pq} и сопротивление R_{pq} , причем

$$G_{pq} \cdot R_{pq} = 1. \quad (4.5)$$

Ток в этом проводнике определяется по закону Ома

$$I_{pq} = G_{pq} (\varphi_p - \varphi_q). \quad (4.6)$$

Предположим, что значение тока не определяется законом Ома, а равно

$$I_{pq}^x = I_{pq} + \Delta I_{pq}. \quad (4.7)$$

Чтобы определить тепло, производимое в системе, нам следует найти сумму всех величин вида $R_{pq} (I_{pq}^x)^2$ или

$$JP = \sum R_{pq} (I_{pq}^x)^2 = \sum (R_{pq} I_{pq}^2 + 2R_{pq} I_{pq} \Delta I_{pq} + R_{pq} \Delta I_{pq}^2). \quad (4.8)$$

Подставляя значение тока (4.6) и учитывая соотношение (4.5) между проводимостью G_{pq} и сопротивлением R_{pq} , получаем

$$\sum \left[(\varphi_p - \varphi_q) (I_{pq} + 2\Delta I_{pq}) + R_{pq} \Delta I_{pq}^2 \right]. \quad (4.9)$$

Теперь, поскольку и величины I_{pq} и величины ΔI_{pq} должны удовлетворять условиям непрерывности в точке A_p , мы имеем

$$Q_p = I_{p1} + I_{p2} + \dots + I_{pn}, \quad (4.10)$$

или для токов (4.7)

$$Q_p = I_{p1}^x + I_{p2}^x + \dots + I_{pn}^x, \quad (4.11)$$

и, следовательно,

$$0 = \Delta I_{p1} + \Delta I_{p2} + \dots + \Delta I_{pn}. \quad (4.12)$$

Поэтому, складывая все члены (4.9), мы находим

$$\sum \left[R_{pq} (I_{pq}^x)^2 \right] = \sum \varphi_p Q_p + \sum R_{pq} \Delta I_{pq}^2. \quad (4.13)$$

Поскольку величины R_{pq} всегда положительные, а величины ΔI_{pq}^2 – положительные после возведения в степень, то последний член этого равенства должен быть в любом случае положительным. Следовательно, первый член правой части дает минимальное значение всего выражения, соответствующее тому случаю, когда величина ΔI_{pq} в каждом проводнике обращается в нуль и ток в каждом проводнике определяется законом Ома.

Доказательство, приведенное из источника [11], требует некоторых пояснений.

Во-первых, при переходе от формулы (4.9) к (4.13) надо отметить, что потенциал φ_q приравнивается нулю, тогда

$$\sum (\varphi_p I_{pq} + 2\varphi_p \Delta I_{pq} + R_{pq} \Delta I_{pq}^2). \quad (4.14)$$

Второе слагаемое (4.14), в соответствие с равенством (4.12), после суммирования обратится в ноль.

Во-вторых, выражения (4.10), (4.11) не равны нулю только в том случае, когда суммируются либо модули токов, либо токи одного знака, например, ориентированные к узлу (от узла). Если, учитывая знак плюс в выражениях (4.10), (4.11), будем считать, что просуммированы только условно положительные токи, тогда выражение (4.13) справедливо. В противном случае каждый ток будет учтен дважды.

Не будем разбирать текст авторского вывода по результатам рассмотрения формулы (4.13). Если предположить, что величина ΔI_{pq} , значительно меньше единицы, то ΔI_{pq}^2 – величина второго порядка малости, а, следовательно, ей можно пренебречь.

Тогда левая часть выражения (4.13) всегда будет больше правой части, т.е. мощность токов цепи до вариации их значений всегда будет меньше мощности токов, распределенных другим способом.

Теорема Максвелла фактически утверждает, что структура электрической цепи оказывает влияние на распределение мощности (тепла) между резисторами. Минимум потерь энергии достигается за счет связности графа электрической схемы. Взаимовлияние контурных токов (потенциалов узлов) приводит к тому, что в ветвях электрической цепи устанавливаются

значения токов, которые соответствуют минимуму мощности, рассеиваемой резисторами. Уравнение (4.1) не указывает явно на роль структуры в распределение мощности между элементами цепи, поэтому попробуем изменить подход к анализу этой проблемы.

Поступим так, как это делал Максвелл, доказывая теорему о тепле. Рассмотрим распределение мощности на каждой ветви электрической цепи отдельно. Исследование будем проводить на примере электрической цепи рис.4.1. Распределение мощностей по элементам электрической цепи характеризует ее энергетическое состояние, а поэтому представляется важным рассмотреть баланс мощностей схемы как сумму уравнений баланса отдельных ветвей. Баланс мощностей элементов ветви запишем, используя уравнение (4.15) [12]:

$$\left(\varphi_i - \varphi_j\right) I_n + E_n I_n = I_n^2 R_n, \quad (4.15)$$

где φ_i, φ_j – потенциалы узлов ветви n ;

I_n – величина тока ветви;

E_n – номинал источника ЭДС ветви;

R_n – величина сопротивления резистора ветви.

Составим уравнение баланса мощностей (4.15) для каждой ветви электрической цепи рис. 4.1 и объединим их в систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi_2 - \varphi_1) I_1 - E_1 I_1 = R_1 I_1^2 \\ (\varphi_1 - \varphi_4) I_2 = R_2 I_2^2 \\ (\varphi_3 - \varphi_2) I_3 - E_3 I_3 = R_3 I_3^2 \\ (\varphi_4 - \varphi_3) I_4 = R_4 I_4^2 \\ (\varphi_4 - \varphi_2) I_5 + E_5 I_5 = R_5 I_5^2 \\ (\varphi_3 - \varphi_1) I_6 + E_6 I_6 = R_6 I_6^2 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

После суммирования уравнений системы (4.16) получим:

$$\begin{aligned} & \varphi_1(-I_1+I_2-I_6)+\varphi_2(I_1-I_3-I_5)+\varphi_3(I_3-I_4+I_6)+\varphi_4(-I_2+I_4+I_5) \\ & -E_1I_1-E_3I_3+E_5I_5+E_6I_6=R_1I_1^2+R_2I_2^2+R_3I_3^2+R_4I_4^2+R_5I_5^2+R_6I_6^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Первые четыре слагаемых выражения равны нулю, так как они содержат сомножители (в скобках), представляющие собой сумму токов соответствующих узлов, т. е. в соответствии с первым законом Кирхгофа равны нулю. Если устранить их из выражения (4.17), то мы получим привычное уравнение баланса мощностей электрической цепи:

$$-E_1I_1-E_3I_3+E_5I_5+E_6I_6=R_1I_1^2+R_2I_2^2+R_3I_3^2+R_4I_4^2+R_5I_5^2+R_6I_6^2. \quad (4.18)$$

Произведем тождественное преобразование уравнения (4.18), представленное ниже:

$$\begin{aligned} 0= & I_1(R_1I_1+E_1)+I_2(R_2I_2)+I_3(R_3I_3+E_3)+I_4(R_4I_4)+I_5(R_5I_5-E_5)+ \\ & +I_6(R_6I_6-E_6). \end{aligned} \quad (4.19)$$

В скобках уравнения (4.19) заключены выражения для напряжений ветвей. Другими словами, полученное уравнение является результатом умножения векторов тока и напряжения ветвей (4.20). Результат (4.19) легко проверить, выполнив умножение векторов по формуле

$$\left[\bar{I}^b \right]^t \left[\bar{U}^b \right] = 0, \quad (4.20)$$

где $\left[\bar{I}^b \right]$, $\left[\bar{U}^b \right]$ – вектора токов и напряжений ветвей.

В предыдущих разделах было показано, что главную роль при составлении математического описания электрической цепи играет дерево графа схемы. Это можно отметить также в записи уравнения баланса мощностей (4.19), если преобразовать его тождественным образом:

$$\begin{aligned} & \left[I_2(R_2I_2)+I_4(R_4I_4)+I_5(R_5I_5-E_5) \right] = \\ & = - \left[I_1(R_1I_1+E_1)+I_3(R_3I_3+E_3)+I_6(R_6I_6-E_6) \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Уравнение (4.19) разделено на две части, первая из которых содержит мощности ветвей дерева (2, 4, 5), а вторая – мощностей ветвей связи (1, 3, 6),

(4.21). Число деревьев графа электрической цепи, рис.4.1, равно 16-ти и для каждого из них уравнение баланса мощностей может быть записано в виде уравнения (4.21).

Итак, само уравнение баланса мощностей электрической цепи (4.1) не отражает явно структуру электрической цепи. Однако связность элементов цепи обеспечивает такое распределение токов, которое минимизирует потери энергии в виде выделения тепла резисторами. Минимум потерь энергии доказана Максвеллом для цепи, состоящей только из резисторов, однако это не мешает утверждать, что в достижении минимума потерь энергии главную роль играет структура электрической цепи.

Уравнение (4.21) читается следующим образом:

Сумма мощностей ветвей дерева равна сумме мощностей ветвей связи с обратным знаком.

Внесем знак минус в квадратные скобки уравнения (4.21):

$$\begin{aligned} \left[I_2(R_2 I_2) + I_4(R_4 I_4) + I_5(R_5 I_5 - E_5) \right] = & \quad (4.22) \\ = \left[I_1(-R_1 I_1 - E_1) + I_3(-R_3 I_3 - E_3) + I_6(-R_6 I_6 + E_6) \right]. \end{aligned}$$

Уравнение (4.22) справедливо для любого дерева схемы рис.4.1 и может рассматриваться как отражение факта связности электрической цепи. Отметим, что умножение на -1 правой части уравнения (4.21) эквивалентно изменению условного направления тока в ветвях связи, т.е. контурного тока.

Пример. Примем следующие параметры для электрической цепи рис.4.1:

$$\begin{array}{llll} R_1 = 10\text{ом}; & R_4 = 25\text{ом}; & E_1 = 10\text{В}; & E_5 = 20\text{В}; \\ R_2 = 15\text{ом}; & R_5 = 30\text{ом}; & E_3 = 15\text{В}; & E_6 = 25\text{В}. \\ R_3 = 20\text{ом}; & R_6 = 35\text{ом}. & & \end{array}$$

Токи ветвей электрической цепи, полученные расчетом:

$$\begin{array}{ll} I_1 = -0.52788\text{А}; & I_4 = -0.17918\text{А}; \\ I_2 = 0.220074\text{А}; & I_5 = 0.399257\text{А}; \\ I_3 = -0.92714\text{А}; & I_6 = 0.747955\text{А}. \end{array}$$

После подстановки данных в формулу (4.22) получаем:

$$-1.67381 = -1.67381.$$

Мощность ветвей дерева равна мощности ветвей связи.

Запишем формулу (4.20) так, чтобы было видно структуру значения мощности электрической цепи:

$$P = (\bar{I}^b)^t \bar{U}^b = \bar{I}_k^t [B_f] [A_f]^t \bar{\varphi}. \quad (4.23)$$

Фундаментальные матрицы инциденций графа электрической цепи, рис.4.1, для выбранного дерева (2, 4, 5) записаны ниже:

$$[B_f] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad [A_f] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Расчетным путем установлены величины контурных токов и узловых потенциалов:

$$\begin{aligned} I_{11} &= -0.52788 & \varphi_1 &= 0.067173 \\ I_{22} &= -0.92714 & \varphi_4 &= -4.00647 \\ I_{33} &= 0.747955 & \varphi_2 &= 3.870691 \end{aligned}$$

После подстановки матриц и значений переменных в уравнение (4.23), а также после выполнения указанных операций получаем, что выражение для мощности P равно нулю. Другим словами баланс мощностей выполняется.

Рассматривая баланс мощностей в виде уравнения (4.23), отметим, что структура электрической цепи учитывается, но произведение матриц инциденций равно нулю:

$$[B_f] [A_f]^t = [0].$$

В этом легко убедиться после подстановки фундаментальных матриц, приведенных выше.

5. Особый случай уравнения баланса мощностей электрической цепи

«В тот день, когда наука начнет изучать **не только физические явления**, она достигнет большего прогресса за одно десятилетие, чем за все предыдущие столетия своего существования»
Никола Тесла

Еще раз запишем уравнение баланса мощностей отдельной ветви под номером n , узлы которой i, j [12]:

$$\left(\varphi_i - \varphi_j\right) I_n + E_n I_n = R_n I_n^2. \quad (5.1)$$

Преобразуем уравнение (5.1) следующим образом:

$$\left(\varphi_i - \varphi_j\right) I_n = (I_n R_n - E_n) I_n. \quad (5.2)$$

В уравнении (5.2), в круглых скобках, по обе стороны знака равно находятся выражения для напряжения ветви n , записанные с помощью разных физических величин. Умножим уравнение (слева и справа) на одну и ту же величину, чтобы не нарушать равенства:

$$\left(\varphi_i - \varphi_j\right) X I_n = (I_n R_n - E_n) X I_n \quad (5.3)$$

Проделаем эту операцию с уравнениями (5.2) для каждой ветви системы уравнений электрической цепи, рис.4.1:

$$\begin{cases} a(\varphi_2 - \varphi_1) I_1 = a(E_1 + R_1 I_1) I_1 \\ b(\varphi_1 - \varphi_4) I_2 = b(0 + R_2 I_2) I_2 \\ c(\varphi_3 - \varphi_2) I_3 = c(E_3 + R_3 I_3) I_3 \\ d(\varphi_4 - \varphi_3) I_4 = d(0 + R_4 I_4) I_4 \\ e(\varphi_4 - \varphi_2) I_5 = e(-E_5 + R_5 I_5) I_5 \\ f(\varphi_3 - \varphi_1) I_6 = f(-E_6 + R_6 I_6) I_6 \end{cases}. \quad (5.4)$$

В результате суммирования уравнений (5.4) получим:

$$\begin{aligned} & \varphi_1(-aI_1 + bI_2 - fI_6) + \varphi_2(aI_1 - cI_3 - eI_5) + \varphi_3(cI_3 - dI_4 + fI_6) + \\ & + \varphi_4(-bI_2 + dI_4 + eI_5) = U_1^b aI_1 + U_2^b bI_2 + U_3^b cI_3 + U_4^b dI_4 + U_5^b eI_5 + U_6^b fI_6. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Значения коэффициентов в уравнении (5.5) легко подобрать таким образом, чтобы первый закон Кирхгофа (на том же графе) выполнялся для нового множества токов ветвей $\{XI_n\}$: $\{aI_1, bI_2, cI_3, dI_4, eI_5, fI_6\}$. В таком случае левая часть равенства (5.5) будет равна нулю. Результат суммирования системы из уравнений (5.2) может дать нам традиционный баланс мощностей электрической цепи, если разделить правые и левые части каждого уравнения ветви на величину неопределенного коэффициента из (5.6):

$$0 = \sum_{n=1}^n (I_n R_n - E_n) X_n I_n. \quad (5.6)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (5.4), в котором ток первой ветви входит дважды – в исходном и преобразованном виде. Из этого уравнения системы (как и всех остальных) следует, что переменные величины не связаны законом Ома, например:

$$\frac{R_1 I_1}{a I_1} \neq R_1.$$

Отметим, что слагаемые правой части особого баланса (5.5) имеют размерность мощности, но на каком элементе цепи рис.4.1 она выделяется указать нельзя, хотя вектор напряжений остается неизменным. Значения токов $X_n I_n$ и I_n отвечают законам Кирхгофа и соответствуют одной структуре электрической цепи, упомянутой выше.

Можно заключить, что токи могут быть измерены в разных схемах, обладающих одним и тем же графом. Величины слагаемых уравнений системы (5.5) принято называть псевдо-мощностями. В середине прошлого века возможность такого равенства начали осознавать ученые разных стран. Представим их результаты, расположенные в хронологическом порядке.

5.1. Монография профессора Э.В. Зеляха.

В 1951 году была опубликована монография [13], которая отличалась от многих других определенными новациями. Прежде всего, отметим, что были введены матричные уравнения, которые проще привычных систем уравнений. Вероятно, что впервые новый математический аппарат был применен к анализу распределения мощностей в электрической цепи. Казалось бы, что нового можно получить при исследовании вопроса, который казался совершенно ясным, ... но предоставим слово автору монографии, в которой все начинается с обновления определения мощности ветви:

«В электротехнике широко применяется понятие «*мощность*». **Мгновенной мощностью** называют произведение значений напряжения на ток.

С помощью геометрической теории схем можно легко показать справедливость следующего положения, определяющего баланс мощностей в схеме:

сумма мгновенных мощностей, доставляемых действующими в схеме источниками, равна сумме мгновенных мощностей, потребляемых или запасаемых остальными элементами схем [13]».

Формальная запись этого утверждения приводится в монографии для схем, содержащих ветви с источниками ЭДС, либо с источниками тока:

$$\begin{aligned} [\bar{E}]^t [\bar{I}] &= [\bar{U}_0]^t [\bar{I}], \\ [\bar{J}]^t [\bar{U}] &= [\bar{I}_0]^t [\bar{U}], \end{aligned} \tag{5.8}$$

где $[\bar{E}]$ – вектор источников ЭДС;

$[\bar{J}]$ – вектор источников тока;

$[\bar{U}_0]$, $[\bar{I}_0]$ – вектора напряжений и токов элементов ветвей;

$[\bar{U}]$, $[\bar{I}]$ – вектора напряжений и токов ветвей.

Здесь подчеркнем, что в порядке исключения, уравнения (5.8) записаны в обозначениях величин, которые применил автор монографии.

Из определения *мгновенной* мощности следует, что вектора напряжений и токов в выражениях (5.8) содержат только численные (мгновенные) значения соответствующих величин. Другими словами, элементами векторов являются числа – значения величин в некоторый момент времени. Отметим, что необходимость одновременных измерений элементов векторов \bar{I} , \bar{U}_0 или \bar{U} , \bar{I}_0 нигде не акцентируется.

Кроме того, следует отметить, что после выполнения операции умножения знак каждого из слагаемых в формуле (5.8) определяется на основании знаков сомножителей, которые устанавливаются из предположения, что ток и напряжение на резисторе имеют одну и ту же ориентацию. Таким образом, значение мощности, выделяемой на резисторе, имеет знак плюс, хотя эта энергия (в виде тепла) теряется для электрической цепи. В польской электротехнике принято правило, в соответствие с которым ток и напряжение на резисторе имеют противоположную ориентацию. Выделяемая на резисторе мощность имеет отрицательный знак, что более соответствует физике процесса. Однако правильное применение любого из этих формальных правил приводит к одному и тому же результату.

Итак, единственным условием для величин векторов тока и напряжения в (5.8) является обязательное соответствие их значений законам Кирхгофа, что, безусловно, обеспечивается благодаря связности графа электрической цепи (упоминание о законе Ома отсутствует). На практике измерения токов и напряжений производится только с определенной погрешностью, поэтому, строго говоря, пары переменных одной ветви (элемента) тоже соответствуют закону Ома только с погрешностью. Монография является библиографической редкостью, поэтому приводим доказательство справедливости выражения (5.8) подробно, в соответствие с текстом работы [13]:

«Для простоты ограничимся доказательством данного положения для схемы, в которой имеются источники лишь одного вида: либо источники напряжения, либо источники тока».

Пусть каждая ветвь схемы состоит из источника напряжения E , J и пассивного элемента R , рис.5.1.

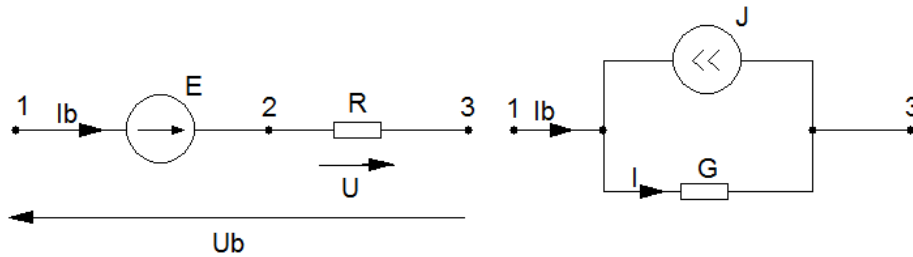


Рис. 5.1. Разные типы ветвей.

Мысленно присоединим к точкам 1 и 3 ветви, содержащей источник ЭДС, сопротивление $R = \infty$ только для того, чтобы получить замкнутый контур. Проведем подобный эксперимент с каждой ветвью схемы и запишем на основании закона Кирхгофа уравнение в новых обозначениях:

$$U^b + E = U, \quad (5.9)$$

где U^b – напряжение ветви;

E – напряжение на источнике ЭДС;

U – напряжение на пассивном элементе.

Соответственно, для всей схемы уравнение (5.9) в матричной форме будет иметь вид:

$$[\bar{U}^b] + [\bar{E}] = [\bar{U}]. \quad (5.10)$$

Преобразуем уравнение (5.10). Умножим слева каждый член равенства (5.10) на матрицу контурных инциденций $[B]$ схемы:

$$[B][\bar{U}^b] + [B][\bar{E}] = [B][\bar{U}] \quad (5.11)$$

Первое слагаемое выражения (5.11) равно нулю, так как является записью второго закона Кирхгофа в матричной форме. Удалим это слагаемое из уравнения. Оставшиеся члены уравнения (5.11) умножим слева на вектор контурных токов $[\bar{I}^k]^t$:

$$[\bar{I}^k]^t [B] [\bar{E}] = [\bar{I}^k]^t [B] [\bar{U}]. \quad (5.12)$$

Первые два сомножителя уравнения (5.12) дают вектор токов ветвей. Произведем замену этих сомножителей на обозначение тока ветви. В итоге получаем баланс мощностей в матричной форме

$$[\bar{I}^b]^t [\bar{E}] = [\bar{I}^b]^t [\bar{U}], \quad (5.13)$$

что и требовалось доказать.

Для второго типа ветви (рис. 5.1) доказательство строится аналогично. Начнем с записи выражения, двойственного уравнению (5.10):

$$[\bar{I}^b] + [\bar{J}] = [\bar{I}], \quad (5.14)$$

где I^b – ток ветви;

J – номинал источника тока;

I – ток элемента ветви.

Умножаем слева члены уравнения (6.14) на матрицу узловых инциденций $[A]$ той же самой схемы:

$$[A][\bar{I}^b] + [A][\bar{J}] = [A][\bar{I}]. \quad (5.15)$$

Первое слагаемое выражения (5.15) равно нулю, так как является записью первого закона Кирхгофа в матричной форме. Удалим это слагаемое из уравнения. Оставшиеся члены уравнения (5.15) умножим слева на вектор узловых потенциалов $[\bar{\varphi}]^t$:

$$[\bar{\varphi}]^t [A][\bar{J}] = [\bar{\varphi}]^t [A][\bar{I}]. \quad (5.16)$$

Первые два сомножителя уравнения (5.16) дают вектор напряжений ветвей. Произведем замену этих сомножителей на обозначение напряжения ветви. В итоге получим баланс мощностей в матричной форме

$$[\bar{U}^b]^t [\bar{J}] = [\bar{U}^b]^t [\bar{I}], \quad (5.17)$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, что выражения (5.13) и (5.17) связаны между собой отношением двойственности. Заметим также, что каждое из этих соотношений получено только как результат применения законов Кирхгофа. Есть все основания для важного теоретического вывода: каждое из уравнений (5.13), (5.17) **«вытекает также и из закона сохранения энергии, которому удовлетворяют законы Кирхгофа» [14] .**

Уравнения (5.13), (5.17) преобразуем к универсальному виду с помощью простых алгебраических операций. Ход преобразований покажем на примере уравнения (5.13):

$$\begin{aligned} [\bar{I}^b]^t \{ [\bar{E}] - [\bar{U}] \} &= 0, \\ [\bar{I}^b]^t [\bar{U}^b] &= 0. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Результат преобразований уравнения (5.17) запишем по уравнению (5.18) как двойственный

$$[\bar{U}^b]^t [\bar{I}^b] = 0. \tag{5.18*}$$

Еще раз отметим, что справедливость уравнений (5.13), (5.17) доказана только с помощью законов Кирхгофа. Конечно, традиционно считают, что уравнения баланса подтверждают справедливость закона сохранения энергии при условии, что соответствующие элементы векторов отвечают требованиям закона Ома. Однако при выводе матричного уравнения закон Ома не применялся, поэтому следует предположить, что уравнение (5.8) справедливо не только для привычного случая.

Словесная формулировка закона сохранения энергии в электрической цепи, приведенная выше, не содержит прямого упоминания о законе Ома, хотя в реальной схеме этот закон, безусловно, действует. Значение мгновенной мощности получают из значений мгновенных напряжений и токов, но нигде не сказано, что они должны соответствовать одному моменту времени. Одновременное измерение напряжений и токов ветвей организовать сложно, поэтому в процессе доказательства **не исключается возможность того, что численные значения векторов токов и напряжений**

соответствуют разным моментам времени. Во всяком случае, в монографии замечаний по этому поводу нет.

Надо помнить, что выпуск этой книги в свет сопровождался событиями, далекими от традиционных научных споров. В стране проходила идеологическая кампания борьбы с абстракционизмом и преклонением перед Западом, которая известна широкой публике как гонения против определенных теорий в биологии. Надо отметить, что эти политические репрессии были достаточно эффективными, они действительно замедлили развитие отечественной генетики.

Монографию [13] могла постигнуть та же участь, поэтому наиболее «абстрактные» положения книги были изложены в стиле «только для понимающих», а весь текст был защищен цитатой, которую имеет смысл привести полностью:

«От живого созерцания к абстрактному мышлению и *от него к практике* – таков диалектический путь познания *истины*, познания объективной реальности».

(В.И.Ленин. Философские тетради, 1947 г., стр. 146)

Дата издания спасительных тетрадей приведена потому, что она помогает приблизительно установить период, в котором формировались «крамольные» мысли автора. Второй точкой отсчета является 1950 год, который значится под авторским предисловием к книге.

Блюстителей идеологической чистоты не могли не возмущать такие понятия как принцип дуальности (двойственности), применение его к дуальным (двойственным) схемам и, особенно, доказательство достаточно абстрактного равенства (5.18). Но никто из бойцов идеологического фронта не отважился спорить с вождем мирового пролетариата. Профессор понимал, как важно знать произведения классиков марксизма.

5.2. Журнальная статья Tellegen B.D.H.

В статье [15], увидевшей свет в 1952 году, автор приводит доказательство общей теоремы теории электрических цепей, с помощью которой, как он отмечает, можно установить справедливость уравнения

баланса мощностей, теоремы взаимности и других известных соотношений. Итак, статья начинается с утверждения:

«Рассуждения, ведущие к этой теореме, обязательно присутствуют в различных исследованиях цепей, но сама теорема, насколько это известно автору, никогда не была сформулирована явно».

Б. Теллеген решил доказать теорему, исходя из самых общих соображений. Заметим, что законы Кирхгофа были единственными соотношениями, соблюдение которых акцентировалось в работе [15]. Формулировку теоремы автор отработал хорошо, в чем может убедиться каждый читатель:

«В цепи произвольной конфигурации предположим существование токов ветвей i таких, что для каждого узла выполняется равенство $\sum i = 0$, предположим существование напряжений ветвей v таких, что для каждого контура выполняется равенство $\sum v = 0$ и для каждой ветви определим положительное направление тока от $+$ к $-$ обозначенной полярности, рис. 5.2. Тогда выполняется уравнение $\sum i \cdot v = 0$, где суммирование проведено по всем ветвям цепи».

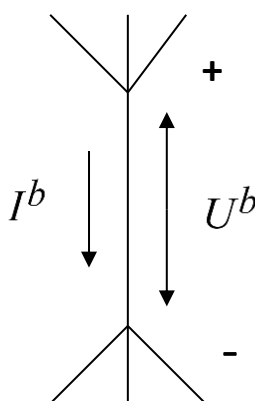


Рис. 5.2. Положительное направление тока и напряжения ветви

Из приведенной иллюстрации видно, что Б. Теллеген предполагал различную ориентацию стрелки напряжения по отношению к стрелке тока, т. е. он не исключал наличия источников ЭДС в любой ветви схемы.

Доказательство. Обозначим узлы ветви индексами k и l , напряжение этой ветви находим по формуле $U_{kl}^b = \varphi_k - \varphi_l$. Ток той же ветви I_{kl}^b обозначим аналогично напряжению, тогда слагаемое баланса мощностей запишется следующим образом

$$I_{kl}^b U_{kl}^b = I_{kl}^b (\varphi_k - \varphi_l) = I_{kl}^b \varphi_k - I_{kl}^b \varphi_l. \quad (5.19)$$

Применим преобразование (5.19) ко всем ветвям электрической цепи, тогда число слагаемых в выражении $\sum_{i=1}^n I_i^b U_i^b = 0$ возрастет в два раза.

Сгруппируем слагаемые вокруг потенциалов каждого из узлов цепи. Сомножителем в каждой группе будет сумма токов соответствующего узла. По первому закону Кирхгофа эта сумма равна нулю, а, следовательно, баланс мощностей будет равен нулю

$$\sum_{i=1}^n I_i^b U_i^b = 0. \quad (5.20)$$

Равенство (5.20) доказано исключительно с помощью законов Кирхгофа.

Уравнение (5.20) будет справедливо даже тогда, когда одно (несколько) из слагаемых будет перенесено в правую часть с противоположным знаком. Физически это можно трактовать как «вынос» одной из ветвей схемы за пределы основной части электрической цепи, т. е. образование внешней ветви. Тогда равенство (5.20) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n-1} I_i^b U_i^b = I_n^b U_n^b. \quad (5.21)$$

Если число внешних ветвей увеличить до двух, то появится возможность с помощью главной теоремы доказать справедливость принципа взаимности. В статье [15] приводится доказательство этого принципа с помощью главной теоремы теории электрических цепей. В современных учебниках доказательство принципа взаимности приводится аналогично, но без упоминания этой теоремы.

Итак, в одной из внешних ветвей размещают источник, а в другой – амперметр и производят первое измерение. Затем амперметр и источник меняют местами и производят второе измерение. Результаты измерений

(напряжение, ток) в каждом из двух включений рассматриваются как данные, соответствующие двум разным состояниям электрической цепи: основное и второстепенное. Схема соединений элементов в цепь остается без изменений, таким образом, не нарушено главное условие – соответствие множеств измеренных величин законам Кирхгофа. Имеем полное право аналогично (5.21) записать равенство, в котором сочетаются данные измерений обоих состояний:

$$\begin{aligned} I_1 U'_1 + I_2 U'_2 &= \sum_{i=1}^{n-2} I_i U'_i \\ I'_1 U_1 + I'_2 U_2 &= \sum_{i=1}^{n-2} I'_i U_i \end{aligned} \quad (5.22)$$

Система уравнений (5.22) формально представляет запись принципа взаимности, однако, по сути, является одним из вариантов рассматриваемой теоремы.

Текст теоремы в оригинале приводим для того, чтобы каждый мог проверить точность перевода.

2. The general theorem

We prove the following

Theorem :

In a network configuration, imagine branch currents i such that for every node $\sum i = 0$, imagine branch voltages v such that for every mesh $\sum v = 0$, and for every branch let the positive direction of the current be from the + to the – denoting the positive polarity of the voltage (fig. 1). Then $\sum iv = 0$, where the summation is over all branches.

5.3. Теорема Б. Теллегена в изложении П. Пенфилда.

Публикации П. Пенфилда возобновили интерес научного мира к теореме Б. Теллегена. В одной из его статей теорема была сформулирована следующим образом, [16]:

«если i'_1, i'_2, \dots, i'_b являются токами ветвей цепи N' из b ветвей, а $v''_1, v''_2, \dots, v''_b$ являются напряжениями ветвей другой цепи N'' из b ветвей, где N' и N'' имеют общий линейный граф, однако, могут быть разными, то справедливо равенство:

$$\sum_{\alpha=1}^b i'_{\alpha} v''_{\alpha} = 0, \quad (5.23)$$

где суммирование производится по всем ветвям цепи. Правило знаков, принятых для напряжений и токов, таково, что если бы N' и N'' были тождественны, то произведение $i'_{\alpha} v''_{\alpha}$ соответствовало мгновенной мощности».

Отметим, что по сравнению с формулировкой теоремы Теллегеном в определении Пенфилда используется понятие мгновенной мощности. Конечно, Теллеген в статье [15] подробно рассматривает применение теоремы к цепям переменного тока, а там численные значения напряжений и токов могут соответствовать не только одинаковым моментам времени.

Новым в формулировке Пенфилда является то, что он рассматривает **две независимые электрические цепи одинаковой структуры**. Одна цепь используется для измерения (вычисления) токов, другая – для измерения (вычисления) напряжений, однако мощность, найденная как произведение этих величин, нельзя отнести ни к одной из этих цепей.

Идея Пенфилда оригинально представлена в записи уравнения из источника [17]. Имеются две электрические цепи одинаковой структуры, переменные которых отмечаются буквами **a** и **b** в верхнем индексе. Уравнения баланса мощностей этих цепей будут иметь следующий вид:

$$\sum_{k=1}^l v_k^a i_k^a = \sum_{k=1}^l v_k^b i_k^b = 0,$$

где v, i – напряжение и ток ветви;

l – количество ветвей цепи.

Равенство не нарушается, если взаимно поменять индексы одной из переменных:

$$\sum_{k=1}^l v_k^a i_k^b = \sum_{k=1}^l v_k^b i_k^a = 0. \quad (15.23^*)$$

Уравнение (15.23*) представляет баланс псевдо-мощностей.

Конечно, всегда есть возможность образовать вспомогательную электрическую цепь с тем же количеством ветвей и с той же схемой соединения элементов. Параметры ветвей вспомогательной цепи легко определить как отношение соответствующих напряжений и токов, измеренных (рассчитанных) на двух исходных цепях. В случае вспомогательной цепи полученные значения мощности обретают физический смысл, т.к. соответствуют ветвям вспомогательной цепи. Таким образом, мы получаем алгоритм построения целого класса цепей одинаковой структуры [18].

Приведем формулировку теоремы согласно первоисточнику [10]:

«Пусть Λ' - оператор Кирхгофа по току, действие которого по отношению к множеству токов i_α ветвей, принадлежащих цепи из b ветвей, заключается в создании нового множества «токов $\Lambda' i_\alpha$ » b ветвей, которое подчиняется первому закону Кирхгофа. Пусть также Λ'' - оператор Кирхгофа по напряжению, который может произвести действие над множеством напряжений u_α ветвей, превращая его в новое множество «напряжений $\Lambda'' u_\alpha$ » ветвей, подчиняющихся второму закону Кирхгофа.

Используя введенные понятия, запишем равенство:

$$\sum_{\alpha} \Lambda' i_{\alpha} \Lambda'' u_{\alpha} = \sum_p \Lambda' i_p \Lambda'' u_p, \quad (5.23^{**})$$

где $i_{\alpha} u_{\alpha}$ – мгновенная мощность, поступающая в ветви схемы;

$i_p u_p$ – мгновенная мощность, поступающая от источников;

Λ', Λ'' - операторы Кирхгофа, которые могут быть представлены

последовательностью операторов Кирхгофа, действующих в любом порядке, который имеет какой-то смысл».

Как показано в разделе 3 настоящей работы, операторы Кирхгофа применимы как к векторам контурных токов, так и к векторам узловых потенциалов. В примере численные значения этих векторов были заданы произвольно, т.е. были созданы условия, когда токи и напряжения ветвей рассчитываются в разных схемах с одной и той же структурой. Баланс мощностей ветвей цепи соблюдается даже при таких значениях, что легко проверить:

$$\bar{I}_k^t = [2 \ 3 \ 4] \Rightarrow (\bar{I}^b)^t = [-1 \ 7 \ 6 \ 2 \ 3 \ 4],$$

$$\bar{\varphi}^t = [5 \ 6 \ 7] \Rightarrow (\bar{U}^b)^t = [5 \ 6 \ 7 \ -12 \ -1 \ -13].$$

Найдем значение псевдо-мощности:

$$(\bar{I}^b)^t \cdot \bar{U}^b = [-5 + 42 + 42 - 24 - 3 - 52] = -84 + 84 = 0.$$

В монографии П. Пенфилда [16] доказательство теоремы приводится в матричной форме. Оригинал этой книги недоступен даже через Интернет, а в переводе ее на русский язык [19] авторские выкладки изменили. Поэтому фрагмент доказательства теоремы приводим по файлу, взятому из электронной энциклопедии (5.24):

$$\begin{aligned} [\bar{U}^b]^t [\bar{I}^b] &= ([A]^t [\bar{\varphi}])^t [\bar{I}^b] = ([\bar{\varphi}]^t [A]) [\bar{I}^b] = [\bar{\varphi}]^t [A] [\bar{I}^b] = 0; \\ [A] [\bar{I}^b] &= [\bar{0}] \Rightarrow (KCL). \end{aligned}$$

(5.24)

Аббревиатура *KCL* в уравнении (5.24) означает: Кирхгофа – тока – правило.

В монографии [20] тождественный результат получен из уравнения (5.16) с помощью следующего преобразования:

$$\begin{aligned} [\bar{\varphi}]^t [A] [\bar{J}] &= [\bar{\varphi}]^t [A] [\bar{I}] \Rightarrow \\ [\bar{\varphi}]^t [A] [\bar{J}] - [\bar{\varphi}]^t [A] [\bar{I}] &= [\bar{\varphi}]^t [A] \{ [\bar{J}] - [\bar{I}] \} = [\bar{\varphi}]^t [A] [\bar{I}^b] = 0 \end{aligned}$$

(5.25)

Сходство выражений (5.24) и (5.25) очевидно.

Равенства (5.12), (5.16) можно объединить следующим образом:

$$\left(\bar{I}^b\right)^t \bar{U}^b = \left(\bar{I}_{kk}\right)^t B_f \cdot \bar{U}^b = \left(\bar{I}_{kk}\right)^t B_f \cdot A_f^t \bar{\varphi} = 0. \quad (5.26)$$

В выражении (5.26) токи ветвей выражены через токи контуров, а затем – напряжения ветвей через потенциалы узлов. В центре равенства находится произведение двух матриц инцидентий, которое равно нулю [20].

$$\left[B_f\right] \cdot \left[A_f\right]^t = [0]. \quad (5.27)$$

Равенство (5.27) используется при нахождении одной из двух фундаментальных матриц [9]:

$$\left[A_f\right] = [E \quad F] \Rightarrow [K] = -[F]^t \Rightarrow \left[B_f\right] = [K \quad E]. \quad (5.28)$$

Алгоритм, описанный формулами (5.28), используется разработчиками программ анализа электрических и электронных схем.

Пример.

Запишем фундаментальные матрицы электрической цепи рис.4.1:

$$\left[A_f\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\left[B_f\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем модуль К фундаментальной матрицы контурных инцидентий (5.28):

$$K = -F^t \Rightarrow -F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow -F^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = K.$$

Читатель может сам проверить равенство (5.27) и двойственное ему:

$$[A_f] \cdot [B_f]^t = [0].$$

Итак, формулировки Зеляха и Теллегена сходны по тексту и по смыслу, так как являются констатацией закона сохранения энергии:

«сумма мгновенных мощностей, доставляемых действующими в схеме источниками, равна сумме мгновенных мощностей, потребляемых или запасаемых остальными элементами схем [13]».

«Тогда выполняется уравнение $\sum i \cdot v = 0$, где суммирование проведено по всем ветвям цепи».

Зелях Э.В. в монографии [13] аккуратно подводит вдумчивого читателя к пониманию того, что соответствие напряжений и токов закону Ома не обязательно для выполнения баланса мгновенных мощностей ветвей электрической цепи. Теллеген в статье [15], рассматривая электрические цепи переменного тока, прямо говорит о том, что токи и напряжения могут быть взяты в разные моменты времени, но сумма мощностей будет равна нулю. Только Пенфилд говорит о разных электрических цепях одинаковой структуры, одна из которых служит для измерения (расчёта) токов, а вторая – для измерения (расчёта) напряжений [16]:

« N' и N'' имеют общий линейный граф, однако, могут быть разными [16]»

Математическое содержание этих формулировок идентичное.

Теорема Зеляха-Теллегена доказывает исключительную важность структуры электрической цепи. Структура цепи выходит на первое место, отодвигая в сторону множество параметров элементов и источников. Стоит отметить, что одна и та же структура может служить совершенно разным физическим объектам.

6. Первое обращение к структуре при решении уравнений цепи

«Математика ... есть знание как бы одномерное ...; философия же ... перестраивает этот математический план, ... понимая числа как **понятия** и этим перекрывая **числовую структуру** логической».
Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

В статье [4] Г. Кирхгоф ставит задачу электрического расчета системы проводников, заданной в самом общем виде. Прошло два года после публикации его уравнений, и он стремится применить их для решения практической задачи. К расчету предлагается система проводников, размер которой ученый преднамеренно не ограничил, чтобы продемонстрировать реальные возможности своих уравнений. В то же время, Кирхгоф в полной мере сознавал сложность поставленной задачи, и поэтому предложил метод расчета, который, по его убеждению, должен был упростить процесс определения значений токов в любом элементе системы. Он считал, что на первом этапе задачу надо максимально упростить и проще всего это сделать, радикально изменив структуру.

Для решения алгебраической системы уравнений ученый применил универсальный метод Г. Крамера, в котором любая переменная находится как соотношение определителей матрицы системы уравнений:

$$I_{\lambda} = \frac{\Delta_{\lambda}}{\Delta}, \quad (6.1)$$

где Δ - определитель системы уравнений;

Δ_{λ} - определитель, у которого вместо столбца λ поставлен столбец правых частей системы уравнений.

Получать численные значения определителей Кирхгоф не собирался, так как понимал, что в случае большого числа уравнений это практически невозможно. Однако он внимательно изучил возможный процесс решения, исследовал слагаемые небольших определителей и дал им схемную трактовку. А именно, слагаемые определителей формулы (6.1) Кирхгоф

предложил рассматривать как «комбинации» параметров ветвей системы проводников.

На первом этапе расчета он предложил упростить исходный граф системы до одного контура, который содержит ветвь с током, выбранным для определения его численного значения. Естественно, что для описания этого контура он использует одно из своих уравнений. Знаменатель формулы (6.1) упрощается, и мы легко получаем приближенное значение тока интересующей нас ветви. В сложном графе таких контуров несколько и каждый контур дает свое приближенное значение искомого тока. Другими словами, следует определить все приближенные значения тока одной ветви, входящей в систему **зависимых** контуров.

На упрощение структуры Кирхгоф соглашался потому, что процедура восстановления исходного графа представлялась ему легкой и очевидной. Надо просто поочередно добавлять к упрощенному графу удаленные ранее ветви. Конечно, с восстановлением структуры графа будут уточняться и алгебраические выражения решений, полученные из упрощенных систем уравнений. Однако эту процедуру ученый благоразумно откладывал на потом.

В своей статье Кирхгоф описывает процесс упрощения структуры следующим образом [4]:

«Пусть 1, 2, ... , $\mu-1$, μ – такие μ проводники, после изъятия которых не остается замкнутых фигур. Тогда после исключения $\mu-1$ из них остается только одна замкнутая фигура. К замкнутым фигурам, остающимся после изъятия по порядку проводников

	2,	3,	...	$\mu-1$,	μ
1,		3,	...	$\mu-1$,	μ
...
1,	2,	3,	...	$\mu-1$	

применим теорему 1».

В приведенной цитате под теоремой под номером 1 ученый понимает формулировку второго закона своего имени.

Приведем эту цитату в оригинале, т.к. этот этап решения очень важен:

Es seyen 1, 2, ... $\mu-1$, μ solche μ Drähte, nach deren Fortnahme keine geschlossene Figur übrig bleibt; nach Fortnahme von $\mu-1$ derselben bleibt dann eine geschlossene Figur; auf die geschlossenen Figuren, welche der Reihe nach übrig bleiben, wenn man

2, 3, ... μ
 1, 3, ... μ

 1, 2, 3... $\mu-1$

entfernt, wende man den Satz I an.

В полной мере понять приведенную цитату (на любом языке) очень сложно, поэтому будем стараться трактовать ее, исходя из текста всей статьи.

Предположим, что Кирхгоф хотел перечислить ветви-связи, удаляя которые граф упрощается до одного контура. Обязательным условием процесса упрощения он считал вхождение в контур ветви, содержащей искомый ток (в примере это ветвь 1). Отметим, что вследствие реализации этого требования возникает новое ограничение – ветвь с искомым током не может входить в список связей.

Для электрической цепи рис.6.1 список ветвей связи, которые поочередно следует удалять из графа в процессе упрощения структуры, будет выглядеть следующим образом:

2,3;2,4;2,5;3,4;3,6;4,5;4,6;5,6.

Каждый элемент перечня связей содержит только две ветви, как того требует приведенная выше цитата из статьи Кирхгофа. Это количество связей, удаляемых из графа, зависит от числа независимых контуров μ :

$$(\mu-1) = 3-1 = 2.$$

После последовательного удаления из исходного графа каждой пары ветвей связи мы получаем упрощенные графы. Число упрощенных графов вычисляется с помощью формулы сочетаний (из пяти по два), что составляет десять. Два сочетания ветвей 2,6; 3,5 опускаются, т.к. в контурах, оставшихся после удаления каждой из этих пар связей, нет ветви 1.

На графе электрической цепи рис.6.1 с помощью списка ветвей-связей можно найти восемь контуров, содержащих ветвь 1. Естественно, что упрощенные графы содержат не только контура с ветвью 1, но и некоторые отдельные, «лишние» ветви. Именно, наличие «лишних» ветвей не позволяет нам отождествлять упрощенные графы с одинаковыми контурами, рис.6.2. Отметим, что почти в каждый из восьми упрощенных графов входят

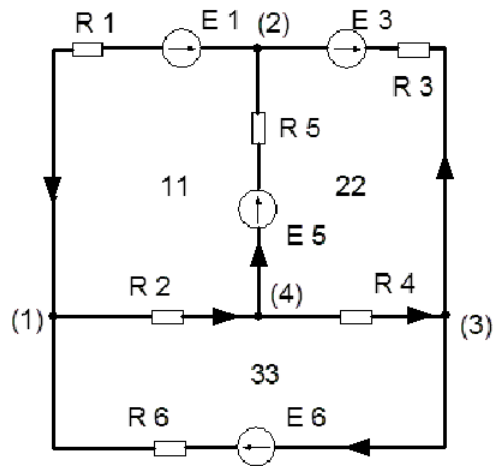


Рис. 6.1. Простая электрическая цепь.

«лишние» ветви, которые не включены в список удаляемых ветвей связи. Например, упрощенные графы под номером 2, 3, 6, 4, 5,7, рис.6.2, содержат «лишние» ветви. Только два графа не содержат «лишних» ветвей – номера 1, 8 упрощенных графов на рис.6.2.

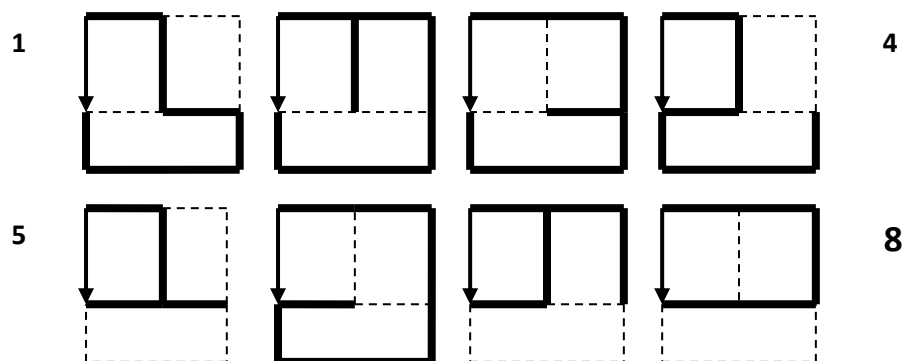


Рис. 6.2. Контур схемы, содержащие ветвь 1.

Как следует из приведенной цитаты, контур каждого из восьми упрощенных графов описывается по второму закону Кирхгофа и эти уравнения используются при нахождении первых приближенных значений тока ветви 1. Второе приближение значений тока ветви 1 получаем после добавления по одной ветви связи в каждый упрощенный граф, рис.6.2, что приводит к восстановлению еще одного контура, рис.6.3.

Одновременно необходимо уточнить алгебраические выражения числителя и знаменателя для искомого тока, т.е. слагаемые числителя и знаменателя формулы для первого приближения тока умножаются на параметр добавленной ветви. В результате первого уточнения величины тока длина «комбинации» параметров слагаемого определителей знаменателя и числителя увеличивается на единицу.

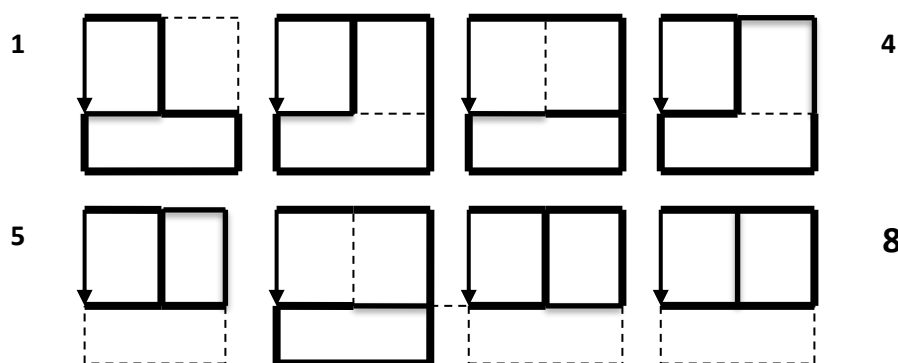


Рис. 6.3. Добавление в контур по одной ветви-связи.

Сведем результаты описанных выше действий в **таблицу 1 [21]**.

Таблица 1. Результаты упрощений графа рис.6.1 и последующих действий.

$$\begin{array}{l}
 \frac{\{1,4,5,6\}}{\{2,3\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5 - E_6}{R_1 + R_4 + R_5 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 + E_5 R_2 - E_6 R_2}{R_1 R_2 + R_4 R_2 + R_5 R_2 + R_6 R_2}; \\
 \frac{\{1,3,6\}}{\{2,4\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 - E_3 R_2 - E_6 R_2}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_6 R_2}; \\
 \frac{\{1,3,6\}}{\{2,5\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 - E_3 R_2 - E_6 R_2}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_6 R_2}; \\
 \frac{\{1,2,5\}}{\{3,4\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 + E_5 R_3}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_5 R_3}; \\
 \frac{\{1,2,5\}}{\{3,6\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 + E_5 R_3}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_5 R_3}; \\
 \frac{\{1,3,6\}}{\{4,5\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 - E_3 R_4 - E_6 R_4}{R_1 R_4 + R_3 R_4 + R_6 R_4}; \\
 \frac{\{1,2,5\}}{\{4,6\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 + E_5 R_4}{R_1 R_4 + R_2 R_4 + R_5 R_4}; \\
 \frac{\{1,2,3,4\}}{\{5,6\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \Rightarrow \frac{-E_1 R_5 - E_3 R_5}{R_1 R_5 + R_2 R_5 + R_3 R_5 + R_4 R_5}.
 \end{array}$$

В первом столбце **таблицы 1** приведена условная дробь, в числителе которой указаны ветви одного из восьми контуров, а в знаменателе – удаленные ветви связи (см. рис.6.2). Во втором столбце значатся выражения

для первого приближения значения искомого тока, найденные из уравнений контуров. В третьем столбце таблицы расположены уточненные выражения значений искомого тока после восстановления в каждом из графов по одной ветви связи.

Подключение последних ветвей связи в каждом из графов рис.6.3 дает нам возможность получить исходный граф цепи. Одновременно с этим проходит второй этап уточнения выражений для искомого тока. После этого слагаемые числителя и знаменателя каждого из восьми выражений будут содержать по три сомножителя, как и слагаемые определителей точного решения (6.1). Сознвая масштаб проблемы, ученые считали, что эту задачу, прежде всего, должны рассмотреть математики [22].

Сведем результаты преобразований графа, а также уточнений алгебраических выражений на первом и последнем этапах в **таблицу 2**.

Таблица 2. Результаты последнего уточнения выражений искомого тока.

$$\begin{array}{l}
 \frac{\{1,4,5,6\}}{\{2,3\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5 - E_6}{R_1 + R_4 + R_5 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_3 + E_5 R_2 R_3 - E_6 R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3 + R_4 R_2 R_3 + R_5 R_2 R_3 + R_6 R_2 R_3}; \\
 \frac{\{1,3,6\}}{\{2,4\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_4 - E_3 R_2 R_4 - E_6 R_2 R_4}{R_1 R_2 R_4 + R_3 R_2 R_4 + R_6 R_2 R_4}; \\
 \frac{\{1,3,6\}}{\{2,5\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_5 - E_3 R_2 R_5 - E_6 R_2 R_5}{R_1 R_2 R_5 + R_3 R_2 R_5 + R_6 R_2 R_5}; \\
 \frac{\{1,2,5\}}{\{3,4\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 R_4 + E_5 R_3 R_4}{R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_5 R_3 R_4}; \\
 \frac{\{1,2,5\}}{\{3,6\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 R_6 + E_5 R_3 R_6}{R_1 R_3 R_6 + R_2 R_3 R_6 + R_5 R_3 R_6}; \\
 \frac{\{1,3,6\}}{\{4,5\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 R_5 - E_3 R_4 R_5 - E_6 R_4 R_5}{R_1 R_4 R_5 + R_3 R_4 R_5 + R_6 R_4 R_5}; \\
 \frac{\{1,2,5\}}{\{4,6\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 R_6 + E_5 R_4 R_6}{R_1 R_4 R_6 + R_2 R_4 R_6 + R_5 R_4 R_6}; \\
 \frac{\{1,2,3,4\}}{\{5,6\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \Rightarrow \frac{-E_1 R_5 R_6 - E_3 R_5 R_6}{R_1 R_5 R_6 + R_2 R_5 R_6 + R_3 R_5 R_6 + R_4 R_5 R_6}.
 \end{array}$$

Следующим этапом процесса восстановления исходного графа цепи является операция объединения восьми одинаковых изображений исходного графа, полученных в результате восстановления структуры. После объединения графов естественно распространить эту операцию на элементы числителей и знаменателей восьми выражений третьего столбца **таблицы 2**. Конечно, операция объединения должна производиться отдельно как для элементов числителей, так и для элементов знаменателей восьми выражений.

В результате объединения слагаемых числителей из третьего столбца **таблицы 2** получаем определитель (6.2) формулы (6.1):

$$\Delta_1 = \begin{aligned} & -E_1(R_2R_3 + R_2R_4 + R_2R_5 + R_3R_4 + R_3R_6 + R_4R_5 + R_4R_6 + R_5R_6) - \\ & -E_3(R_2R_4 + R_2R_5 + R_4R_5 + R_5R_6) + \\ & +E_5(R_2R_3 + R_3R_4 + R_3R_6 + R_4R_6) - \\ & -E_6(R_2R_3 + R_2R_4 + R_2R_5 + R_4R_5), \end{aligned} \quad (6.2)$$

Объединение слагаемых знаменателей из третьего столбца **таблицы 2**, дает определитель (6.3) формулы (6.1):

$$\Delta = \begin{aligned} & R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_2R_5 + R_1R_3R_4 + R_1R_3R_6 + R_1R_4R_5 + \\ & +R_1R_4R_6 + R_1R_5R_6 + R_2R_3R_4 + R_2R_3R_5 + R_2R_3R_6 + R_2R_4R_6 + \\ & +R_2R_5R_6 + R_3R_4R_5 + R_3R_5R_6 + R_4R_5R_6. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Очевидно, что определители (6.2), (6.3) можно получить из системы уравнений (6.4) при нахождении первого контурного тока по формуле (6.1).

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_5) & -R_5 & -R_2 \\ -R_5 & (R_3 + R_4 + R_5) & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & (R_2 + R_4 + R_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 + E_5 \\ -E_3 - E_5 \\ -E_6 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

Любой читатель с помощью карандаша и бумаги может найти оба определителя формулы (6.1), т.к. размер матрицы системы уравнений (6.4) небольшой – число **независимых** контуров равно трем. Отметим, что материал, приведенный в **таблицах 1, 2**, взят из работы [21], в которой более подробно изложена реконструкция метода решения [4]. Попробуем осмыслить метод решения, предложенный Кирхгофом.

Упрощая исходный граф электрической цепи до одного контура, ученый вводит в рассмотрение систему **зависимых** контуров, а также

систему уравнений этих контуров для того, чтобы охватить все пути в графе электрической цепи, возможные для искомого тока [4]. В статье предлагается следующее уравнение для контура каждого из упрощенных графов:

«Пусть остающаяся фигура содержит проводники $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$. Тогда, если проводник λ не встречается среди них, то:

$$I'_\lambda = 0,$$

и в случае наличия λ :

$$I'_\lambda = \frac{E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_\nu}}{w_{\lambda_1} + w_{\lambda_2} + \dots + w_{\lambda_\nu}},$$

где $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots$ считаются положительными, если направление I_λ считается положительным».

В оригинале эта цитата выглядит следующим образом:

Es enthalte die übrigbleibende Figur die Drähte: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$; dann ist, falls λ nicht unter diesen vorkommt:

$$I'_\lambda = 0,$$

und falls λ unter denselben vorkommt:

$$I'_\lambda = \frac{E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_\nu}}{w_{\lambda_1} + w_{\lambda_2} + \dots + w_{\lambda_\nu}},$$

wobei $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots$ nach der Richtung als positiv gerechnet sind, nach welcher I_λ als positiv gerechnet ist.

Обозначение I'_λ соответствует приближенному значению тока ветви в оставшемся контуре. Именно эти выражения содержатся в столбце 2 таблицы 2.

Конечно, Кирхгоф не называл оставшиеся контура **зависимыми**, рис.б.2, хотя понимал, что они объединены одной ветвью, содержащей искомый ток. Он упрощал граф настолько уверенно, что создавалось впечатление, что ему известны эти понятия, просто не хочет тратить время на составление определений. К сожалению, завершить алгоритм уточнения алгебраических выражений для значений искомого тока ему не удалось. Это следует из того, что он предлагает заменить описанные выше процедуры уточнения слагаемых определителей, применением комбинаторики.

Для поиска «комбинаций ветвей» Кирхгоф возвращается к языку теории графов, и предлагает строить дерево путей в графе. Порядок построения дерева путей показан на рис.6.4.

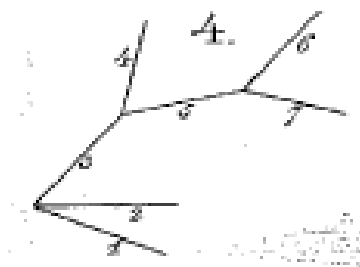


Рис.6.4. Дерево путей в графе схемы, в оригинале *Fig.4,Taf.V* .

Переводчики книги «Избранные труды Г. Кирхгофа» и их консультанты потеряли иллюстрацию *Fig.4,Taf.V* к статье, хотя в тексте перевода ссылка на нее осталась. Надо думать, что рис.6.4 представляет только начало процесса построения дерева путей в графе, и оно может быть продолжено, если выделить три узловых схемных множества: (1, 2, 3); (3, 4, 5); (1, 5, 6). Отметим, что в последнем схемном множестве номер 7 следует заменить на 1, так как в графе, который рассматривался в статье, ветвей всего шесть. Вполне возможно, что при изготовлении матрицы рисунка вырезали номер 1, а получился номер 7.

На рис.6.4 множества связаны между собой смежными ветвями, т.е. дан только принцип построения дерева путей графа. Сам Кирхгоф надеялся с помощью этого дерева определять «некорректные» комбинации ветвей, например, контур (1, 3, 5). Если восстановить граф электрической цепи по узловым схемным множествам, то получим схему моста Уинстона с плечами (1, 3, 4, 6) и диагоналями (2, 5). Конечно, не составит особого труда найти в этом графе упомянутый выше контур. Номера ветвей восстановленного графа могут не совпадать с нумерацией схемы рис.6.5, что вполне допускалось в научных публикациях того времени.

Попробуем восполнить этот пробел. Начнем с получения (в символьной форме) слагаемых знаменателя формулы (6.1) в результате декартового умножения контурных схемных множеств [5]. Контурные схемные множества определяем по графу электрической цепи рис.6.1:

$$(1,2,5), (3,4,5), (2,4,6).$$

Результат декартового умножения схемных множеств записываем в виде матричного структурного числа [23]:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Каждый столбец структурного числа содержит номера ветвей, составляющих слагаемое знаменателя формулы (6.1). Конечно, в структурном числе (6.5) есть столбцы, соответствующие контурным множествам декартового умножения, а также контура (1, 3, 6).

Теория структурных чисел, наряду с простыми операциями, использует, например, алгебраическую производную, действие которой покажем на примере числа (6.5). Продифференцируем структурное число по символу ветви 2, для чего на первом этапе отбираем все столбцы, содержащие символ 2 (6.6):

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Удаляем символ аргумента дифференцирования из матричного числа A' . В результате получаем выражение для алгебраической производной (6.7):

$$\frac{dA}{d2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Можно еще раз продифференцировать выражение (6.7) по символу ветви 3:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d^2 A}{d2 \cdot d3} = [1 \ 4 \ 5 \ 6]. \quad (6.8)$$

Выражение (6.8) представляет собой схемное множество ветвей упрощенного графа под номером 1, рис.6.2.

Ветви связи 2, 3 являются первой парой в списке, составленном для получения упрощенных графов, рис.6.2. Понятно, что вернуть ветвь – аргумент дифференцирования можно почти так же, как ее удаляли. Надо только изменить последовательность действий. Например, если умножить

выражение (6.8) на символ ветви 3, то мы получим число A'' – половину столбцов матричного числа (6.7). А если после этого матричное число A'' умножить на символ 2, то мы получим четверть структурного числа (6.5):

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Вот откуда возникает необходимость применения операции объединения слагаемых числителей и знаменателей всех выражений столбца 3 **таблицы 2**.

Отметим, что объем вычислений по методу Кирхгофа вероятнее всего будет больше, чем у метода Крамера, т.к. добавляются операции поиска системы зависимых контуров и последовательного уточнения выражений переменных. Этот объем работы надо будет выполнять отдельно для каждого тока системы проводников. Таким образом, можно констатировать, что задача получения точного решения сложной системы проводников (по Кирхгофу) неразрешима даже на сегодняшнем уровне развития вычислительной техники. По этой причине отметим, что в практическом плане результаты работы [4] весьма скромные, однако теоретическое значение статьи Кирхгофа трудно переоценить.

Впервые было показано, что численные значения переменных электрической цепи обладают собственной структурой и ее можно использовать в процессе решения. Кроме того, было показано, что ток ветви формируется множеством путей, которые существуют в графе электрической цепи. Другими словами, каждый из путей вносит свой вклад в величину искомого тока. Впервые продемонстрирована роль связности элементов цепи, что порождает взаимовлияние переменных схемы. Таким образом, структура электрической цепи отображается и на алгебраические выражения решений, что часто остается незамеченным, так как нас интересует, прежде всего, численный результат.

Систему проводников Кирхгофа, размер которой неограничен, невозможно представить в виде иллюстрации. В качестве примера системы проводников автор приводит схему моста Уитстона, которая стала традиционной для работ по теории электрических цепей, рис.6.5. На практике элементами схемы Кирхгофа были отрезки провода разной длины,

величина сопротивления которых, естественно, определялась этим размером. В оригинальном изображении схемы, *Fig.5, Taf.V*, различия в длине попытались сохранить, но современный читатель, рассматривая рис.6.5, воспринимает этот рисунок только как ненаправленный граф с одинаковыми ветвями. Следует отметить, что в фундаментальной статье Кирхгофа граф был использован впервые для представления электрической схемы.

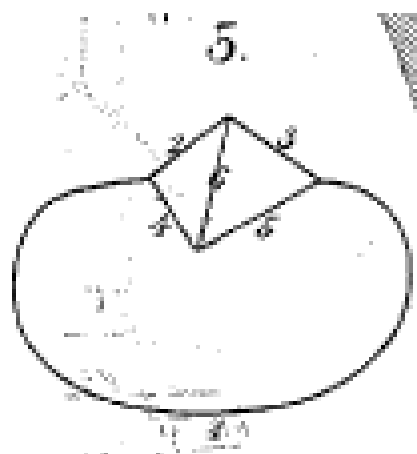


Рис. 6.5. Оригинальная иллюстрация *Fig.5, Taf.V* из статьи [4].

Итак, работа [4] была и остается пионерской для теории электрических цепей и ее можно без преувеличения считать первой попыткой создания топологического метода расчета электрических цепей.

7. Структура цепи и вычисления определителей

«Ибо вся *математика* есть не что иное, как развитое и детализированное *понятие числа*».

Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Нельзя сказать, что работы Кирхгофа [3], [4] не были замечены научной общественностью девятнадцатого века, и хотя вокруг его уравнений продолжалась довольно оживленная дискуссия, их начинали применять для решения практических задач. Однако, идеи, реализованные в методе решения сложной математической модели электрической цепи, были сразу отвергнуты научным сообществом. Доброжелательная критика этого метода начала появляться только к концу 19-го века, как и попытки развития топологического подхода к решению сложных систем алгебраических уравнений.

Первыми оценили работы Кирхгофа математики, что следует, например, из статьи [22]:

«Для любой гальванической цепи с разветвлением тока, составленной из линейных проводников, оба известных закона Кирхгофа позволяют записать систему уравнений, в которой величина интенсивности тока любого проводника системы представляется как функция всех источников ЭДС и сопротивлений».

Дальше в статье отмечается, что математическая суть уравнений должна исследоваться отдельно:

«Так как все дело имеет, все-таки, чисто математическую природу, то можно не показавшись неуместным, направить результаты Кирхгофа на чисто математический путь»...

Признание уравнений Кирхгофа не помешало автору статьи отметить недостатки предложенного метода решения, который **«не облегчит практических расчетов».**

Метод решения системы алгебраических уравнений с помощью формулы Крамера в 19-том веке был почти единственным, который можно было назвать универсальным. Было очевидно, что его успешное применение зависит от эффективного метода раскрытия определителей. Эту проблему

понимал Максвелла и думал над ее разрешением. Результаты своей работы он не успел опубликовать в печати, но представил их в своем последнем лекционном курсе. О том, как он планировал упростить вычисление определителей, мы можем судить по статье Флеминга, который был одним из его слушателей [24]. Рассмотрим некоторые задумки великого ученого, которые представляют интерес даже сегодня.

Приведем граф электрической цепи, который по свидетельству Флеминга приводил на доске Максвелл. Запишем систему уравнений, которую он составил по графу схемы моста Уитстона, рис.7.1.

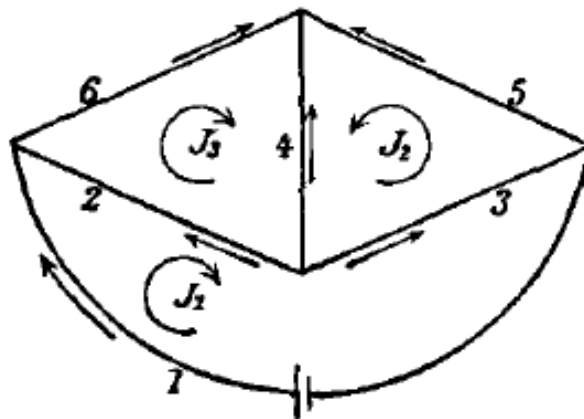


Рис. 7.1. Иллюстрация Максвелла.

$$\begin{aligned} (w_1 + w_2 + w_3)J_1 + w_3 J_2 - w_2 J_3 &= E, \\ w_3 J_1 + (w_3 + w_4 + w_5)J_2 + w_4 J_3 &= 0, \\ -w_2 J_1 + w_4 J_2 + (w_2 + w_4 + w_6)J_3 &= 0. \end{aligned}$$

Но дальше записи определителей матрицы этой системы уравнений дело не пошло. Были найдены выражения для токов всех ветвях, но метод, который был применен, нельзя было назвать универсальным. Упрощать вычисления определителей матриц было проще в численном виде, поэтому ученый прибегает к применению элементарных преобразований определителей, которые позволяют понизить их ранг [25]. Приведем пример из статьи Флеминга.

Пример. Исходный определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 10 & 7 & 5 & 7 \end{vmatrix}, \Delta = -257.$$

На первом этапе преобразований совершается следующее действие: второй столбец исходного определителя вычитается из первого столбца.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 7 \end{vmatrix}, \Delta = -257.$$

Далее следуют операции сложения третьей строки со второй и операция вычитания третьей строки из первой.

Все этапы преобразования можно проследить по тексту оригинальной работы, а поэтому нет смысла их повторять. Важно только отметить цель преобразований – получение нулей в столбцах и строках, чтобы можно было понизить ранг определителя. Преобразования прекращают тогда, когда остается определитель второго ранга:

$$\begin{vmatrix} 76 & 5 \\ 21 & -2 \end{vmatrix}, \Delta = -257.$$

Эквивалентные преобразования определителей формализовать довольно сложно, однако путь упрощения вычислений был указан и для того времени он, в какой-то мере, проблему решал.

Формализовать проблему вычисления определителей удалось только ученику Кирхгофа, статьи которого долгое время оставались без какого-либо движения в архиве авторитетного научного журнала [26], [27]. Суть его метода состоит в **разложении определителей по ветвям**.

Допустим, что надо найти величину тока в проводнике, обозначенном буквой **a**. Для этого сопротивление проводника удаляется из матрицы системы уравнений, а относительно узлов удаленной ветви определяется значение входного сопротивления схемы. Формула (7.1) отражает эти действия [26]:

$$i_a = \frac{E}{w_a + W_a} = \frac{E}{\left(w_a + \frac{N_{a'}}{N_a} \right)}, \quad (7.1)$$

где w_a – сопротивление ветви, удаленное из системы проводников;

W_a – входное сопротивление схемы со стороны удаленной ветви;

$N_{a'}$ – определитель, в котором нет ветви **a**, а ее узлы замкнуты;

N_a – определитель минора, соответствующего ветви **a**.

Из равенства (7.1) следует уравнение, в котором ранг определителя первого слагаемого уменьшен на единицу:

$$N = w_a N_a + N_{a'}. \quad (7.2)$$

Удаление ветви может быть простым (рис.7.1, п.2) или с замыканием ее узлов (рис.7.1, п.3):

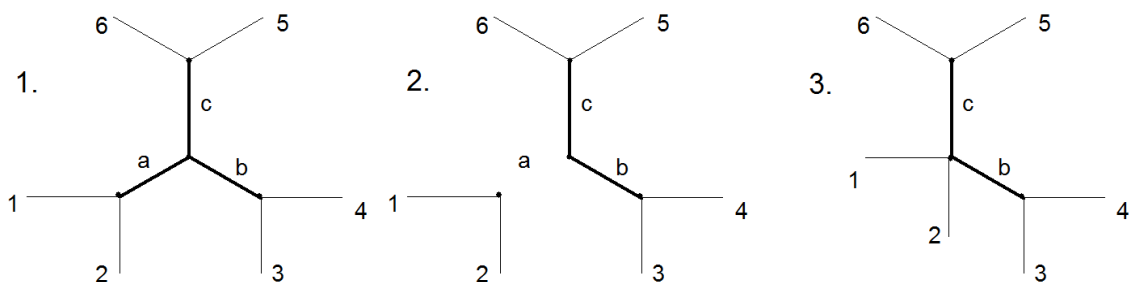


Рис. 7.1. Способы удаления ветви **a**.

Из рис.7.1 видно, что при простом удалении ветви разрушается узел из трех ветвей, а также контур, в который входит ветвь **a**. При удалении ветви с замыканием ее узлов и узел, и контур сохраняются в измененном виде [27].

Пример. Проверим справедливость формулы (7.2) на примере электрической цепи рис.6.1, определитель системы уравнений которой записан в виде структурного матричного числа (6.5). Повторим запись этого структурного числа:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Алгебраическая производная (7.4) структурного числа (7.3) соответствует минору ветви 1:

$$N_1 = \frac{dA}{d1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Если из выражения (7.3) выделить элементы, содержащие ветвь 1, то структурное число (7.4) можно получить путем выноса общего сомножителя за скобки. Часть структурного числа, не содержащая ветви 1, представляет собой определитель, который получается из (7.3) при условии $R_1 = 0$:

$$N_{1'} = A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

Определитель для нашего примера получается после подстановки в (7.2) выражений (7.4), (7.5). Очевидно, что после подстановки получаем результат, который равен (7.3), но повторяет структуру уравнения (7.2):

$$N = 1 \times \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (7.2) является фундаментальным в методе Фойснера. Вот как он сам пишет о его значении:

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes wird die Bildung des Nenners der i für ein gegebenes Netz auf die Betrachtung immer einfacherer Netze zurückgeführt und so in regelmässigem Fortschreiten der gesuchte Ausdruck gebildet.

В русском переводе цитата читается так:

«Благодаря многократному применению этого соотношения построение знаменателя тока i для данной схемы превращается в

рассмотрение все более и более простых схем; так закономерными поступательными шагами образуется искомое выражение».

Уравнение (7.2) усложняется, если одновременно удаляются две ветви:

$$N = w_a w_b N_{ab} + w_a N_{ab'} + w_b N_{a'b} + N_{a'b'}. \quad (7.6)$$

Проверим выражение (7.6) на примере электрической цепи, структура знаменателя которой записана в (7.3):

$$N = 1 \times 2 \times \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} + 1 \times \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Если свести все столбцы в одну матричную рамку, то полученный результат будет равен структурному числу (7.3). Следует отметить, что проверка уравнений (7.2), (7.6) стала возможной только потому, что нам известны слагаемые определителя.

Автор предлагает применять формулу (7.2) многократно, выполняя обозначенные процедуры с буквенными символами ветвей схемы. Другими словами, исследователь отказывается от нахождения численных значений в процессе преобразований и получает выражения в символьной форме. На каждом этапе преобразования ранг определителей формулы (7.2) уменьшается, однако с увеличением размера матрицы математической модели цепи реализовывать разложение по ветвям становится достаточно трудно.

Приведем в качестве примера выражение знаменателя формулы Крамера для схемы измерения небольших сопротивлений по Томпсону, рис. 7.2 [26].

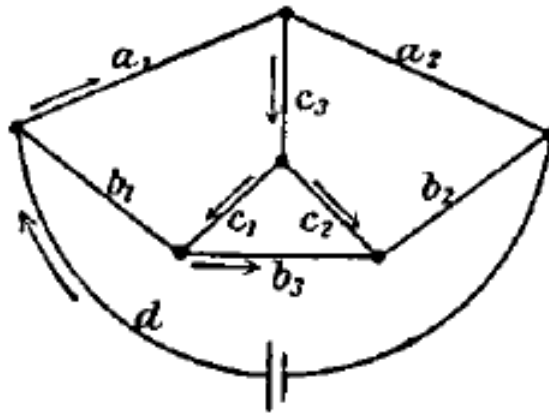


Рис.7.2. Схема измерения небольших сопротивлений по Томпсону.

Определитель схемы рис.7.2, полученный по методу Фойснера, приводится ниже:

$$\begin{aligned}
 N = & (c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3) \left[(a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + b_3)d + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + b_3) \right] + \\
 & + (c_1 + c_2 + b_3)(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)d + (c_1 + c_2) \left[a_1a_2(b_1 + b_2 + b_3) + b_1b_2(a_1 + a_2) \right] + \\
 & + c_1b_3 \left[(a_2 + b_2)d + (a_1 + a_2)b_2 \right] + c_2b_3 \left[(a_1 + b_1)d + (a_1 + a_2)b_1 \right] + \\
 & + c_3b_3 \left[(a_1 + a_2 + b_1 + b_2)d + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \right].
 \end{aligned}
 \tag{7.7}$$

Выражение (7.7) сложно назвать простым.

Конечно, описанная выше методика разложения определителя по ветвям позволяла ученым решать более масштабные задачи, но при работе с действительно большими системами уравнений (схемами) все будет не так просто. Трудности вычисления определителей матриц уступят место трудностям составления выражений, аналогичных (7.7). Отметим, что нахождение слагаемых уравнения (7.2) иногда производится без рассмотрения соответствующих определителей. Правильный результат в некоторых случаях, вероятно, легче получать интуитивно, в обход операций любой алгебры. Приведем пример из статьи [26].

Пункт 13 статьи начинается со слов:

«Сначала мы рассмотрим схему с двумя узлами. На рис.7.3 представлена простейшая схема, состоящая из трех проводников. Применим к ней уравнение (7.8).».

$$N = w_1 N_1 + N_{1'}. \quad (7.8)$$

Получим слагаемые уравнения (7.8), исходя из определителя схемы, представленной на рис.7.3.

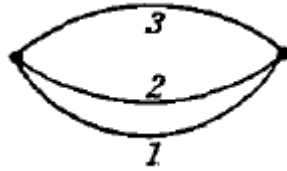


Рис. 7.3. Простейшая схема из работы [26].

Определитель системы уравнений, описывающей схему рис.7.3, приводим ниже:

$$N = \begin{vmatrix} w_1 + w_2 & -w_2 \\ -w_2 & w_2 + w_3 \end{vmatrix} = w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

Слагаемые уравнения (7.2) могут быть получены из структурного числа выражения (7.9):

$$N_1 = \frac{dN}{d1} = [2 \quad 3] \Rightarrow (w_2 + w_3); \quad N_{1'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow w_2 w_3,$$

$$N = 1 \cdot (2 + 3) + 2 \cdot 3. \quad (7.10)$$

Отметим, что для получения второго слагаемого формулы (7.2) надо не только удалить ветвь 1, но и замкнуть ее узлы в схеме.

Автор статьи находит выражения (7.10), преобразовывая схему рис.7.3. графически.

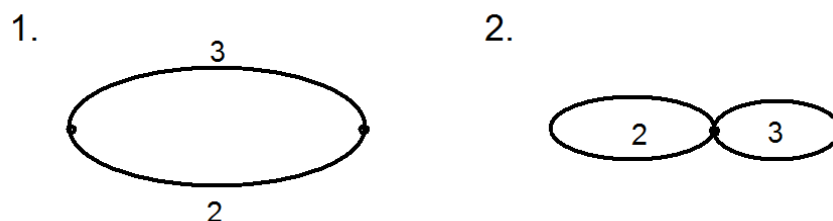


Рис.7.4. Графическое представление выражений (7.10).

На рис.7.4 (п. 1) показано преобразование схемы с помощью простого удаления ветви 1 из схемы рис.7.3, а на рис.7.4 (п.2) – результат удаления той же ветви с замыканием ее узлов. Контур, представленный на позиции 1 рис.7.4 можно охарактеризовать только собственным сопротивлением – $(w_2 + w_3)$. Граф рис.7.4, п. 2 представляет результат удаления ветви с замыканием ее узлов. Исходный граф преобразуется в две петли, имеющие общий узел. Так как каждая петля состоит из одной ветви, то собственные сопротивления контуров будут равны w_2, w_3 . Общая характеристика этого фрагмента в статье [26] записывается как произведение этих сопротивлений. Это действие основывается только на его профессиональной интуиции.

Цели методов Кирхгофа, и Фойснера одинаковы – получение «точного» решения сложной системы уравнений, однако на идейном уровне они существенно различаются. Кирхгоф предлагает радикальное упрощение структуры цепи до одного контура, что требует изменений в обоих определителях формулы Крамера. В методе Фойснера предлагается упрощать определитель знаменателя индивидуально, уменьшая его ранг с помощью многократного применения формулы (7.2). Преобразованный определитель представляется в линейной форме, а вычисления его значения предлагается начинать с простых фрагментов, которые входят в более сложные выражения. Такая методика расчета напоминает в какой-то мере вычисления по методу Гаусса.

Далее в статье [26] рассматриваются более сложные графы, например, рис.7.5, в котором две ветви состоят из двух частей каждая. Здесь, прежде всего, предлагается упростить граф в два этапа, рис.7.6, которые не требуют специальных комментариев.

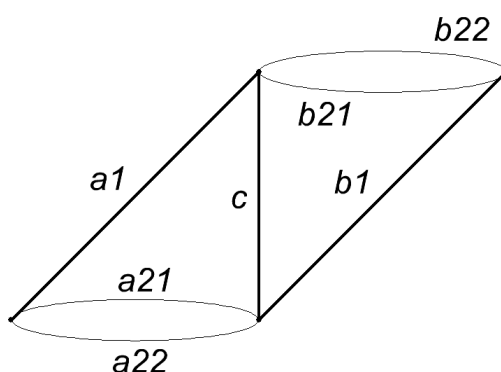


Рис. 7.5. Пример графа с составными ветвями.

На втором этапе преобразования получаем граф, который изображен на рис.7.3, п.2.

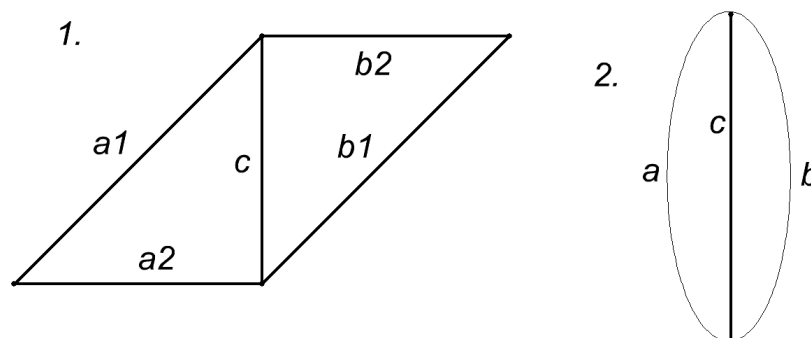


Рис. 7.6. Упрощение графа рис.7.5.

По аналогии с рис.7.3 запишем уравнение, структурно повторяющее выражение (7.10):

$$N = (a + b)c + ab .$$

Раскрываем символы ветвей, которые состоят из двух частей, после чего выражение изменится следующим образом:

$$N = c(a_1 + a_2 + b_1 + b_2) + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2). \quad (7.11)$$

На этом автор статьи останавливает преобразование и выбирает другой способ определения структуры определителя.

Совершенно непонятно, зачем производился вывод уравнения (7.11), если автор решил получать символьное выражение определителя рис.7.5 по словесному правилу, которое приводится ниже на языке оригинала.

Wenn in einem Netz die Strecken $a, b, c \dots$ durch $\alpha, \beta, \gamma \dots$ Drähte gebildet werden, so wird das N dieses Netzes aus dem des entsprechenden Netzes mit nur einfachen Strecken dadurch erhalten, dass die $a, b, c \dots$ durch die Producte $a_1 \dots a_\alpha, b_1 \dots b_\beta, c_1 \dots c_\gamma \dots$ ersetzt und die von a freien Glieder mit der Summe der Combinationen $\alpha - 1^{ter}$ Klasse der a , die von b freien mit der Summe der Combinationen $\beta - 1^{ter}$ Klasse der b etc. multiplicirt werden.

В переводе на русский язык этот текст читается следующим образом:

Если в некоторой цепи ветви a, b, c, \dots образованы несколькими проводниками $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, то определитель N этой цепи может быть получен из аналогичной цепи, в которой ветви представлены простыми отрезками, при условии, что ветви a, b, c, \dots будут заменены произведениями $a_1, \dots, a_\alpha, b_1, \dots, b_\beta, c_1, \dots, c_\gamma$ и свободные элементы ветви a вместе с суммой сочетаний $(\alpha-1)$ -ранга a , которые с свободными элементами ветви b и с суммами сочетаний $(\beta-1)$ -ранга b и т.д. будут перемножены.

В конечном итоге, структура определителя, полученная по этому правилу в статье Фойснера, имеет следующий вид:

$$N = c \left((a_1 + b_1)(a_{21} + a_{22})(b_{21} + b_{22}) + a_{21} a_{22} (b_{21} + b_{22}) + b_{21} b_{22} (a_{21} + a_{22}) \right) + (a_1 (a_{21} + a_{22}) + a_{21} a_{22}) (b_1 (b_{21} + b_{22}) + b_{21} b_{22}). \quad (7.12)$$

Отметим, что приведенное словесное правило объясняет только часть выражения определителя N . Алгоритм построения последней строчки выражения (7.12) в тексте правила отсутствует, а это значит, что строчка может быть записана только в том случае, если нам понятно, что заложено в последних буквах правила – **и т.д.**

Формулы (7.2), (7.6) предназначались Фойснером для **упрощения известного выражения** определителя. Однако существует возможность использовать их для **построения выражения** определителя непосредственно по графу схемы. Действительно, вывод формул тесно связан со структурой электрической цепи, о чем свидетельствуют иллюстрации приведенные выше. Если можно упрощать структуру цепи, то можно ее использовать для построения **неизвестного выражения** определителя.

Покажем процесс получения выражения определителя по графу простой схемы, рис.7.7.

Пример. Разделим ветви графа по принадлежности к дереву **(3, 4, 5)** и связям **(1, 2, 6)**. Предположим, что ветви с индексами **a, b** формулы (7.6) являются связям схемы рис.7.7 с индексами 1, 2 соответственно.

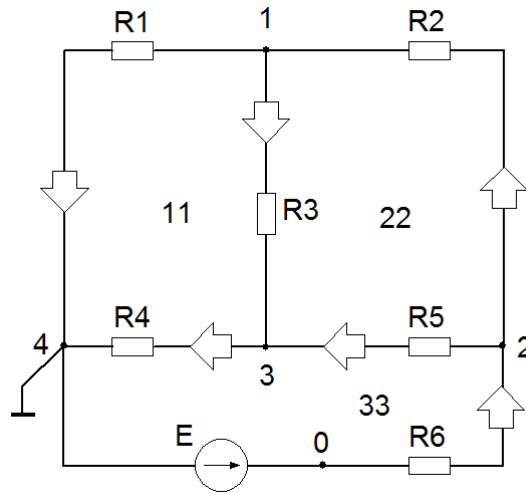


Рис. 7.7. Схема моста Уитстона.

Подставим индексы выбранных нами ветвей в формулу (7.6):

$$N = 12N_{12} + 1N_{12'} + 2N_{1'2} + N_{1'2'}. \quad (7.13)$$

Известно, что совокупность схемных множеств независимых контуров полностью представляет структуру графа электрической цепи [5], а декартовое произведение этих множеств дает выражение структуры определителя схемы:

$$\begin{aligned} &11(1,3,4), \\ &22(2,3,5), \\ &33(4,5,6). \end{aligned}$$

$$N = (1,3,4) \times (2,3,5) \times (4,5,6). \quad (7.14)$$

Напомним, что в процессе выполнения операций структурной алгебры действуют следующие правила:

$$a \oplus a = \emptyset, \quad a \otimes a = \emptyset. \quad (7.15)$$

Под символами формул (7.15) понимаются как номер ветви, так и структура контура, узла или другого фрагмента схемы.

Удаляем из выражения (7.14) ветви 1, 2, которые являются связями. В цепи остается только один контур 33, в котором может течь ток. Контура 11, 22 разомкнуты (удалены их ветви связи), в них нет путей для тока. По этой

причине принимаем во внимание только этот контур. Первое слагаемое уравнения (7.13) запишется следующим образом:

$$12N_{12} = 12(4+5+6) = 124+125+126. \quad (7.16)$$

Заметим, что в скобках равенства (7.16) находится выражение структуры собственного сопротивления контура 33, оставшегося замкнутым.

Второе и последующие слагаемые уравнения (7.13) приводятся ниже. Обращаем внимание на то, что штрихом отмечаются те ветви, которые в соответствии с формулой (7.6) удаляются из выражения определителя с замыканием своих узлов. Ветви удаляются не только из алгебраического выражения, но также из графа, однако эти контура остаются замкнутыми. Упрощенные схемные множества участвуют в алгебраических операциях уравнения (7.13):

$$1N_{12'} = 1(2'+3+5)(4+5+6) = 1(34+35+36+45+56),$$

$$2N_{1'2} = 2(1'+3+4)(4+5+6) = 2(34+35+36+45+46), \quad (7.17)$$

$$N_{1'2'} = (1'+3+4)(2'+3+5)(4+5+6) = (35+34+45)(4+5+6) = (356+346+456)$$

Еще раз отметим, что в скобках присутствуют символы ветвей со штрихом, которые не участвуют в операциях, представленных в (7.17).

Запишем результаты вычислений структур определителя (7.16). (7.17) в виде матричных чисел [28]:

$$N^c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (7.18)$$

Выражения частей определителя (7.18) легко преобразовать к линейному виду, какой был принят у Фойснера [25]:

$$N^c = (12+13+23)(4+5+6) + 1(45+56) + 2(45+46) + 6(34+35+45). \quad (7.18')$$

Проведем аналогичные преобразования для описания электрической цепи как множества взаимосвязанных узлов.

По графу рис.7.7 записываем схемные узловые множества и структуры собственной проводимости всех узлов:

$$\begin{aligned} \{1,2,3\} &\Rightarrow (1+2+3), \\ \{2,5,6\} &\Rightarrow (2+5+6), \\ \{1,4,6\} &\Rightarrow (1+4+6), \\ \{3,4,5\} &\Rightarrow (3+4+5). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Разрушим структуры собственных проводимостей узлов выносом двух ветвей 1 и 2. Повторим уравнение (4), которое соответствует, в том числе, и этому случаю:

$$N = 12N_{12} + 1N_{12'} + 2N_{1'2} + N_{1'2'} \quad (7.13^*)$$

Единственной, оставшейся не нарушенной, структурой собственной проводимости будет выражение для узла 3 графа, поэтому первое слагаемое уравнения (7.13*) запишется аналогично (7.16):

$$12N_{12} = 12(3+4+5) = 123 + 124 + 125. \quad (7.20)$$

Запишем остальные слагаемые уравнения (7.13*):

$$1N_{12'} = 1(2'+5+6)(3+4+5) = 135 + 136 + 145 + 146 + 156,$$

$$2N_{1'2} = 2(1'+4+6)(3+4+5) = 234 + 236 + 245 + 246 + 256,$$

$$N_{1'2'} = (1'+2'+3)(2'+5+6)(1'+4+6) = 345 + 346 + 356.$$

Итак, получена структура определителя системы уравнений метода узловых потенциалов, записанной в виде узлового структурного числа (7.21) [28]:

$$N^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (7.21)$$

Результат (7.21) может быть проверен с помощью декартового произведения схемных узловых множеств (7.19), представляющих независимые узлы графа схемы рис.7.7.

Только в пункте 20 автор статьи [26] решился на рассмотрение реальной схемы. В качестве примера был выбран двойной измерительный мост, рис.7.8, который имеет 9 ветвей, 5 независимых узлов и 4 независимых контура. Эта схема рассматривается также и в работе [27]. Автор совершенно справедливо напоминает, что гальванометр схемы включен в ветвь с обозначением **7**, а сравниваемые небольшие по величине сопротивления включены в ветви с обозначениями **3** и **5**.

В статье были выбраны следующие контура:

617845, 61795, 63872, 634972.

Отметим, что каждый из этих контуров содержит как ветвь гальванометра, так и ветвь источника, а, следовательно, Фойснер прямо указывает на то, что алгебраическая сумма этих контурных токов обеспечивает баланс измерительной схемы. Именно в этот момент происходит фиксация значения измеряемого сопротивления. Итак, выбранные контура нужны только для объяснения принципа работы двойного моста.

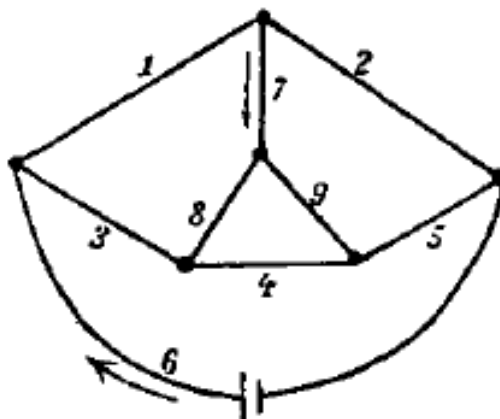


Рис. 7.8. Граф схемы двойного измерительного моста [27].

Для нахождения структуры определителя схемы рис.7.8 Фойснер преобразовывает исходный граф, удаляя ветви **7**, **8**, **9**. После изъятия перечисленных ветвей граф схемы будет содержать три параллельных пути:

1 + 2, 3 + 4 + 5, 6.

Структура определителя этого графа (7.7) из статьи [26] в новых обозначениях ветвей приведена ниже (7.22).

$$\begin{aligned}
N &= (8 \cdot 9 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 7)((1 + 2 + 3 + 5 + 4)6 \\
&+ (1 + 2)(3 + 5 + 4)) + \\
&+ (8 + 9 + 4)(1 + 3)(2 + 5)6 + (8 + 9)(1 \cdot 2(3 + 5 + 4) + \\
&+ 3 \cdot 5(1 + 2)) + \\
&+ 8 \cdot 4((2 + 5)6 + (1 + 2)5) + 9 \cdot 4((1 + 3)6 + (1 + 2)3) + \\
&+ 7 \cdot 4((1 + 2 + 3 + 5)6 + (1 + 2)(3 + 5)).
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Пример. Найдем структуру определителя схемы двойного моста, применяя понятия теории электрических цепей и уравнение, которое получаем при выносе из выражения определителя трех ветвей:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N} &= abc \mathfrak{N}_{abc} + ab \mathfrak{N}_{ab'c} + ac \mathfrak{N}_{ab'c} + bc \mathfrak{N}_{a'b'c} + a \mathfrak{N}_{ab'c'} \\
&+ b \mathfrak{N}_{a'b'c'} + \mathfrak{N}_{a'b'c'}.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Выделим одно из деревьев графа схемы рис.7.8:

1, 2, 7, 8, 9.

Тогда ветви **3, 4, 5, 6** составят множество связей. Подставим индексы ветвей связи в формулу (7.23):

$$N^c = 345N_{345} + 34N_{345'} + 35N_{34'5} + 45N_{3'45} + 3N_{34'5'} + 4N_{3'45'} + N_{3'4'} \tag{7.23'}$$

Первое слагаемое уравнения (7.23') запишется аналогично первому уравнению (7.23):

$$345N_{345} = 345(1 + 2 + 6) = 1345 + 2345 + 3456. \tag{7.24}$$

Второе и последующие слагаемые уравнения (7.23) записываются аналогично предыдущим примерам:

$$\begin{aligned}
34N_{345'} &= 34(1 + 2 + 6)(2 + 5' + 7 + 9) = 34(12 + 17 + 19 + 27 + 29 + 26 + 67 + 69) = \\
&= 1234 + 1347 + 1349 + 2347 + 2349 + 2346 + 3467 + 3469.
\end{aligned}$$

Отметим, что из уравнения (7.23) в выражение для второго слагаемого перенесен штрих над номером ветви 5, который означает, что эта ветвь

удалена из графа путем замыкания ее узлов. Алгебраически это преобразование можно совершить, приравнивая сопротивление ветви нулю.

$$35N_{3'4'5} = 35(1+2+6)(4'+8+9) = 35(18+19+28+29+68+69) = \\ = 1358+1359+2358+2359+3568+3569.$$

$$45N_{3'45} = 45(1+3'+7+8)(1+2+6) = 45(12+16+17+27+67+18+28+68) = \\ = 1245+1456+1457+2457+4567+1458+2458+4568.$$

$$3N_{34'5'} = 3(2+5'+7+9)(1+2+6)(4'+8+9) = \\ = 3(2+5'+7+9)(18+19+28+29+68+69) = \\ = 1238+1239+2368+2369+1378+1379+2378+ \\ +2379+3678+3679+1389+2389+3689.$$

$$4N_{3'45'} = 4(1+3'+7+8)(2+5'+7+9)(1+2+6) = \\ = (14+47+48)(12+26+17+27+67+19+29+69) = \\ = 1246+1467+1249+1469+2467+1479+2479+ \\ +4679+1248+2468+1478+2478+4678+1489+2489+4689.$$

$$N_{3'4'} = (1+3'+7+8)(4'+8+9)(2+5+7+9)(1+2+6) = \\ = 1258+1268+1568+1678+1689+1259+1269+1569+ \\ +1679+1578+2578+2678+5679+1578+2579+2679+ \\ +5679+1589+2589+2689+5689.$$

Получена структура определителя схемы рис.7.8, записанная в виде отдельных слагаемых (7.24) уравнения (7.23'). Запись слагаемых определителя легко преобразуется в линейный вид, который использовал Фойснер:

$$N^c = 345(1+2+6) + \\ +34(1+2+6)(2+7+9) + 35(1+2+6)(8+9) + 45(1+7+8)(1+2+6) + \\ +3(2+7+9)(1+2+6)(8+9) + 4(1+7+8)(2+7+9)(1+2+6) + \\ + (1+7+8)(8+9)(2+5+7+9)(1+2+6).$$

Если электрическая цепь достаточно сложная, то автор предложил разделять ее на подсхемы (Teilnetz), рис.7.9. Тогда определитель всей схемы, находится как объединение определителей ее частей по формуле (7.25) [26].

Из выражения для определителя ясно, что подсхемы III_a, III_b , показанные на рис.7.9 как отдельные блоки, объединены до составления алгебраического уравнения (7.25).

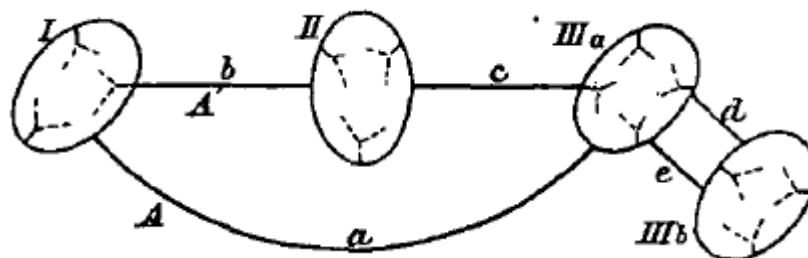


Рис. 7.9. Электрическая цепь, разделенная на подсхемы.

$$N = (w_a + w_b + w_c) N_I N_{II} N_{III} + N_I N_{II} N_{III} + N_I N_{II'} N_{III} + N_I N_{II} N_{III'}, \quad (7.25)$$

где w_a, w_b, w_c – сопротивления соединительных проводников;

N_I, N_{II}, N_{III} – определители подсхем;

$N_I', N_{II'}, N_{III'}$ – определители с замкнутыми входными узлами.

Формулу (7.25) легко представить как структурную, устранив обозначения сопротивлений и оставив только индексы ветвей.

Итак, применение понятий схемных контурных (узловых) множеств и структур собственных сопротивлений (проводимостей) соответствующих контуров (узлов) не нарушает алгоритмы, предложенные Фойснером.

Определитель схемы, граф которой представлен на рис.7.8, состоит из 75 слагаемых. Вычисления по уравнениям, размер которых превосходит уравнение (7.23), будут содержать еще большее количество слагаемых, что делает задачу очень сложной, а получение результата затруднительным.

Отметим, что выше определялись выражения структур определителей, которые в формуле Крамера располагаются в знаменателе. Числители этой формулы в статьях рекомендуется Фойснером получать (пункт 9 [26], пункт 3 [27]) так, как это описал Кирхгоф в своей статье [4]. Этот алгоритм основывается на предварительном получении системы уравнений, каждое

из которых содержит ветвь с искомым током. Все действия по определению числителей формулы Крамера подробно изложены в работе [21].

Особо отметим, что выражения для определителей, которые приведены в настоящей статье, не содержат слагаемых со знаком минус, и дают точный численный результат. Собственно, получен схемный способ раскрытия определителей электрических цепей.

8. Структура решений системы алгебраических уравнений

«Но что значит ... понять математическое утверждение?

Понять тут – значит перевести данное утверждение с языка **математики** на язык **логики** (или обратно)».

Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Дана система линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой оставлены в символьной форме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (8.1)$$

Согласно правилу Г. Крамера решение, например, для переменной x_1 записываем в виде следующего соотношения определителей матрицы системы уравнений (8.1):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}. \quad (8.2)$$

Не будем искать решения в численном виде, а раскроем определители формулы (8.2) по элементам неравных столбцов числителя и знаменателя, применяя теорему Лапласа:

$$x_1 = \frac{b_1 (-1)^{1+1} A_{\bar{1};\bar{1}} + \dots + b_n (-1)^{n+1} A_{\bar{n};\bar{1}}}{a_{11} (-1)^{1+1} A_{\bar{1};\bar{1}} + \dots + a_{n1} (-1)^{n+1} A_{\bar{n};\bar{1}}}, \quad (8.3)$$

где $A_{\bar{i};\bar{j}}$ – алгебраическое дополнение, образованное вычеркиванием

i – той строки и j –того столбца.

Преобразуем выражение (8.3) следующим образом

$$x_1 = \frac{b_1 (-1)^{1+1} A_{1:\bar{1}}}{a_{11} (-1)^{1+1} A_{1:\bar{1}} + \dots + a_{n1} (-1)^{n+1} A_{n:\bar{1}}} + \dots + \frac{b_n (-1)^{n+1} A_{n:\bar{1}}}{a_{11} (-1)^{1+1} A_{1:\bar{1}} + \dots + a_{n1} (-1)^{n+1} A_{n:\bar{1}}}$$

и, наконец, завершая цикл алгоритма развертывания соотношения определителей (8.2), получим выражение (8.4):

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11} + \frac{a_{21}}{A_{2:\bar{1}}} + \dots + \frac{a_{n1}}{A_{n:\bar{1}}}} + \dots + \frac{b_n}{a_{n1} + \frac{a_{11}}{A_{1:\bar{1}}} + \dots + \frac{a_{(n-1)1}}{A_{(n-1):\bar{1}}}}. \quad (8.4)$$

Выражение (8.4) содержит отношения определителей, ранг которых на единицу меньше ранга определителей формулы Крамера (8.2). Продолжим разложение соотношений определителей (8.4) по элементам неравных строк. Отметим, что при дальнейшем применении теоремы Лапласа разложение получаемых соотношений определителей производится поочередно то по столбцам, то по строкам.

Особое внимание следует уделить правилу знака алгебраического дополнения перед каждым следующим циклом алгоритма. Нами было предложено использовать следующее правило знака алгебраического дополнения [29]:

$$(-1)^{(i-x)+(j-y)}, \quad (8.5)$$

где i, j – индексы строки и столбца элемента разложения;

x, y – мера беспорядка среди номеров предварительно вычеркнутых строк и столбцов.

Приведем простой пример. Рассмотрим алгебраическое дополнение, в котором удаляются 4 строка и 6 столбец. На предыдущих этапах были удалены строки 1, 3, 8 и столбцы 5, 9, 11:

$$A_{4:\bar{6}}^{1.3.8;5.9.11}.$$

Знак алгебраического дополнения определяется по величинам беспорядка в ряду удаленных ранее строк и столбцов [30]. Мера беспорядка в ряду строк определяется следующим образом.

Рассматривается ряд номеров строк, удаленных ранее, и отмечается число номеров (1 и 3), величины которых меньше числа актуально удаляемой строки (4). Величина беспорядка в этом ряду равна числу 2. В ряду столбцов, удаленных ранее, содержится только один номер 5, величина которого меньше числа 6. Таким образом, мера беспорядка в ряду столбцов равна числу 1. Определяем по формуле (8.5) знак алгебраического дополнения, приведенного в качестве примера,

$$(-1)^{(4-2)+(6-1)} = -1.$$

На следующем этапе алгоритма значения строки 4 и столбца 6 пополняют последовательности чисел в верхнем индексе алгебраических дополнений следующего этапа.

В результате реализации алгоритма преобразования формулы Крамера получаем непрерывную цепную дробь, которая по структуре сложнее известной цепной дроби [31]. Автор алгоритма, представленного выше, назвал ее ветвящейся цепной дробью [32]. Полученная цепная дробь имеет больше разветвлений на этаже по сравнению с простой, арифметической дробью. Ее конкретный вид определяется структурой системы уравнений, а если система уравнений (8.1) описывает электрическую цепь, то структура ветвящейся цепной дроби определяется схемой соединения элементов в цепь.

Пример. Найдем решение в виде ветвящейся цепной дроби для

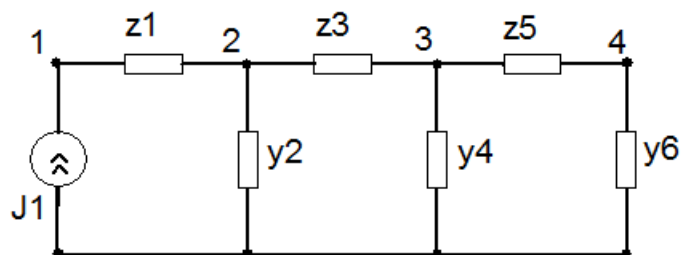


Рис. 8.1. Лестничная схема.

одного из узловых потенциалов электрической цепи рис.8.1.

Запишем систему уравнений по методу узловых потенциалов:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & -y_{12} & 0 & 0 \\ -y_{21} & y_{22} & -y_{23} & 0 \\ 0 & -y_{32} & y_{33} & -y_{34} \\ 0 & 0 & -y_{43} & y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $y_{11}, y_{22}, y_{33}, y_{44}$ – собственные проводимости узлов 1, 2, 3, 4;

y_{12}, y_{23}, y_{34} – взаимные проводимости между узлами;

J_1 – номинал источника тока;

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ – электрические потенциалы узлов.

Запишем формулу Крамера для узлового потенциала φ_3

$$\varphi_3 = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & -y_{12} & J_1 & 0 \\ -y_{21} & y_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -y_{32} & 0 & -y_{34} \\ 0 & 0 & 0 & y_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & -y_{12} & 0 & 0 \\ -y_{21} & y_{22} & -y_{23} & 0 \\ 0 & -y_{32} & y_{33} & -y_{34} \\ 0 & 0 & -y_{43} & y_{44} \end{vmatrix}}$$

и, применяя описанный выше алгоритм, разложим соотношение определителей в ветвящуюся цепную дробь:

$$\varphi_3 = \frac{J_1}{\frac{y_{23}}{y_{21}} + \frac{y_{33}}{y_{32}} + \frac{y_{43}}{y_{44}} - \frac{-y_{11}}{y_{21}} - \frac{y_{12}}{y_{32}} - \frac{y_{34}}{y_{22}} - \frac{-y_{34}}{y_{32}}}. \quad (8.6)$$

Свернем ветвящуюся цепную дробь (8.6) к более компактному виду

$$\varphi_3 = \frac{J_1}{\frac{-y_{11}y_{23}}{y_{21}} + \frac{y_{33}}{y_{32}} \left(\frac{y_{11}y_{22}}{y_{21}} - y_{12} \right) + \frac{y_{43}}{y_{44}} \left(\frac{y_{12}y_{34}}{y_{32}} - \frac{y_{11}y_{22}y_{34}}{y_{21}y_{32}} \right)} \quad (8.7)$$

и перепишем элементы знаменателя дроби (8.7) следующим образом:

$$\begin{aligned} & -y_{11} \frac{1}{y_{21}} y_{23} + y_{11} \frac{1}{y_{21}} y_{22} \frac{1}{y_{32}} y_{33} - y_{12} \frac{1}{y_{32}} y_{33} + \\ & + y_{12} \frac{1}{y_{32}} y_{34} \frac{1}{y_{44}} y_{43} - y_{11} \frac{1}{y_{21}} y_{22} \frac{1}{y_{32}} y_{34} \frac{1}{y_{44}} y_{43}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Каждое слагаемое знаменателя (8.8) представляет собой выражение для пути в двудольном графе, что легче показать, сохраняя только структуру этих путей. Например,

$$11 \frac{1}{21} 23, \quad 11 \frac{1}{21} 22 \frac{1}{32} 33, \quad 11 \frac{1}{21} 22 \frac{1}{32} 34 \frac{1}{44} 43.$$

Обозначения элементов структуры этих путей следует рассматривать как вектор с началом в узле-истоке и концом в узле-стоке. Прямые и обратные элементы сцеплены одинаковыми номерами, как узлов стоков, так и узлов-истоков.

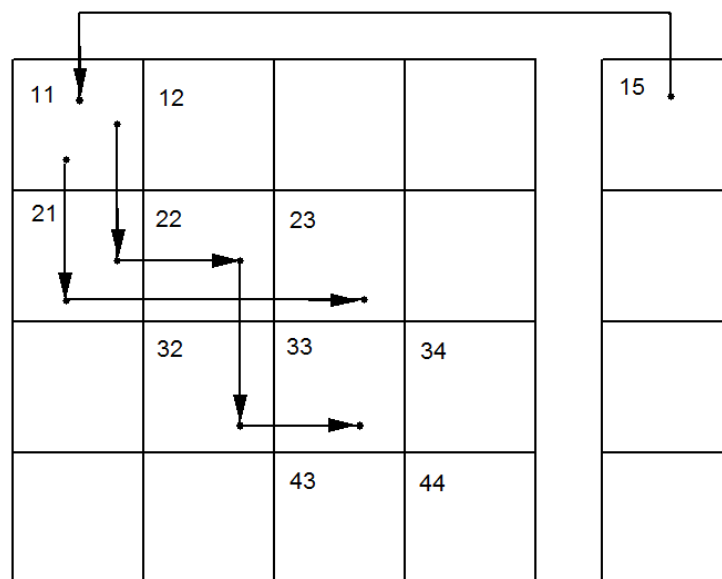


Рис. 8.2. Первые два слагаемых выражения (8.8).

Таким образом, каждый элемент цепного пути может быть реально представлен в двудольном графе электрической цепи. Это можно продемонстрировать на матрице системы уравнений лестничной схемы. Перенесем два слагаемых выражения (8.8) на матричную рамку системы уравнений, рис.8.2.

Автор монографии [33] одним из первых заметил аналогию между передачей сигнала по графу (блок-схеме) и продвижением виртуального сигнала по матрице, рис.8.2. Было установлено, что **«передача идет только между одинаковыми индексами различных элементов. При этом передача производится с первого индекса предыдущего элемента на второй индекс последующего»**. Были введены понятия матричного цикла, частичной передаточной функции, элементов прямой и обратной связи. В работе [29] представленные на рис.8.2 маршруты были названы цепными путями, т.к. составляющие его элементы «сцеплены» одинаковыми матричными индексами.

Например, от источника, расположенного в ячейке 1.5, сигнал достигает диагонального элемента 1.1 первой строки, оттуда двумя путями следует к разным ячейкам столбца под номером 3. Таким образом энергия источника вносит свой вклад в образование потенциала третьего узла, что соответствует нашим физическим представлениям. Размерность каждого из слагаемых (8.8) равна $[Ом^{-1}]$, поэтому в результате выполнения алгебраических операций, обусловленных выражением (8.7), размерность результата будет вольт [В].

Запишем цепные пути (8.8) только с помощью матричных индексов:

$$\begin{aligned}
 & -11 \frac{1}{21} 23, & & -12 \frac{1}{32} 33, \\
 & +11 \frac{1}{21} 22 \frac{1}{32} 33, & & +12 \frac{1}{32} 34 \frac{1}{44} 43. \\
 & -11 \frac{1}{21} 22 \frac{1}{32} 34 \frac{1}{44} 43, & &
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Цепные пути записаны в две отдельные группы, каждая из которых имеет одинаковый начальный элемент. Заметим, что любой цепной путь имеет нечетное число элементов. Знаки путей перенесены из выражения (8.8), но

из (8.9) видно, что знак плюс имеют те цепные пути, которые содержат четное число элементов, записанных в виде дроби с единицей в числителе.

Цепные пути (8.9) легко объединяются в упорядоченную ветвящуюся цепную дробь (8.10):

$$\begin{array}{r}
 \frac{11}{21} \\
 \frac{23 - \frac{22}{32}}{33 - \frac{34}{44}} \\
 \frac{33 - \frac{34}{44}}{43}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{r}
 \frac{12}{32} \\
 \frac{33 - \frac{34}{44}}{43}
 \end{array}
 \quad (8.10)$$

Структуру такой ветвящейся цепной дроби можно сравнить со знаменателем выражения (8.6) и убедиться, что они содержат одни и те же цепные пути.

Преобразуем выражение (8.10), умножая первый числитель и первый знаменатель на один и тот же множитель, а затем аналогично продолжим преобразование:

$$\begin{array}{c}
 \frac{11 \cdot \frac{1}{11}}{21 \cdot \frac{1}{11}} \dots \Rightarrow \frac{1}{21} \dots \Rightarrow \frac{1}{21 \cdot \frac{1}{21}} \dots \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{11}} \dots \Rightarrow \frac{1}{\left(11 \frac{1}{21} 23\right)^{-1}} \dots \\
 \frac{23 - \frac{22}{32}}{33 - \frac{34}{44}}
 \end{array}$$

По завершении описанного преобразования получим следующую дробь:

$$\begin{array}{c}
 \frac{1}{\left(11 \frac{1}{21} 23\right)^{-1} - \frac{1}{11 \frac{1}{21} 22 \frac{1}{32} 33 - \frac{1}{\left(11 \frac{1}{21} 22 \frac{1}{32} 34 \frac{1}{44} 43\right)^{-1}}}} \\
 \frac{1}{\left(12 \frac{1}{32} 33\right)^{-1} - \frac{1}{12 \frac{1}{32} 34 \frac{1}{44} 43}}
 \end{array}
 \quad (8.11)$$

Из выражения (8.11) следует, что цепные пути являются основными элементами ветвящейся цепной дроби.

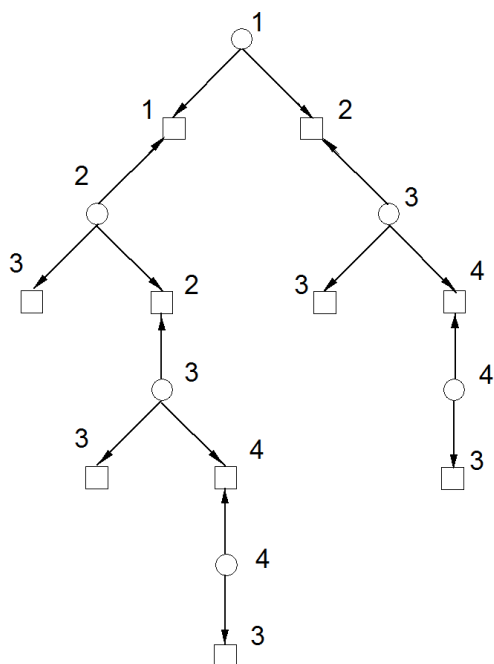


Рис. 8.3. Дерево цепных путей.

На рис.8.3 представлено дерево цепных путей выражения (8.11). Здесь круг обозначает исток, а квадрат – сток. В каждом цепном пути встречаются такие элементы, которые направлены противоположно основному направлению от истока 1 к стоку 3. Естественно считать, что передача таких отрезков имеет знак минус, поэтому от числа отрезков, имеющих такую направленность, зависит знак передачи цепного пути. Если число таких отрезков нечетное, то знак передачи цепного пути будет отрицательным. Если число отрезков, направленных встречно, четное, то знак передачи такого цепного пути будет положительным.

Ветвящаяся цепная дробь может быть представлена рядом подходящих дробей. У математиков принято, что каждая следующая подходящая дробь имеет на один этаж больше. Например, первые две подходящие дроби выражения (8.6) будут иметь следующий вид:

$$\varphi_3^{(1)} = \frac{J_1}{y_{23} + y_{33} + y_{43}}, \quad \varphi_3^{(2)} = \frac{J_1}{\frac{y_{23}}{y_{21}} + \frac{y_{33}}{y_{32}} + \frac{y_{43}}{y_{44}}}.$$

Образование подходящих дробей можно изменить, если принять в качестве основного элемента цепной путь. В этом случае первые две подходящие дроби выражения (8.7) будут иметь следующий вид:

$$\varphi_3^{(1)} = \frac{J_1}{\frac{-y_{11}y_{23} - y_{12}y_{33}}{y_{21} y_{32}}},$$

$$\varphi_3^{(2)} = \frac{J_1}{\frac{-y_{11}y_{23} - y_{33}}{y_{21} y_{32}} \left(\frac{y_{11}y_{22} - y_{12}}{y_{21}} \right) + \frac{y_{43}}{y_{44}} \left(\frac{y_{12}y_{34}}{y_{32}} \right)}.$$

Если признать, что цепные пути являются основными элементами ветвящихся цепных дробей, то надо будет пересмотреть алгоритм получения подходящих дробей. Дело в том, что он был разработан для нужд арифметических дробей, элементы которых не имеют физической размерности. В нашем случае, мы знаем, что размерность цепных путей исследуемой ветвящейся цепной дроби постоянная, поэтому их нельзя разрывать для получения подходящих дробей, чтобы их размерность становилась неопределенной. Таким образом, следует изменить алгоритм образования подходящих дробей, чтобы цепные пути оставались неделимыми объектами.

Ряд подходящих арифметических дробей принято записывать следующим образом [31]:

$$\frac{p_k}{q_k}, \text{ где } k=0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.14)$$

По значению индекса в выражении (8.14) подходящие дроби разделяются на четные и нечетные дроби. После подстановки численных значений и выполнения обозначенных операций каждая подходящая дробь дает численное значение. Ряды чисел, соответствующие четным и нечетным подходящим дробям, имеют определенные свойства, которые в работе [31] сформулированы в виде теоремы:

Теорема 4. Подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую, а подходящие дроби нечетного порядка – убывающую

последовательность. При этом любая подходящая дробь нечетного порядка больше любой подходящей дроби четного порядка.

Другими словами, значения четных и нечетных подходящих дробей приближаются к точному результату с разных сторон. Подходящая дробь второго порядка отличается от подходящей дроби первого порядка тем, что у нее на один этаж больше.

При построении ряда подходящих дробей по новому алгоритму, в котором цепные пути являются неделимыми элементами, каждая из них отличается только максимальной кратностью цепного пути. Например, цепной путь третьей кратности (взятый отдельно) соответствует подходящей дроби второго порядка. Каждый последующий цепной путь отличается от предыдущего на два сомножителя, поэтому следует признать, что такие подходящие дроби, аналогичны ряду арифметических дробей четного порядка. По этой причине численные значения подходящих дробей, полученных по новому алгоритму, образуют монотонно возрастающую последовательность, которая приближается к точному значению полной дроби [29].

Особо следует отметить, что ветвящаяся цепная дробь следует из выражения для переменной системы уравнений, которое получено в результате реализации прямого метода решения. Таким образом, можно заключить, что сама ветвящаяся цепная дробь представляет этот метод решения.

9. Метод Гаусса и решение систем уравнений с помощью цепных дробей

«Для всех ... математических наук характерно употребление или чистых арифметических *чисел*, или специальных дублетов – *функций* ...»
Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Метод решения системы алгебраических уравнений, названный европейцами в честь выдающегося ученого Карла Гаусса, является одним из древнейших в истории математики. В восьмой книге древнекитайской «Математики в девяти книгах» описан метод фан-чен, в основном совпадающий с методом Гаусса. Возраст этого китайского манускрипта минимум 20 столетий [34].

Отметим, что метод Гаусса принадлежит к прямым методам решения, как и метод Крамера (формула Крамера) и ориентирован на получение точного решения. Реализация этих методов встречается с определенными вычислительными трудностями, так как в процессе получения точного решения алгебраической системы уравнений требуется выполнить большое число элементарных операций. Их количество оценивается величиной n^3 для метода Гаусса и n^4 для метода Крамера, где n – размер квадратной матрицы.

Решение с помощью метода Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) производится исключение $(n-1)$ переменных системы уравнений. На втором этапе (обратный ход) вычисляются значения переменных, исключенных ранее из системы уравнений. Существует большое количество модификаций этого метода, но достичь значительного уменьшения числа элементарных операций в процессе решения пока не удается. Другими словами, остаются те же самые вычислительные сложности, которые всегда были характерны для этого метода.

Попробуем на простейших примерах рассмотреть этапы решения системы алгебраических уравнений методом Гаусса. Отметим, что нас не интересует численный результат, решение должно быть получено в символьной форме. Начнем с элементарной системы, состоящей из двух уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_{23} \end{cases} \quad (9.1)$$

После исключения переменной x_1 получаем уравнение с «исправленными» значениями коэффициентов [35]:

$$a_{22}^{(1)}x_2 = a_{23}^{(1)}, \quad (9.2)$$

$$\text{где } a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{21}b_{12}; \quad b_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}};$$

$$a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}b_{13}; \quad b_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}.$$

Подставим в уравнение (9.2) коэффициенты системы уравнений (9.1) и осуществим очевидное упорядочение записи, как числителя, так и знаменателя. Решение уравнения (9.2) примет следующий вид:

$$x_2 = \frac{a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}}{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}}. \quad (9.3)$$

Выражение (9.3) можно представить как соотношение определителей:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}. \quad (9.4)$$

Нет необходимости объяснять обратный переход от выражения (9.4) к (9.3), но по поводу преобразования выражения (9.4) к виду (9.5) достаточно разделить числитель и знаменатель (9.4) на a_{11} , чтобы получить решение системы (9.1) в виде ветвящейся цепной дроби:

$$x_2 = \frac{a_{23}}{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}} - \frac{a_{13}}{\frac{a_{22}}{a_{21}} - a_{12}} \cdot \quad (9.5)$$

Цепную дробь, аналогичную выражению (9.5) математики предлагают получать из соотношения определителей формулы Крамера по алгоритму, предложенному в монографии [32].

Пример. На рис.9.1 представлена схема из двух контуров.

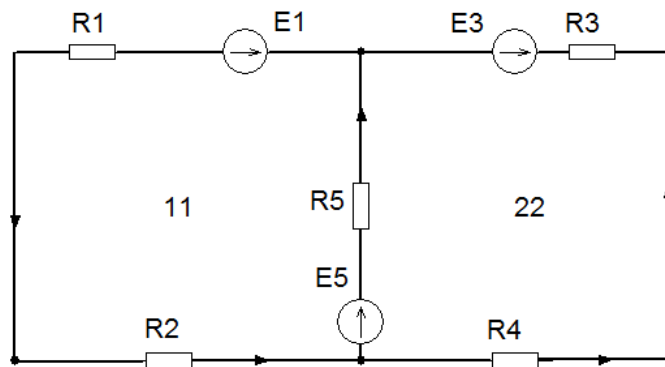


Рис.9.1. Фрагмент электрической цепи.

Цепь описывается системой уравнений, структура которой аналогична (9.1):

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_5) & -R_5 \\ -R_5 & (R_3 + R_4 + R_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_5 - E_1 \\ -E_3 - E_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{13} \\ E_{23} \end{bmatrix} \quad (9.1^*)$$

Исключим переменную I_{11} , чтобы получить уравнение, повторяющее (9.2):

$$R_{22}^{(1)} I_{22} = E_{23}^{(1)}, \quad (9.2^*)$$

$$\text{где } R_{22}^{(1)} = R_{22} - \frac{R_{21}}{\frac{R_{11}}{R_{12}}}, \quad E_{23}^{(1)} = E_{23} - \frac{R_{21}}{\frac{R_{11}}{E_{13}}}.$$

Выражение для второго контурного тока получаем простой подстановкой:

$$I_{22} = \frac{(-E_3 - E_5) - \frac{(-R_5)}{(R_1 + R_2 + R_5)}}{\frac{E_5 - E_1}{(R_3 + R_4 + R_5) - \frac{(-R_5)}{(R_1 + R_2 + R_5)}}} \cdot \frac{(-R_5)}{(-R_5)} \quad (9.5^*)$$

Найдем выражение для этого контурного тока по формуле Крамера:

$$I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & E_{13} \\ R_{21} & E_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}} = \frac{E_{23}R_{11} - E_{13}R_{21}}{R_{22}R_{11} - R_{12}R_{21}}.$$

Если числитель и знаменатель полученного выражения разделить на R_{11} , то получим точное выражение для второго контурного тока в форме уравнения, аналогичного (9.2*):

$$\left[(R_3 + R_4 + R_5) - \frac{(-R_5)}{(R_1 + R_2 + R_5)} \right] I_{22} = \left[(-E_3 - E_5) - \frac{(-R_5)}{(R_1 + R_2 + R_5)} \right] \cdot \frac{(-R_5)}{(-E_1 + E_5)}.$$

Добавим третью строку в систему уравнений (9.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases} \quad (9.6)$$

После первого цикла исключения переменных система уравнений (9.6) упрощается, как показано ниже:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)} \end{cases}, \quad (9.7)$$

$$\text{где } a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}; \quad a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}}; \quad a_{24}^{(1)} = a_{24} - a_{14} \frac{a_{21}}{a_{11}};$$

$$a_{32}^{(1)} = a_{32} - a_{31} \frac{a_{12}}{a_{11}}; \quad a_{33}^{(1)} = a_{33} - a_{31} \frac{a_{13}}{a_{11}}; \quad a_{34}^{(1)} = a_{34} - a_{14} \frac{a_{31}}{a_{11}}.$$

После второго цикла исключения переменных система уравнений (9.7) упрощается до одного уравнения:

$$a_{33}^{(2)} x_3 = a_{34}^{(2)}, \quad (9.8)$$

$$\text{где } a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{32}^{(1)} \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; \quad a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} - a_{32}^{(1)} \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Не будем превращать решение (9.8) в численную форму и проведем указанные выше подстановки:

$$x_3 = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{a_{34}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)} a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}{a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)} a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}. \quad (9.9)$$

С помощью коэффициентов предыдущего этапа исключения переменных продолжим изменять вид решения (9.9). Покажем на примере одного из коэффициентов выражения (9.9) как изменяется его вид при переходе к коэффициентам системы уравнений (9.6):

$$a_{34}^{(1)} = a_{34} - a_{14} \frac{a_{31}}{a_{11}} = a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{14}}.$$

Очевидно, что после подстановки в каждый коэффициент выражения (9.9) их представлений через коэффициенты системы уравнений (9.7) получим довольно громоздкое выражение. Упростить запись можно только тем, что оставим в нем только матричные индексы исходных коэффициентов. Ниже приведен результат полной подстановки:

$$x_3 = \frac{34 - \frac{31}{11} - \frac{32 - \frac{31}{11}}{22 - \frac{21}{11}}}{33 - \frac{31}{11} - \frac{32 - \frac{31}{11}}{22 - \frac{21}{11}}} = \frac{\frac{32 - \frac{31}{11}}{24 - \frac{21}{11}}}{\frac{23 - \frac{21}{11}}{13}} \quad (9.10)$$

На каждом этапе, как числителя, так и знаменателя выражения (9.10), легко выделить слагаемые, представляющие собой корректирующие коэффициенты системы уравнений. Например,

$$33 - \frac{31}{11} = \frac{a_{33} \cdot a_{11} - a_{31} \cdot a_{13}}{a_{11}} = \frac{1}{a_{11}} \Delta[a]_{2:2},$$

где $\Delta[a]_{2:2}$ – детерминант матрицы системы уравнений (9.6), из которой удалены вторая строка и второй столбец.

Таким образом, выражение (9.10) может быть записано более компактно с помощью определителей:

$$x_3 = \frac{\Delta[a']_{2:2} - \frac{\Delta[a]_{2:3}}{\Delta[a]_{3:3}}}{\Delta[a]_{2:2} - \frac{\Delta[a]_{2:3}}{\Delta[a]_{3:3}}} = \frac{\Delta[a']_{3:2}}{\Delta[a]_{3:2}}, \quad (9.11)$$

где $\Delta[a]_{2:2}$ – определитель матрицы системы уравнений (9.6), у которой вычеркнуты вторая строка и второй столбец;

$\Delta[a']_{2:2}$ – определитель матрицы, у которой вычеркнуты вторая строки и второй столбец, но один из столбцов заменен правой частью системы уравнений (9.6).

Пример. Проверим структуру решения (9.10), (9.11) на простом примере:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 5 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 5 \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}, \quad (9.12)$$

Запишем матрицу системы уравнений с правой частью в третьем столбце так, чтобы было легко составить формулу Крамера:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Индексация строк и столбцов обычная – с помощью цифр натурального ряда чисел. Увеличение номеров столбцов происходит слева-направо, а строк – сверху-вниз. Подставим численные значения коэффициентов системы уравнений (9.12) в выражение (9.11):

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}} = \frac{7 - \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = 2.$$

Полученный результат легко проверить, вычислив два определителя по формуле Крамера вручную, либо на программе Excel. Отметим, что выражения (9.10), (9.11) являются особой формой записи ветвящейся цепной дроби, которую назовем гауссовой.

Выражение (9.10) можно использовать для определения численных значений двух остальных неизвестных системы уравнений (9.6). Покажем это на примере определения численного значения второй неизвестной x_2 . Для этого поменяем местами вторую и третью строки матрицы системы уравнений (9.6), а затем – второй и третий столбец. Получим следующую матрицу и вектор правых частей (9.6*а), после чего подставим в нее численные значения коэффициентов (9.6*б):

$$\text{а) } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{34} \\ a_{24} \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}. \quad (9.13)$$

Можно перенести численные значения из матрицы (9.13б) в исходную (9.13а) и найти величину второй неизвестной – $x_2 = 1$. Промежуточные вычисления здесь элементарны и каждый читатель может их проделать самостоятельно.

Однако, есть возможность найти значение этой переменной, воспользовавшись выражением (9.10), подставляя в него значения элементов матрицы (9.13б), считая, что номера строк от 1 до 3 сверху вниз, а номера столбцов от 1 до 3 слева на право.

Как видим, в методе Гаусса можно отказаться от прямого хода и не производить исключения переменных, а также нахождение численных значений коэффициентов «исправленных» систем уравнений. В процессе решения будут участвовать только коэффициенты исходной системы уравнений. Результаты, которые мы будем последовательно получать, следует рассматривать только как некоторые приближения искомой переменной. Итак, запишем первое приближение, используя выражение (9.8):

$$x_3^{(1)} = \frac{a_{34}}{a_{33}}; \quad (9.8^*)$$

второе приближение переменной получим по формуле (9.9):

$$x_3^{(2)} = \frac{a_{34} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{24}}{a_{33} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{23}} \cdot \quad (9.9^*)$$

Третье приближение неизвестной в нашем случае совпадает с точным решением (9.10). При размерах матрицы системы уравнений, превышающих число три, ряд приближений (9.8*), (9.9*) будет значительно длиннее. Таким образом, получаем метод решения, в котором число переменных не уменьшается, а последовательно увеличивается [36].

Покажем этапы этого метода более подробно на том же примере. Начинаем решение с преобразованного уравнения (9.8):

$$a_{33}x_3^{(1)} = a_{34} \Rightarrow x_3^{(1)} = \frac{a_{34}}{a_{33}} \cdot \quad (9.14)$$

Введем в рассмотрение еще одну переменную (преобразованное уравнение (9.7)):

$$\begin{cases} a_{22}x_2^{(2)} + a_{23}x_3^{(2)} = a_{24} \\ a_{32}x_2^{(2)} + a_{33}x_3^{(2)} = a_{34} \end{cases} \cdot \quad (9.7^*)$$

Из системы уравнений (9.7*) получаем второе приближение для той же переменной:

$$x_3^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \cdot \quad (9.15)$$

Конечно, из формулы (9.15) можно легко получить численное значение второго приближения переменной, однако поступим по-другому и преобразуем определители формулы (9.15) так, как было показано выше:

$$x_3^{(2)} = \frac{a_{34} - \frac{a_{32}}{a_{22}}}{a_{33} - \frac{a_{32}}{a_{22}}} \cdot \frac{a_{24}}{a_{23}}. \quad (9.16)$$

Обратим внимание на то, что второе приближение переменной получается из первого приближения после «гауссовой» коррекции значений коэффициентов.

$$x_3^{(2)} = \frac{34 - \frac{32}{22}}{33 - \frac{32}{22}} \cdot \frac{24}{23}. \quad (9.17)$$

На уровне матричных индексов коэффициентов системы уравнений (9.6) эту процедуру можно формализовать:

Из выражения (9.17) видно, что индексы коэффициентов первого приближения используются в формальном выражении слагаемого коррекции отдельно. Их размещают на первом и последнем месте корректирующей «цепочки» числителя (знаменателя). Остальные места цепочки заполняются индексом переменной 2, которая добавляется на данном этапе решения. Следующий этап увеличения числа переменных системы уравнений даст возможность получить третье приближение значения искомой переменной. Для этого достаточно произвести коррекцию каждого коэффициента выражения (9.16) по предложенному формальному правилу (9.17), где добавленной величиной будет переменная за номером 1. После этого остается сравнить результат с выражением (9.10).

Пример. Найдём контурные токи электрической цепи рис.9.2, два контура из которой изображены на рис.9.1. Сначала найдём величины контурных токов по обычной методике, а потом найдём ток третьего контура по выражению (9.10).

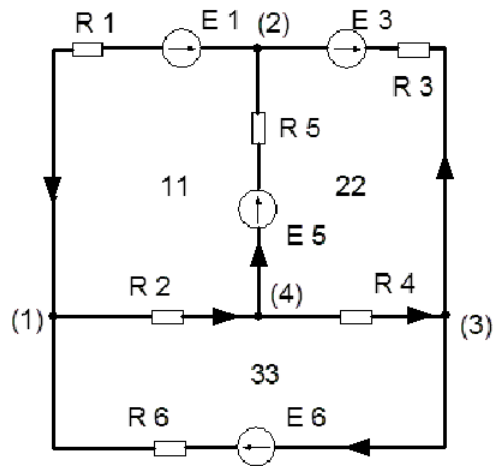


Рис. 9.2. Простая электрическая цепь.

Параметры элементов электрической цепи рис.9.2:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 10\text{Ом}, & R_4 &= 25\text{Ом}, & E_1 &= 10\text{В}, & E_5 &= 20\text{В}, \\
 R_2 &= 15\text{Ом}, & R_5 &= 30\text{Ом}, & E_3 &= 15\text{В}, & E_6 &= 25\text{В}. \\
 R_3 &= 20\text{Ом}, & R_6 &= 35\text{Ом}.
 \end{aligned}$$

Система уравнений, составленная по методу контурных токов:

$$\begin{bmatrix}
 (R_1 + R_2 + R_5) & -R_5 & -R_2 \\
 -R_5 & (R_3 + R_4 + R_5) & -R_4 \\
 -R_2 & -R_4 & (R_2 + R_4 + R_6)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 I_{11} \\
 I_{22} \\
 I_{33}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -E_1 + E_5 \\
 -E_3 - E_5 \\
 -E_6
 \end{bmatrix}.$$

Матрица и вектор правых частей в численном виде:

$$\begin{bmatrix}
 55 & -30 & -15 \\
 -30 & 75 & -25 \\
 -15 & -25 & 75
 \end{bmatrix};
 \begin{bmatrix}
 10 \\
 -35 \\
 -25
 \end{bmatrix}.$$

Значения контурных токов находим по формуле Крамера:

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= -0.52788\text{А}, \\
 I_{22} &= -0.92714\text{А}, \\
 I_{33} &= -0.74796\text{А}.
 \end{aligned}$$

Из выражения (9.10) легко получить подходящие дроби. Найдем первое приближение значения третьего контурного тока:

$$I_{33}^{(1)} = \frac{E_{33}}{R_{33}} = \frac{-E_6}{(R_2 + R_4 + R_6)} = \frac{-25}{75} = -0.333334A. \quad (9.18)$$

Результат (9.18) получен так, как рекомендовал Кирхгоф, когда граф редуцируют до одного контура. Вторую подходящую дробь (9.19) легко получить из того же выражения (9.10):

$$I_{33}^{(2)} = \frac{E_{33} - \frac{R_{32}}{R_{22}} E_{24}}{R_{33} - \frac{R_{32}}{R_{22}} R_{23}} = \frac{-25 - \frac{-25}{75} E_{24}}{75 - \frac{-25}{75} R_{23}} = -0.55A. \quad (9.19)$$

Третье приближение численного значения величины тока третьего контура будет точным. Воспользуемся выражением (9.10) напрямую, подставляя соответствующие значения вместо индексов, которые обозначают соответствующие клетки матрицы с численными значениями. Не будем записывать выкладки подробно, так как принцип подстановки ясен из выражений для первого и второго приближений:

$$I_{33}^{(3)} = I_{33} = \frac{-22.272728 - \frac{-33.181818}{58.636364} E_{24}}{70.909091 - \frac{-33.181818}{58.636364} R_{23}} = \frac{-38.992248}{52.131784} = -0.747955A. \quad (9.20)$$

Остается сравнить значение величины тока третьего контура (9.20) с результатом, полученным по традиционной методике.

Итак, представленная модификация метода Гаусса позволяет получать последовательные приближения решений в виде особой формы ветвящихся цепных дробей (9.18), (9.19), (9.20), которые являются членами ряда подходящих дробей. Значения подходящих дробей сходятся к точному решению системы алгебраических уравнений при условии, что оно существует. Разность значений соседних подходящих дробей позволяет оценить погрешность результата, ее величина уменьшается от одной дроби к другой. На практике процесс получения подходящих дробей можно останавливать при достижении погрешности, принятой для конкретного

расчета. Другими словами, полную ветвящуюся цепную дробь (которая так и останется неизвестной) заменяем рядом подходящих дробей.

Авторами теории ветвящихся цепных дробей [32] был поставлен эксперимент, который должен был убедить, прежде всего, их самих в практической ценности нового математического объекта. В качестве примера была взята алгебраическая система из двухсот уравнений. Матрица системы была достаточно плотно заполнена, а численные значения ее коэффициентов находились в интервале от 1 до 1000. Соотношение определителей формулы Крамера раскрывалось с помощью программы и для каждой подходящей дроби находились численные значения погрешности. Оказалось, что раскрывать цепную дробь дальше 9–11 этажей не имеет смысла, так как точность результата в эксперименте превышала установленную – 0.01%. Отметим, что полная ветвящаяся цепная дробь в этой задаче имеет 399 этажей.

Особо отметим, что прямой метод решения систем алгебраических уравнений, названный именем Гаусса, порождает особый вид ветвящихся цепных дробей. Ряд подходящих дробей можно получать так, как показано выше, и остановить этот процесс при достижении величины погрешности переменной до установленного значения допустимой точности. Очевидно, что количество элементарных операций подобных вычислений будет на несколько порядков меньше числа n^3 .

10. Структура схемных функций электрической цепи

« ... существует то усложнение арифметического действия, ... что *ряды чисел* подчиняются в своей структуре ... арифметическому *действию или их системе*».

Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Внимательное изучение структуры схемных функций электрической цепи началось, пожалуй, с работы В.Кауэра [37]. Его интересовали функции входного сопротивления электрических фильтров, в основе структуры которых была лестничная схема, рис.10.1. Эти функции ученый получал в виде цепной дроби, применяя алгоритм, который понятен любому специалисту по теории электрических цепей. В зависимости от типа электрического фильтра (ФНЧ, ФВЧ, ПФ) ветви его структуры содержат разные наборы элементов. По этой причине существует пять форм Кауэра, т.е. схем, функции которых представляются с помощью цепных дробей.

На рис.10.1 приведена лестничная схема, содержащая только резисторы, т.к. нас, прежде всего, интересуют алгебраические цепи и их структура. Чтобы не затемнять изображение электрической цепи, стрелками обозначены только направления токов ветвей, которым соответствуют также направления напряжений, они на резисторах совпадают.

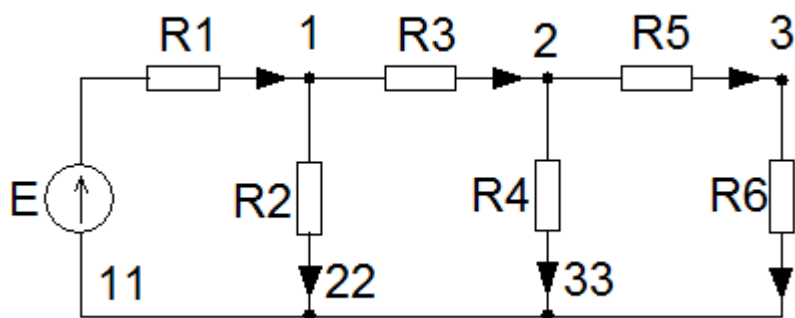


Рис. 10.1. Традиционное изображение лестничной схемы.

Напомним, что алгоритм получения функции входного сопротивления начинается с операции деления напряжения источника ЭДС (входное напряжение) на ток первой ветви (входной ток):

$$R_{ex} = \frac{E}{I_1} = \frac{U_1 + U_2}{I_1} = R_1 + \frac{1}{\frac{I_1}{U_2}} = R_1 + \frac{1}{\frac{I_2 + I_3}{U_2}} = \dots \quad (10.1)$$

Структура графа схемы рис.10.1 вносится в математическое выражение (10.1) с помощью последовательного применения законов Кирхгофа к токам и напряжениям цепи. Например,

$$E = U_1 + U_2, \quad I_1 = I_2 + I_3. \quad (10.2)$$

Повторение этих операций для других звеньев произвольной лестничной схемы в пределе дает бесконечную цепную дробь [37].

В результате этих преобразований получаем простую цепную дробь как функцию входного сопротивления электрической цепи рис.10.1:

$$R_{ex} = R_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{Y_4 + \dots}}}, \quad (10.3)$$

где $Y_i = \frac{1}{R_i}$ – проводимость ветви.

Отметим, что коэффициенты цепной дроби (10.3) являются параметрами элементов электрической цепи рис.10.1.

Представление входного сопротивления в виде простой цепной дроби можно получить непосредственно из системы уравнений (10.4).

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \underline{Y}_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \underline{Z}_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \underline{Y}_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \underline{Z}_5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \underline{Y}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \\ I_3 \\ U_4 \\ I_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.4)$$

Входное сопротивление схемы рис.10.1 находим как соотношение детерминант матрицы этой системы уравнений (10.4):

$$\underline{Z}_{in} = \frac{\Delta[M]}{\Delta[M]_{\bar{1};\bar{1}}}, \quad (10.5)$$

где $\Delta[M]_{\bar{1};\bar{1}}$ – определитель матрицы уравнения (10.4), из которой

удаляются строка и столбец под номером 1.

Если принять, что параметры элементов лестничной схемы равны единице, и внести их в систему уравнений (10.4), то продолжать раскрытие соотношения (10.5) можно будет только на уровне номеров ячеек матрицы, в которых располагались параметры элементов схемы.

Применим теорему Лапласа к первой строке определителя, стоящего в числителе выражения (10.5):

$$Z_{in} = \frac{11|M|_{\bar{1};\bar{1}} - 12|M|_{\bar{1};\bar{2}}}{|M|_{\bar{1};\bar{1}}} = 11 - \frac{12}{\frac{|M|_{\bar{1};\bar{1}}}{|M|_{\bar{1};\bar{2}}}}. \quad (10.6)$$

Чередую раскрытия определителей по строке и столбцу, получим цепную дробь:

$$Z_{in} = 11 - \frac{12}{\frac{22}{21} - \frac{23}{\frac{21}{32} - \frac{43}{\frac{44}{34} - \frac{45}{\frac{34}{54} - \frac{55}{\frac{65}{66} - \frac{56}}{56}}}}}. \quad (10.7)$$

Номер ячейки матрицы $[M]$ (строка/столбец) представляет собой запись направленного отрезка в двудольном графе электрической цепи рис.10.2.

В нашем примере у схемы небольшое количество узлов, поэтому для их нумерации нет необходимости применять цифры больше 9-ти. В противном случае надо было бы отметить, что направленный отрезок - это кортеж из двух чисел, т.е. вектор-строка из двух элементов. Небольшой пример берется для того, чтобы не отвлекать внимание от главного – сути преобразования.

Рассмотрим двудольный граф рис.10.2 как граф, представляющий уравнение (10.4). Двудольным он называется потому, что каждый узел в нем выступает в двух образах – узла-истока и узла-стока.

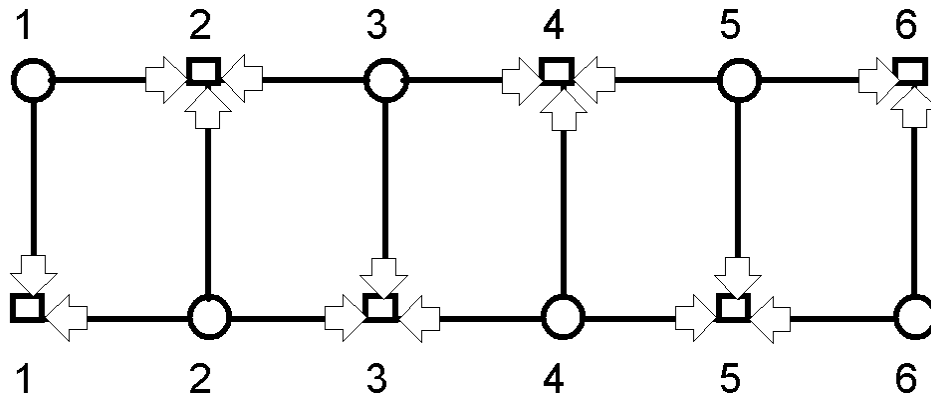


Рис.10.2. Двудольный граф электрической цепи рис.10.1

У каждого направленного отрезка есть свои узлы истока и стока, на графе они обозначаются окружностью и прямоугольником соответственно. Кроме того, у каждого узла (ветви) имеются свои электрические переменные потенциал узла (ток ветви).

Приведем дробь (10.7) к нормализованному виду с помощью тождественных преобразований выражения. Например, разделим элемент первого и второго этажей на символ отрезка 12:

$$\underline{Z}_{in} = 11 - \frac{12/12}{\frac{22/12}{21} - \frac{23/12}{\frac{32}{33} - \frac{43}{\frac{44}{34} - \frac{45}{\frac{54}{55} - \frac{65}{\frac{66}{56}}}}}} = 11 - \frac{1}{(12 \frac{1}{22} 21)^{-1} - \frac{23/12}{\dots}} \quad (10.8)$$

Преобразование можно продолжить, умножая элементы второго и третьего этажей на 12/23 и так далее. Результатом преобразования являются взаимно связанные дроби, в каждом числителе которых будет стоять единица:

$$\underline{Z}_{in} = A - \frac{1}{B - \frac{1}{C - \frac{1}{D - \frac{1}{E - \frac{1}{F}}}}}, \quad (10.9)$$

где коэффициенты цепной дроби равны

$$A=11; B=\left(12\frac{1}{22}21\right)^{-1}; C=12\frac{1}{32}33\frac{1}{23}21;$$

$$D=\left(12\frac{1}{32}34\frac{1}{44}43\frac{1}{23}21\right)^{-1}; E=12\frac{1}{32}34\frac{1}{54}55\frac{1}{45}43\frac{1}{23}21;$$

$$F=\left(12\frac{1}{32}34\frac{1}{54}56\frac{1}{66}65\frac{1}{45}43\frac{1}{23}21\right)^{-1}.$$

Если в выражения для коэффициентов дроби (10.9) подставить значения элементов из матрицы системы уравнений (10.4), то получим:

$$A=Z_1; B=-Y_2; C=Z_3; D=-Y_4; E=Z_5; F=-Y_6. \quad (10.10)$$

После подстановки значений (10.10) в цепную дробь (10.9) приходим к цепной дроби (10.3), т.е. к одной из форм Кауэра. Выражения для коэффициентов дроби (10.9) отражают структуру электрической цепи и являются значениями коэффициентов передачи некоторых путей в двудольном графе рис.10.2.

Структурные выражения коэффициентов (10.9) названы цепными путями [29]. Они обладают очевидным свойством «связки» – связаны одинаковыми индексами соседних «сомножителей», истоками и стоками соответственно. На рис.10.3 видно, что цепные пути охватывают окрестности узла 1 разного порядка (ближайшая окрестность $11; 12\frac{1}{22}21$, а также самая удаленная окрестность $12\frac{1}{32}34\frac{1}{54}56\frac{1}{66}65\frac{1}{45}43\frac{1}{23}21$). Направленные отрезки, расположенные встречно основному пути (от внешнего истока 1 к внешнему стоку 1), вносят отрицательный знак в выражение для коэффициента передачи цепного пути.

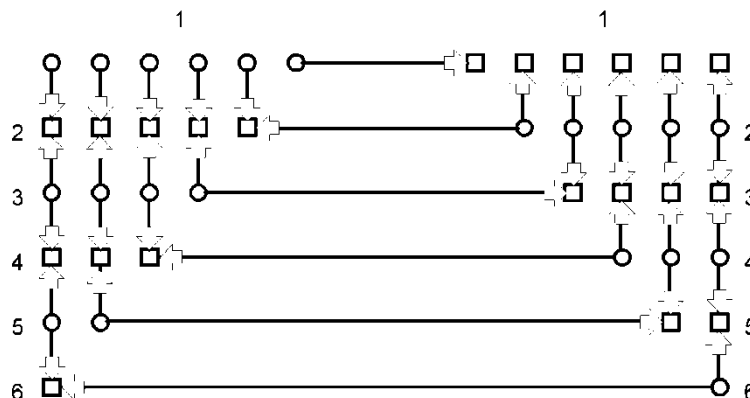


Рис.10.3. Цепные пути на двудольном графе рис.10.2.

При единичных значениях параметров лестничной схемы коэффициенты передачи любых цепных путей равны единице. Все пути одинаковые, нет путей, движение по которым требует минимальных или максимальных затрат энергии, что отражает ситуацию полной неопределенности.

Замена коэффициентов системы уравнений (10.4) на номера ячеек матрицы позволила открыть сложную структуру элементов форм Кауэра, которые представляют собой не только параметры элементов лестничной схемы, но и являются коэффициентами передачи цепных путей.

На рис.10.4 представлен результат преобразования множества цепных путей рис.10.3, при котором объединялись одинаковые направленные отрезки. Структура дерева рис.10.4 напоминает структуру цепной дроби (10.7), в которой произведено упорядочение: элементы цепных дробей расположены по этажам в соответствии с правилом «сцепки».

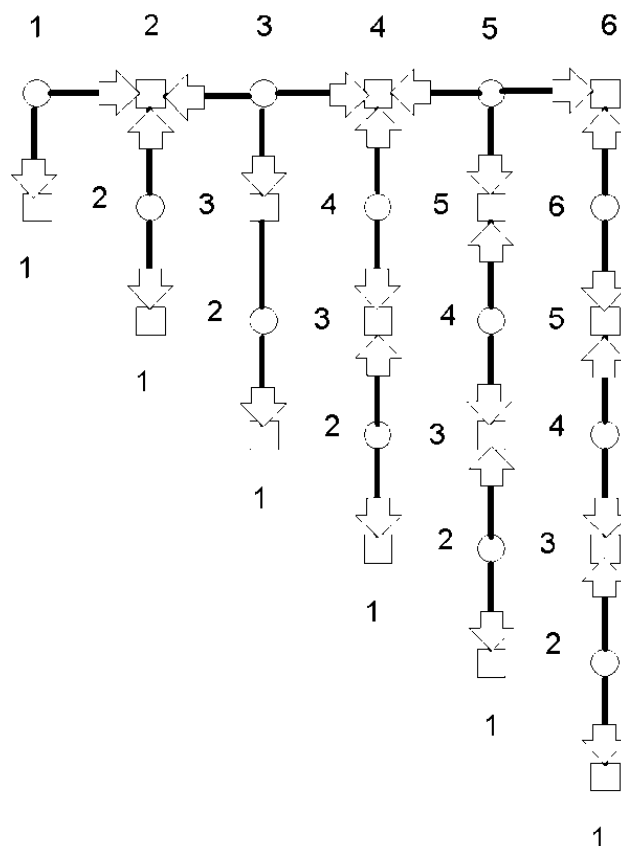


Рис. 10.4. Дерево двудольного графа рис.10.2.

Упорядоченная цепная дробь, соответствующая дереву рис.10.4, представлена выражением (10.11).

$$Z_{in} = 11 - \frac{12}{\frac{22}{\frac{21}{\frac{33}{\frac{23}{21}} - \frac{34}{\frac{44}{\frac{43}{21}} - \frac{54}{\frac{55}{\frac{23}{21}} - \frac{56}{\frac{45}{\frac{43}{21}} - \frac{66}{\frac{65}{\frac{45}{21}} - \frac{43}{21}}}}}}}}}} \quad (10.11)$$

Отмеченное соответствие позволяет записать цепную дробь (10.11) непосредственно по двудольному дереву рис.10.4, а само дерево может быть получено с помощью схемы соединения элементов схемы.

Рассмотрим внимательно рис.10.4, разбивая двудольное дерево на очевидные этапы построения. На первом этапе узел-исток 1 представляется множеством своих ветвей: 11,12 [5]. Множество ветвей узла-стока 2 продолжает построение дерева на втором этапе. Ветвь 21 из множества узла-истока 2 завершает построение двудольного замкнутого пути $12 \frac{1}{22} 21$. Так, «связывая» узловые множества, можем завершить построение двудольного дерева рис.10.4.

Отметим, что прочерчивая цепные пути, необходимо соблюдать известное свойство электрического контура в графе схемы – замкнутый путь включает любую ветвь только один раз. Эскиз этого алгоритма построения контуров схемы был предложен Г. Кирхгофом в одной из своих первых статей [4]. Смысл этого построения не был понят переводчиками и редакторами книги, поэтому рисунок, напоминающий дерево, не был включен в издание избранных трудов Кирхгофа.

В заключение отметим, что существуют два типа графов: граф-схема, рис.10.1 и граф-уравнение, который и является двудольным графом, рис.10.2. Оба графа отражают одну и ту же схему соединений элементов лестничной схемы, т.е. ее структуру. Покажем их различия на примере.

Пример. На рис.10.5 представлена схема модельного примера. Параметры схемы рис.10.5:

$$R_1 = 10 \text{ Ом}; R_3 = 25 \text{ Ом}; R_5 = 30 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 20 \text{ Ом}; R_4 = 15 \text{ Ом}; R_6 = 5 \text{ Ом}. J_6 = 2 \text{ А}.$$

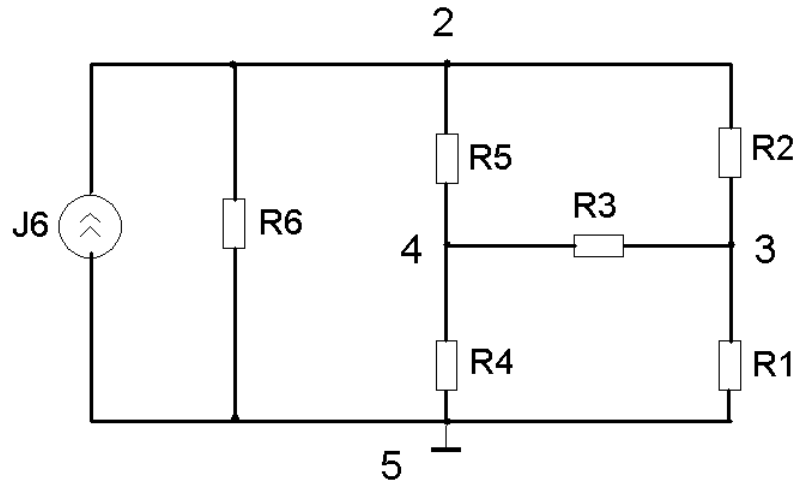


Рис. 10.5. Мостовая измерительная схема

Опишем электрическую цепь рис.10.5 по методу узловых потенциалов. Ниже приведена система уравнений схемы рис.10.5, в матрице которой проставлены численные значения коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} 0,283333 & -0,05 & -0,033333 \\ -0,05 & 0,19 & -0,04 \\ -0,033333 & -0,04 & 0,139999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.12)$$

Найдем значение потенциала узла 3 по правилу Крамера:

$$\varphi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0,016666}{0,0063888} = 2,6086275 \text{ В.}$$

Переходная проводимость от 2 узла к 3-му узлу будет равна:

$$g_{23} = \frac{J_6}{\varphi_3} = \frac{2}{2,6086275} = 0,766686 \text{ Ом}^{-1}. \quad (10.13)$$

То же самое значение переходной проводимости найдем, используя только понятия топологии схем. Запишем множества ветвей узлов, за исключением заземленного узла и его ветвей в других множествах:

	Узел-исток	Узел-сток	
2)	22, 23, 24	22, 32, 42	(10.14)
3)	32, 33, 34	23, 33, 43	
4)	42, 43, 44	24, 34, 44	

Используя узловые множества (10.14) построим двудольное «дерево» цепных путей от узла 2 (истока) до узла 3 (стока).

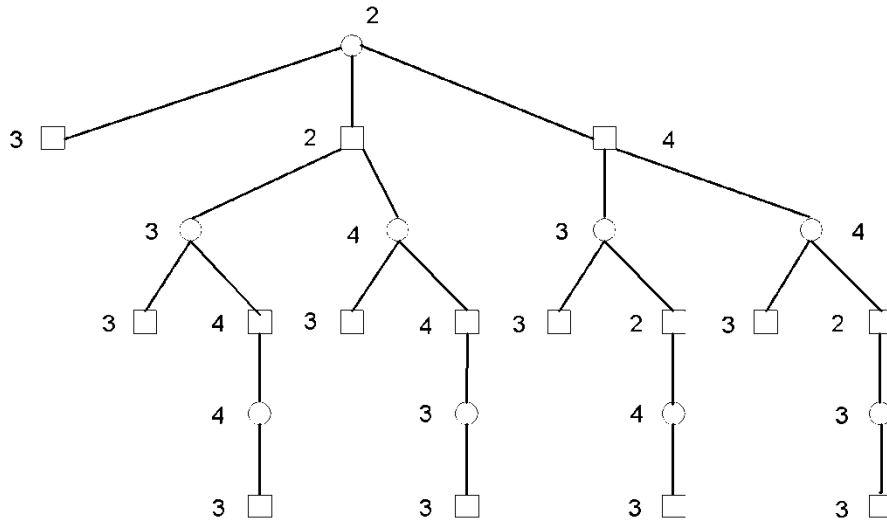


Рис. 10.6. Двудольное дерево цепных путей электрической цепи рис.10.5

Дереву рис.10.6 соответствует ветвящаяся цепную дробь (10.15):

$$g_{23} = 23 - \frac{22}{\frac{32}{33 - \frac{34}{44}} + \frac{42}{43 - \frac{44}{34}}} - \frac{24}{\frac{34}{33 - \frac{32}{42}} + \frac{44}{43 - \frac{42}{32}}} \quad (12.15)$$

После подстановки в ветвящуюся цепную дробь (10.15) значений элементов матрицы (10.14) получим значение переходной проводимости:

$$g_{23} = 0,766666 \text{ Ом}^{-1}. \quad (10.16)$$

Сравним численные значения переходной проводимости g_{23} , найденные традиционным методом (10.13) и с помощью понятий топологии схем (10.16).

Как видим, приведенный топологический алгоритм построения двудольного дерева можно применять не только для нахождения контуров в двудольном графе рис.10.4, но и для получения множества разомкнутых путей между выбранными узлами (истока/стока), рис.10.6. Нет никаких ограничений к применению этого алгоритма для поиска путей в двудольных графах-уравнениях произвольных электрических цепей.

Итак, простая цепная дробь (10.11) и ветвящаяся цепная дробь (10.15) являются упорядоченными дробями, поэтому вторую из них можно записать в нормализованной форме, аналогично (10.9):

$$g_{23} = J - \frac{1}{\frac{1}{K - \frac{1}{L}} + \frac{1}{M - \frac{1}{N}}} - \frac{1}{\frac{1}{O - \frac{1}{P}} + \frac{1}{Q - \frac{1}{R}}}, \quad (10.17)$$

где $J = 23$; $K = (22 \frac{1}{32} 33)$; $L = (22 \frac{1}{32} 34 \frac{1}{44} 43)^{-1}$

$$M = (22 \frac{1}{42} 43); \quad N = (22 \frac{1}{32} 34 \frac{1}{44} 43)^{-1};$$

$$O = (24 \frac{1}{34} 33); \quad P = (24 \frac{1}{34} 32 \frac{1}{42} 43)^{-1};$$

$$Q = (24 \frac{1}{44} 42); \quad R = (24 \frac{1}{44} 42 \frac{1}{32} 33)^{-1}.$$

Как сходство, так и различия дробей (10.9), (10.17) очевидны. Сходство дробей состоит в том, что их коэффициенты представляют собой цепные пути в двудольных графах-уравнениях разных электрических схем. Различия дробей следуют из того, что лестничная схема описана системой уравнений с неоднородным координатным базисом, а система уравнений другой схемы имеет однородный координатный базис.

Схемные функции более сложных графов можно представить как соотношение определителей некоторой матрицы, аналогично выражению (10.5) [32]. Двудольное дерево этой функции раскрывается так же, как показано в примере. По дереву записывается соответствующая цепная дробь.

Проведем рассмотрение особенностей применения алгоритма последовательного деления к выражениям функций схем с графом, отличающимся от рис.10.1. В качестве примера возьмем схему моста Уитстона, рис.10.7.

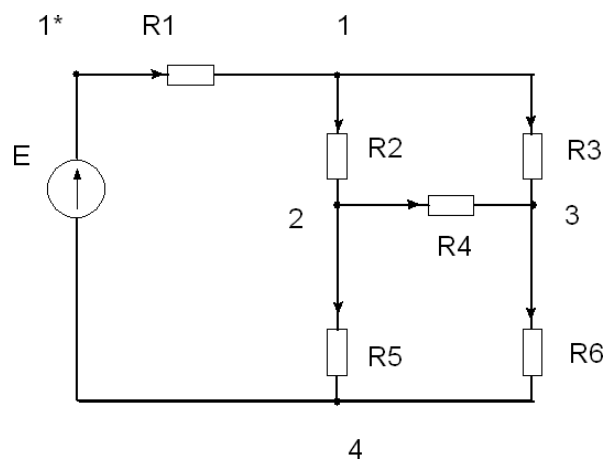


Рис. 10.7. Схема моста Уитстона.

Аналогично выражению (10.1) определим входное сопротивление схемы рис.10.7 между узлами 1* и 4:

$$Z_{ex} = \frac{E}{I_1} = \frac{I_1 R_1 + (\varphi_1 - \varphi_4)}{I_1} = R_1 + \frac{1}{\frac{I_2 + I_3}{(\varphi_1 - \varphi_4)}} = \quad (10.18)$$

Как видно из выражения (10.18), в процессе последовательного деления были использованы второй и первый законы Кирхгофа, после чего первый цикл преобразования можно считать завершенным. Чтобы продолжить разложение в цепную дробь, обратимся к разности потенциалов, находящейся на третьем этаже. В соответствии со схемой представим эту разность следующим образом:

$$(\varphi_1 - \varphi_4) = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_4) = (\varphi_1 - \varphi_3) + (\varphi_3 - \varphi_4).$$

Цикл преобразования повторяется:

$$Z_{ex} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_4)}{I_2}} + \frac{1}{\frac{(\varphi_1 - \varphi_3) + (\varphi_3 - \varphi_4)}{I_3}}} \quad (10.19)$$

В результате выполнения нескольких циклов последовательного деления получаем следующее выражение:

$$Z_{ex} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2 + \frac{1}{G_5 + \frac{1}{R_4 + \frac{1}{G_6 + \frac{1}{R_4 + \frac{1}{G_5 + \frac{1}{R_2 + A_2}}}}} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{G_6 + \frac{1}{R_4 + \frac{1}{G_5 + \frac{1}{R_3 + A_1}}}}} \quad (10.20)$$

Разложение в цепную дробь не закончено. На последнем этаже дроби присутствуют слагаемые, которые являются остатками деления в каждой из двух ветвей цепной дроби:

$$A_1 = \frac{-I_3}{(\varphi_1 - \varphi_4)}; A_2 = \frac{I_2}{-(\varphi_1 - \varphi_4)}. \quad (10.21)$$

Другими словами, последовательное деление может быть продолжено. В левой ветви (10.20) появится выражение правой ветви, а в правой – левой ветви. Таким образом, в цепной дроби появится периодичность. Если остатки деления (10.21) принять равными нулю, а параметры цепи – равными единице, то получим следующую ветвящуюся цепную дробь:

$$Z \Rightarrow 1 + \frac{1}{\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = 1,8 \quad (10.22)$$

Ветви ветвящейся цепной дроби аналогичны простым цепным дробям, которые получаются в результате преобразования входного сопротивления лестничной схемы [31]. Представим эти ветви графически:

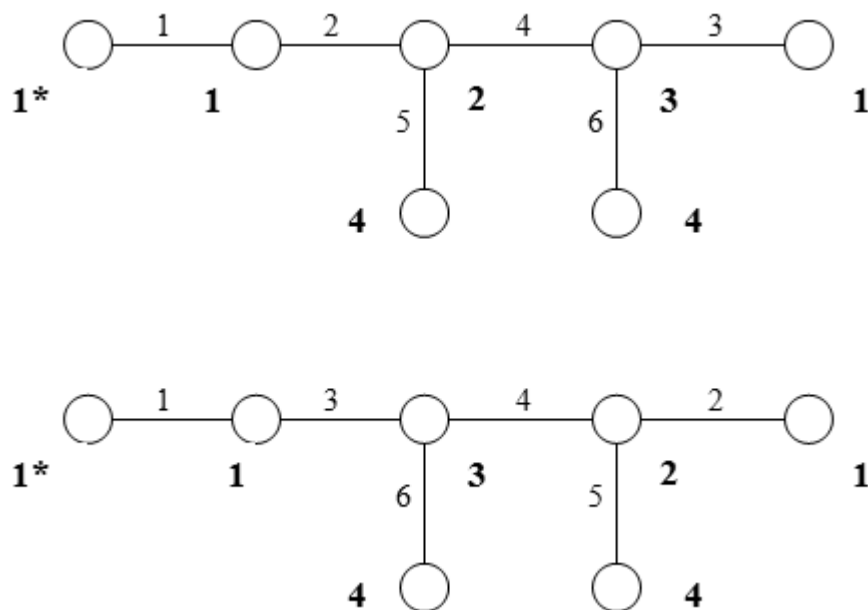


Рис. 10.8. Структура ветвей дроби (10.22).

Новый математический объект (10.20) обладает уникальными свойствами, которые позволяют производить приближенные вычисления. Отметим, что ветвящаяся цепная дробь получена с помощью законов теории электрических цепей, а затем это выражение было преобразовано в структуру схемной функции. Дробь, аналогичная выражению (10.22), может быть получена формально из соотношения членов ряда Фибоначчи. Покажем алгоритм получения структур на примере рядов известных чисел.

Существует большое количество числовых последовательностей, которые дают возможность вычислять значения, аналогичные греческому сечению, которое является индексом определенной симметрии. Более сложные типы симметрии выражаются с помощью **обобщенных** чисел Фибоначчи (p – чисел Фибоначчи) [38]:

Для заданного значения $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ числовые последовательности $F_p(n)$ получают с помощью следующих рекуррентных соотношений:
 $F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1)$, (для $n > p+1$)

$$F_p(1) = F_p(2) = \dots = F_p(p+1) = 1. \quad (10.23)$$

Эти числовые последовательности включают в себя как ряд значений 2^N ($p = 0$), так и классический ряд Фибоначчи ($p = 1$).

На каждой численной последовательности (10.23) можно определить

$$\tau_P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_P(n)}{F_P(n-1)}$$

следующее соотношение:

$$(10.24)$$

По этой формуле вычисляются значения **обобщенных золотых сечений**.

Численные значения обобщенного золотого сечения характеризуют разные виды симметрии. Приведем для сравнения только некоторые из них (при $p=0,1,2,3,4$):

$$\begin{aligned} p=0, \tau_0 &= 2; \\ p=1, \tau_1 &= 1,618\dots; \\ p=2, \tau_2 &= 1,465\dots; \\ p=3, \tau_3 &= 1,380\dots; \\ p=4, \tau_4 &= 1,324\dots \end{aligned} \quad (10.25)$$

Очевидно, что тип симметрии, представляемой второй строчкой (10.25), соответствует лестничной схеме. Без сомнения, последующие строчки представляют другие математические структуры.

В качестве примера исследуем числовую последовательность, соответствующую третьей строчке записи (10.25):

$$1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, \dots$$

Запишем итерационную формулу, по которой вычисляются члены этой числовой последовательности:

$$F_2(n) = F_2(n-1) + F_2(n-3) \quad (10.26)$$

Раскроем соотношение двух конкретных членов ряда:

$$\frac{F_2(9)}{F_2(8)} = \frac{13}{9} = \frac{9+4}{9} = 1 + \frac{1}{9} = 1 + \frac{1}{4+3+2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \dots$$

Если последовательное деление довести до логического конца, то получится следующая ветвящаяся цепная дробь:

$$\frac{F_2(9)}{F_2(8)} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} \quad (10.27)$$

Численное значение этой дроби равно 1.4444..., что является определенным приближением индекса симметрии, представленной третьей строчкой перечисления (10.25). Можно предположить, что выражение (10.27) является структурой некоторой функции схемы, граф которой пока неизвестен.

На классическом примере схемы моста Уитстона показано, что известный алгоритм получения форм Кауэра можно распространить на электрические цепи с более сложным графом. При «особых» (единичных) численных значениях параметров дробь превращается в математический объект, который имеет геометрическую интерпретацию. Впервые это было обнаружено Кирхгофом [39]. Структура схемной функции отражает структуру графа электрической цепи. Роль аргументов этой функции играют параметры ветвей схемы.

11. Числовой индекс графа и его частей

« ... *число* ... возможно как *выразительная форма*».

Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Граф, или его дерево, можно представить числом, что дает ученым возможность для различных теоретических построений, например, для создания классификаций. Теория графов получила свое развитие в химии, которая, в конечном счете, изучает системы взаимно связанных атомов. Сформулируем более точно: изучаемые химией системы состоят из атомов, молекулярных устойчивых групп и связей между ними.

Для наглядного представления строения молекул разных химических соединений используются двухмерные, трехмерные и более сложные рисунки и конструкции, состоящие из шаров и стержней. Наравне с объемными моделями молекул веществ используются и плоские конструкции, изображения которых могут быть представлены плоским графом. Другими словами, при анализе свойств некоторых веществ возможно применение графа, отображающего внутреннее строение молекул [40]:

«Молекулярные структуры фактически являются графами, в которых атомы представляются вершинами, а ковалентные химические связи – ребрами. Такой граф описывает связность атомов в молекулярном скелете независимо от метрических свойств, т.е. равновесного межъядерного расстояния, валентных углов и т.д., соответствующих данной химической структуре».

Молекулярный граф делает очевидной внутреннюю структуру вещества, отражает химические связи между атомами.

В статье [41] роль структуры рассматривается более широко:

«Имеется чрезвычайно большое количество эмпирических данных, свидетельствующих о том, что многие свойства, особенно в сопряженных π – электронных системах, являются в первую очередь следствиями схемы связности атомов в молекуле, а более тонкие количественные характеристики молекулярной геометрии играют лишь второстепенную роль».

Если граф представляет только связи между атомами, т.е. отражает топологию молекулы, которая сохраняет целостность и непрерывность взаимодействия атомов при любых изменениях геометрии.

Итак, структура графа содержит главную информацию о свойствах конкретного вещества. Основываясь на экспериментальных данных, структуру связывают с определенными свойствами химических соединений. Особенности структур характеризуют определенными числами – индексами графа, в основе которых лежат матрицы смежности или матрицы расстояний графа. Существует уже более 20-ти различных индексов, хотя первый из них был сформулирован в 1947 году.

«Этим индексом являлось число путей $W(G)$ для графа G , и он определялся как число связей, существующих между всеми парами углеродных атомов в молекулярном графе насыщенного углеводорода» [42].

Приведем пример из этого источника. На рис.11.1 приведен молекулярный граф и его матрицы.

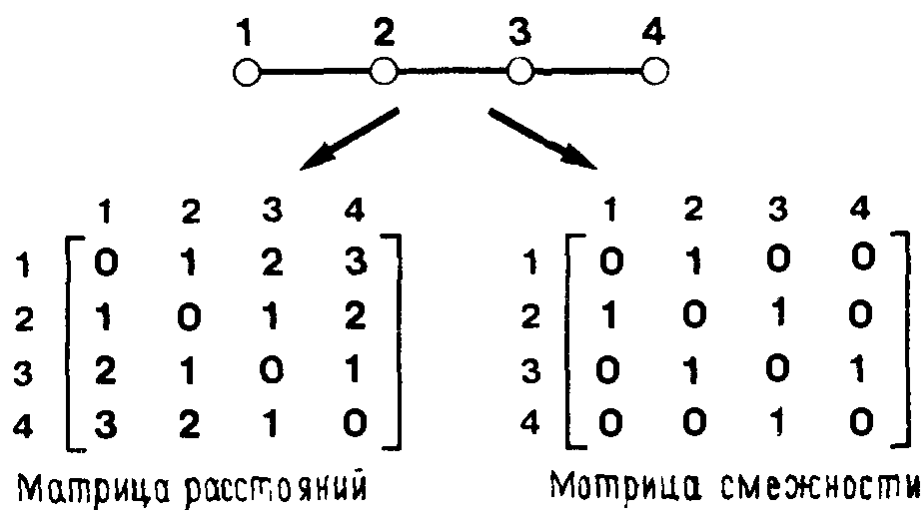


Рис. 11.1. Матрица расстояний и матрица смежности для молекулы Н - бутана.

Значение индекса Винера определяется как полу сумма всех элементов матрицы расстояний в молекулярном графе:

$$W(G) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} d_{ij}, \quad (11.1)$$

где d_{ij} – топологическое расстояние между атомами.

Численное значение индекса (11.1) для графа рис.11.1 равно **10**.

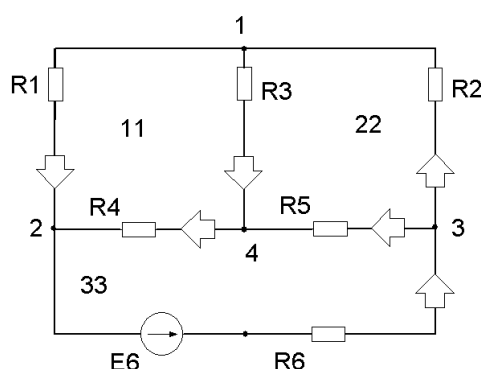
Индекс Бартона рассчитывается по матрице смежности:

$$A'(G) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}. \quad (11.2)$$

Численное значение индекса Бартона равно сумме всех элементов матрицы смежности – для нашего примера он **равен 6-ти**.

Теория электрических цепей также применяет графы для отображения связи между элементами схем. Есть определенная аналогия между структурами схем и молекул веществ, которые можно представлять плоскими графами. Покажем это на примере.

Пример. Вычислим индексы (11.1), (11.2) для графа схемы моста Уинстона.



Матрица расстояний

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

1 2 3 4

Матрица смежности

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

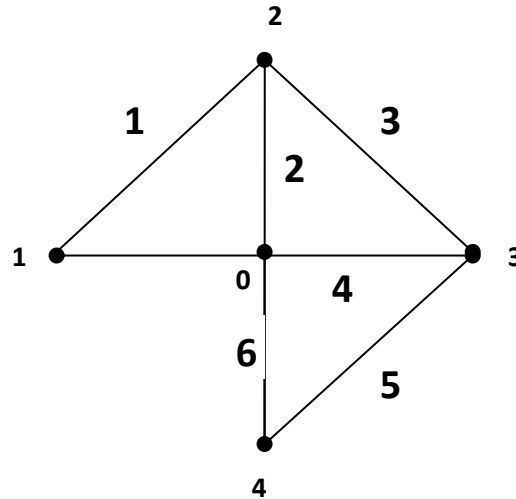
1 2 3 4

Рис. 11.2а. Расчет индексов графа моста Уинстона.

Значения индексов приведено ниже:

$$W(G) = 6, \quad A'(G) = 12.$$

Вычислим индексы (11.1), (11.2) для графа лестничной схемы, нетрадиционное изображение которого приведено ниже. Следует отметить, что традиционно ячейки графа схемы замыкаются мнимыми проводниками с нулевым сопротивлением, т.е. наличие общего узла с индексом 0 на традиционном графе не отображается.



Матрица расстояний

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{matrix}$$

1 2 3 4 0

Матрица смежности

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{matrix}$$

1 2 3 4 0

Рис. 11.26. Граф лестничной схемы.

Значения индексов приведено ниже:

$$W(G)=14, \quad A'(G)=12.$$

В наиболее ранних приложениях топологические индексы разрабатывались с целью корреляции, а затем прогнозирования широкого ряда физико-химических параметров веществ. Например, температура кипения, плотность вещества, теплота, выделяемая во время реакции. В последние годы возрастает число случаев применения топологических индексов при разработке новых лекарственных препаратов. На основании

сравнения индексов разных химических соединений отбираются наиболее перспективные вещества для создания новой лекарственной формы.

Заметим, что разработка нового лекарственного препарата представляет собой дорогой и длительный процесс:

«Исключительно большое число структур, которые необходимо исследовать, может быть проиллюстрировано тем фактом, что одна структура и 20 заместителей, присоединенных в шести различных положениях, будут приводить к полному числу исследуемых структур, равному 20^6 » [42].

Возможность сравнивать графы различных химических соединений с помощью индексов существенно сокращает и время, и затраты на разработку нового лекарственного препарата.

Итак, учет структуры химического соединения при изучении свойств этого вещества основано на использовании некоторого инварианта графа. Одним из таких инвариантов являются индексы графа, некоторые из которых описаны выше. Другим инвариантом графа используется характеристический полином матрицы смежности. Одним из его свойств есть независимость собственных значений от порядка нумерации узлов. Например, вид матрицы смежности изменяется при введении новой нумерации вершин, однако характеристический полином и его корни остаются неизменными.

Пусть дана матрица смежности $[A]$ и вектор \bar{U} такой, что результат их умножения сводится к выражению [6]:

$$[A] \cdot \bar{U} = \lambda \cdot \bar{U}. \quad (11.3)$$

Если выполняется условие (11.3), то вектор \bar{U} считается собственным, а число λ – собственным значением матрицы $[A]$. Собственные значения матрицы находятся из полинома, который получается после раскрытия определителя (11.4), приведенного ниже:

$$\det \begin{bmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{bmatrix} = 0. \quad (11.4)$$

Проиллюстрируем это на примере из книги [6].

Пример. Дана матрица [6]:

$$[A] = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ее характеристическое уравнение получается из следующего определителя

$$\det \begin{bmatrix} 11-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 10-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 6-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 180\lambda + 324 = 0.$$

Корни многочлена: $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 3$.

Теория электрических цепей рассматривает только такие системы уравнений, которые описывают конкретный физический объект, т.е. электрическую схему. Система уравнений, составленная методом узловых потенциалов, для схемы моста Уинстона будет иметь следующий вид, рис.11.2а,

$$\begin{bmatrix} (g_1 + g_2 + g_3) & -g_1 & -g_2 \\ -g_1 & (g_1 + g_4 + g_6) & -g_6 \\ -g_2 & -g_6 & (g_2 + g_5 + g_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -J_6 \\ J_6 \end{bmatrix},$$

где g – проводимости ветвей; φ – потенциалы узлов; J – номинал источника тока, эквивалентного источнику ЭДС.

Если принять все параметры цепи равными единице, то матрица системы уравнений будет представлять структуру графа электрической цепи.

Вычислим корни характеристического уравнения для графа схемы моста Уитстона:

$$\det \begin{bmatrix} (3-\lambda) & -1 & -1 \\ -1 & (3-\lambda) & -1 \\ -1 & -1 & (3-\lambda) \end{bmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 16 = 0$$

Уравнение имеет три корня:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 4.$$

Следует отметить, что система уравнений, составленная методом контурных токов, после преобразований дает нам идентичное уравнение и те же самые корни.

Найдем характеристическое уравнение и корни для структуры лестничной электрической схемы, рис.11.2б:

$$\det \begin{bmatrix} (2-\lambda) & -1 & 0 \\ -1 & (3-\lambda) & -1 \\ 0 & -1 & (3-\lambda) \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 13 = 0.$$

$$\lambda_1 = 4.246979, \quad \lambda_2 = 1.198062, \quad \lambda_3 = 2.554958.$$

Молекулярные графы многих соединений, изучаемых органической химией, имеют большой размер. Раскрыть большой определитель, аналогичный (11.4), удастся не всегда, поэтому ученые ищут способы решить задачу определения характеристического полинома нетрадиционно. В работе [43] описан алгоритм, который позволяет решить эту задачу, применяя метод упрощения структуры с последующим ее восстановлением. Описанный в статье метод напоминает алгоритм решения большой системы уравнений, предложенный Г. Кирхгофом [4]. Отличие методов состоит лишь в том, что электрическая цепь упрощалась до простейшей структуры, т.е. контура, а здесь до простейшего вида упрощается дерево графа.

Дано дерево молекулярного графа, у которого 22 вершины, рис.11.3. Вершины дерева со степенями равными единице определяются как принадлежащие к «листьям», а превосходящие единицу, считаются корнями,

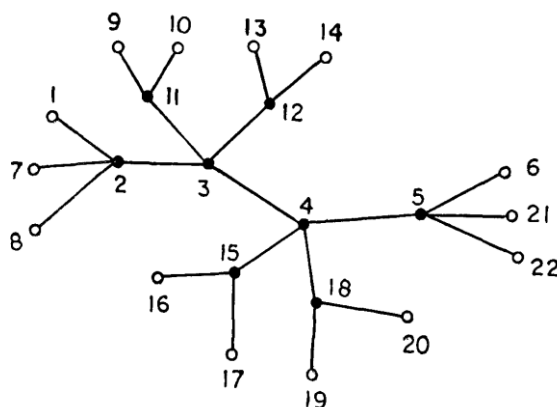


Рис. 11.3. Дерево графа.

разветвлениями. Листья любого дерева могут быть обрезаны для получения дерева меньшего размера, рис.11.4. Эта операция превращает ветви, на которых были листья, в новые листья. Конечно, упрощенное дерево рассматривается потом совместно с удаленными фрагментами.

После первой обрезки «листьев» графа рис.11.3, то есть проведения первого этапа преобразования исходного графа, получен результат, который представлен на рис.11.4. Как можно заметить, у нового графа есть два корневых узла (разветвления), поэтому производится вторая обрезка «листьев», проводится второй этап упрощения исходного графа рис.11.3. Дерево (1,2) не имеет «листьев», фрагмент H_{12} удален, поэтому оно идентично отдельной, не связанной с графом ветви, рис.11.5. Такой фрагмент графа легко описать математически, так как он обладает простейшей структурой.

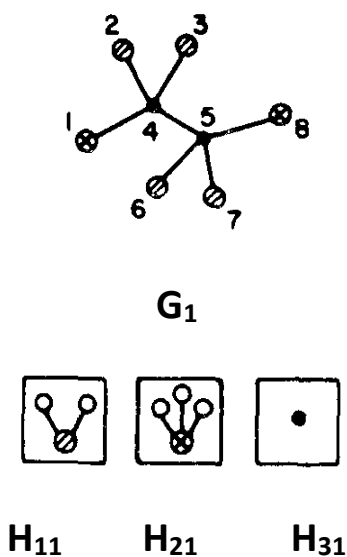


Рис. 11.4. Первый этап упрощения графа.

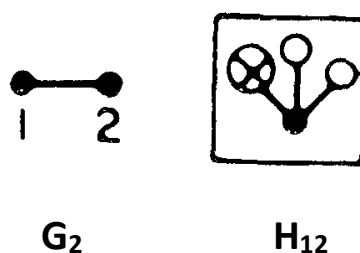


Рис. 11.5. Второй этап упрощения графа.

Граф рис.11.4 можно записать как функцию симметрии дерева и фрагмента. На рис.11.5 это обозначено как умножение:

$$G_1 = G_2 \cdot [H_{12}], \quad (11.5)$$

где G_2 – граф дерева, рис.11.5);

H_{12} – характеристический полином удаленного фрагмента графа.

Исходный граф рис.11.3 записывается таким же образом [44]:

$$G = G_1 \cdot [H_{11}, H_{21}, H_{31}] = G_2 \cdot [H_{12}] \cdot (H_{11}, H_{21}, H_{31}), \quad (11.6)$$

где H_{ij} – характеристические полиномы соответствующих фрагментов.

В статье [44] автор метода разъяснил суть операции, применяемой в формулах (11.5), (11.6). Формально особое умножение установлено в работе и названо **корневым умножением** (rooted product), или **возвращением «корня к корню»** (root-to-root).

Определение 1.1. Пусть H – маркированный граф с n узлами. Пусть G – последовательность из n графов G_1, G_2, \dots, G_n с корневыми узлами. Тогда $H(G)$ можно считать графом, в котором каждому корню G_i соответствует i -й узел H . Будем считать $H(G)$ корневым умножением графа H и G .

Основные понятия определения 1.1. объясняются наглядно на рис.11.6:

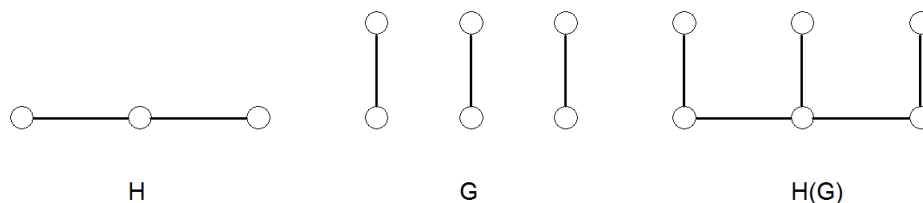


Рис. 11.6. Обрезка простого графа $H(G)$.

Отметим, что граф, представленной на рис.11.6, можно рассматривать как часть структуры лестничной схемы, изображенной так, как это принято в теории электрических цепей.

Определение 1.2. Дан маркированный граф H с n корневыми узлами и производный граф с n корневыми графами, тогда матрица $A_\lambda(H, G)$ определяется следующим образом:

$$A_\lambda(H, G) = [a_{ij}], \quad (11.7)$$

где $a_{ij} = \begin{cases} G_i(\lambda), i = j \\ -h_{ij}G_i'(\lambda), i \neq j \end{cases}$ и $A(H) = [h_{ij}]$ – функция от матрицы H .

Здесь h_i представляет характеристический полином фрагмента, который полностью зависит от числа корневых узлов i :

$$h_i = \lambda^i - (i-1)\lambda^{i-2}, \quad h_i' = \lambda^{i-1}. \quad (11.8)$$

При $i=2$, граф G рис.17.6, вычисляем значения (11.8) для матрицы $A(H)$ и записываем:

$$A(H) = [h_{ij}] = \begin{bmatrix} (\lambda^2 - 1) & -\lambda & 0 \\ -\lambda & (\lambda^2 - 1) & -\lambda \\ 0 & -\lambda & (\lambda^2 - 1) \end{bmatrix}. \quad (11.9)$$

Уточнение. Определение 1.2 нуждается в разъяснении. Начнем с того, что запишем матрицу смежности графа H , приведенного на рис.11.6. Пронумеруем корневые узлы графа H слева направо как 1, 2, 3, тогда матрица смежности будет иметь вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}.$$

Матрица $A_\lambda(H, G)$ объединяет графы H, G таким образом, что корневые узлы дерева принимают соответствующие им корневые узлы фрагментов. Эта операция называется «возвращением корня к корню» (root-to-root), но используется и другое название (rooted product) – «корневое умножение».

Граф **G** состоит из отдельных ветвей, каждая из которых содержит по два узла. Все диагональные элементы матрицы $A(H) = [h_{ij}]$ одинаковы, т.к. соответствуют ветвям. По формулам (11.8) найдем значения элементов матрицы (11.7) (как диагональных, так и других):

$$h_{ij} = \lambda^2 - 1, \quad i = j; \quad h_{ij} = -\lambda, \quad i \neq j.$$

Следует отметить, что выражение $\lambda^2 - 1$ является характеристическим полиномом отдельной ветви. Матрицу (11.9) можно получить, объединяя полученные значения h_{ij} следующим образом:

$$A(H) = (\lambda^2 - 1)[E] - \lambda[A] =$$

$$= \begin{bmatrix} (\lambda^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^2 - 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda^2 - 1) & -\lambda & 0 \\ -\lambda & (\lambda^2 - 1) & -\lambda \\ 0 & -\lambda & (\lambda^2 - 1) \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы (11.9) является характеристическим полиномом дерева $H(G)$, рис.11.6:

$$\det A(H) = \lambda^6 - 5\lambda^4 + 5\lambda^2 - 1. \quad (11.10)$$

Теперь становятся понятны выкладки автора статьи [44] относительно графа рис.11.3. Листья, которые удаляли на всех этапах упрощения исходного графа, являются независимыми ветвями, которые могут быть объединены в фрагменты графа с разным количеством узлов. Характеристический полином каждого фрагмента находится по формулам (11.8). Процедура восстановления позволяет получить полином исходного дерева по полиномам удаленных ранее фрагментов.

Пример. В источнике [44] рассматривается граф, рис.11.7, полином которого приведен как данность:

$$\lambda^9 - 8\lambda^7 + 17\lambda^5 - 10\lambda^3 = 0. \quad (11.11)$$

В обоснование результата автор посчитал достаточным привести матрицу смежностей **Q** и матрицу **A**:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} h_2 & 0 & 0 & -h'_2 \\ 0 & h_2 & 0 & -h'_2 \\ 0 & 0 & h_4 & -h'_4 \\ -h'_1 & -h'_1 & -h'_1 & h_1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что индексы элементов матрицы **A** соответствуют количеству узлов фрагмента графа. Например, у фрагмента, обозначенного как T 1, имеется два узла, у фрагмента T 2 – четыре, а у фрагмента T 3 – один.

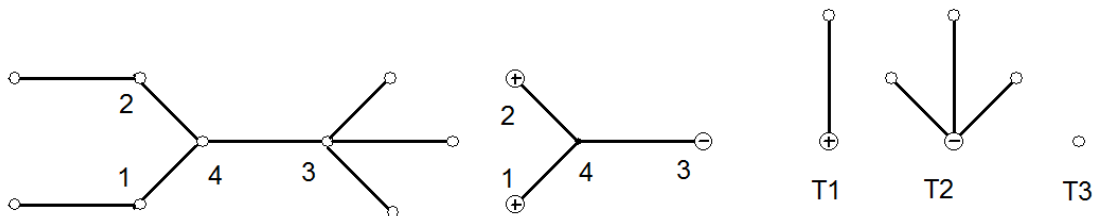


Рис. 11.7. Граф дерева, результат его упрощения и фрагменты графа T1, T2, T3.

Раскрываем элементы **h** матрицы **A**, по формулам (11.8):

$$A = \begin{bmatrix} (\lambda^2 - 1) & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & (\lambda^2 - 1) & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda^4 - 3\lambda^2) & -\lambda^3 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Для получения определителя матрицы применяем теорему Лапласа, раскрывая матрицу по элементам первой строки:

$$\Delta = (\lambda^2 - 1) \begin{vmatrix} (\lambda^2 - 1) & 0 & -\lambda \\ 0 & (\lambda^4 - 3\lambda^2) & -\lambda^3 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 0 & (\lambda^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^4 - 3\lambda^2) \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Каждый может проверить, что полученное выражение для определителя соответствует многочлену (11.11).

Нет необходимости сразу раскрывать содержание коэффициентов \mathbf{h} по формулам (11.8), полиномы можно находить как функцию элементов матрицы \mathbf{A} и только на конечном этапе преобразований применять указанные формулы. Элементы структуры, представленные на рис.11.4 и рис.11.5, имеют разное количество узлов. Запишем характеристические полиномы указанных фрагментов графа:

$$\begin{aligned} H_{11} &= h_3, & H_{21} &= h_4, & H_{31} &= h_1, \\ H'_{11} &= h'_3, & H'_{21} &= h'_4, & H'_{31} &= 1. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Составляется матрица последовательности восстановления структуры $D^{(12)}$, определитель которой будет равен одному из элементов матрицы $A^{(2)}(H)$. Верхние индексы матрицы $D^{(12)}$ означают, что она преобразует граф рис.11.5 в граф рис.11.4, т.е. позволяет перейти от простейшего (узлы 1,2) к более сложному дереву графа, который получили в результате первого этапа обрезки листьев. Итак, запишем:

$$D^{(12)} = \begin{bmatrix} h_4 & 0 & 0 & -h'_4 \\ 0 & h_3 & 0 & -h'_3 \\ 0 & 0 & h_3 & -h'_3 \\ -1 & -1 & -1 & h_1 \end{bmatrix}. \quad (11.13)$$

В ячейке 11 матрицы (11.13) расположен полином фрагмента, содержащий четыре узла. В ячейках 22, 33 расположены полиномы фрагментов, содержащих по три узла. Остается занести в матрицу $D^{(12)}$ коэффициент, соответствующий фрагменту T_{31} . Матрица $D'^{(12)}$ является производная от матрицы (11.13), т.е. получается вычеркиванием четвертого столбца и четвертой строки:

$$D'^{(12)} = \begin{bmatrix} h_4 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix}. \quad (11.14)$$

Выражения определителей матриц (11.13), (11.14) являются элементами матрицы $A^{(2)}(H)$

$$H_{12} = h_3^2 h_4 h_1 - 2h_3 h_3' h_4 - h_3^2 h_4', \quad H'_{12} = h_3^2 h_4. \quad (11.14)$$

Остается записать матрицу второго этапа восстановления структуры, определитель которой является характеристическим полиномом исходного дерева, рис.11.3:

$$A^{(2)}(H) = \begin{bmatrix} H_{12} & -H'_{12} \\ -H'_{12} & H_{12} \end{bmatrix}. \quad (11.15)$$

Найдем определитель матрицы (11.15):

$$\Delta[A^{(2)}(H)] = H_{12}^2 - (H'_{12})^2 = (h_3^2 h_4 h_1 - 2h_3 h_3' h_4 - h_3^2 h_4')^2 - (h_3^2 h_4)^2. \quad (11.16)$$

Остается раскрыть каждый коэффициент \mathbf{h} выражения (11.13) по формулам (11.8) и произвести указанные алгебраические операции, чтобы получить характеристический полином дерева рис.11.3:

$$\begin{aligned} \Delta[A^{(2)}(H)] &= H_{12}^2 - (H'_{12})^2 = (H_{12} + H'_{12})(H_{12} - H'_{12}) = \\ &= (\lambda^{11} - 9\lambda^9 + 26\lambda^7 - 24\lambda^5)(\lambda^{11} - 11\lambda^9 + 34\lambda^7 - 32\lambda^5). \end{aligned} \quad (11.17)$$

Конечно, нет смысла производить операции до конца, так как цель настоящего раздела достигнута. Показана роль структуры в процессе получения характеристического полинома дерева графа.

Очевидно, что максимальная степень слагаемых характеристического полинома будет 22. Находить корни такого выражения задача нелегкая, но это отдельная проблема, которую решать мы не будем. Напомним только, что множество собственных чисел полинома называется спектром графа и служит своеобразным индексом, величины составляющих которого не зависят от порядка нумерации узлов графа [45].

12. Структура цепи и характеристический полином

«**Функция** есть строгое инобытие числа, и вернее, не числа, а **числовой операции**».
Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Любой матрице, любому графу соответствует определенный характеристический полином, который считается самым надежным инвариантом, т.к. не зависит от нумерации узлов и ветвей. В предыдущем разделе описан алгоритм получения полинома сложного графа, представленного деревом [43].

Дерево графа упрощается, «обрезаются его листья», т.е. удаляются ветви, которые напоминают листья на ветке, созданной природой. Процесс упрощения дерева останавливается только тогда, когда «остаток становится элементарным», т.е. дальнейшее упрощение невозможно из-за отсутствия листьев. Характеристический полином полученного графа определяется без затруднений. Отметим, что: **Поэтапное восстановление графа сопряжено с преобразованием этого полинома. В этом можно увидеть много общего с процессом получения подходящих дробей и алгоритмом решения системы уравнений, предложенным Кирхгофом, в котором за упрощением структуры следует этап ее восстановления.**

Кроме этого метода, разрабатывается еще один, который ориентирован на получение полинома непосредственно по элементам структуры графа [46]. Имеет смысл разобрать этот метод на примере, взятом из источника, где рассматривается молекулярный граф химического соединения, названного фульвеном.

На рис.12.1 представлен молекулярный граф и его части, которые называются суграфами. Как видно из иллюстрации, суграфом может быть отдельная ветвь, некоторая комбинация ветвей, даже отдельный узел, не связанный с другими элементами графа. Далек не все частичные графы предлагается использовать для вычисления коэффициентов характеристического полинома. При построении характеристического полинома по элементам структуры графа используют только суграфы типа G_1 , G_2 , G_5 . Такие суграфы получили название саксовых графов, а сам метод назван именами его создателей – графический метод Коулсона- Сакса.

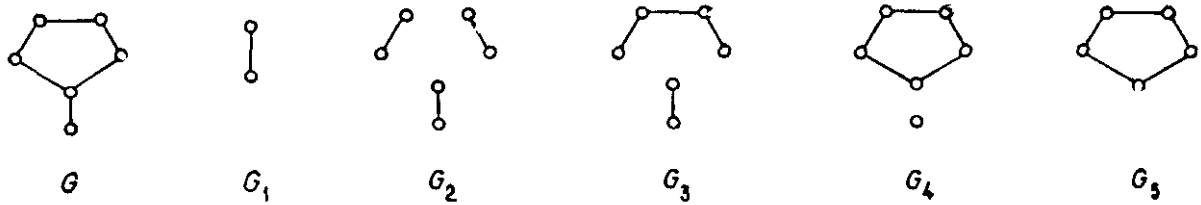


Рис. 12.1. Граф фульвена и его суграфы.

Итак, характеристический полином может быть записан следующим образом:

$$P(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^{N-n}, \quad (12.1)$$

где a_n - коэффициент полинома;

N - число узлов полного графа.

Каждый коэффициент полинома (12.1) определяется с помощью однотипных суграфов, а получение суграфов из полного графа производят по следующим правилам [46]:

«Суграф графа G можно получить путем удаления из графа G вершины v_i (или нескольких вершин) и всех ребер, исходящих из узла v_i , либо удалением из графа ребра e_i (или нескольких ребер)».

Величины каждого из коэффициентов определяются по формуле:

$$a_n = \sum_{s \in S_n} (-1)^{c(s)} 2^{r(s)}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (12.2)$$

где s - отдельный саксов граф;

S_n - множество всех саксовых графов, содержащих n вершин графа

G ;

c_s и r_s - соответственно суммарное число компонент и суммарное

число циклов в саксовом графе s ;

a_n – конкретный коэффициент характеристического полинома.

Формула (12.2) была открыта одним из авторов метода и опубликована в виде теоремы, доказательство которой можно проследить, например, по источнику [47, с.31].

Так как теория графов рассматривает несколько спектров любого графа, то существует и несколько формул для определения численных значений коэффициентов характеристического полинома. Формула, приведенная выше (12.2), соответствует алгоритму определения полинома по матрице смежности графа. Рассмотрим порядок определения значений всех коэффициентов полинома, соответствующие графу примера рис.12.1. Результаты вычисления значений коэффициентов полинома сведены в таблицу 12.1.

Таблица 12.1.

n	S_n	a_n
0		1
1	\emptyset	0
2	$\{(\text{graph}), (\text{graph}), (\text{graph}), (\text{graph}), (\text{graph}), (\text{graph})\}$	$6(-)^1 2^0 = -6$
3	\emptyset	0
4	$\{(\text{graph}), (\text{graph}), (\text{graph}), (\text{graph}), (\text{graph}), (\text{graph}), (\text{graph}), (\text{graph}), (\text{graph})\}$	$8(-)^2 2^0 = +8$
5	$\{(\text{graph})\}$	$(-)^1 2^1 = -2$
6	$\{(\text{graph})\}$	$(-)^3 2^0 = -1$

Отметим, что в первом столбце таблицы – номер коэффициента, который соответствует суммарному количеству узлов соответствующего саксового графа. Второй столбец таблицы наглядно представляет соответствующее множество саксовых графов. В третьем столбце находятся величины коэффициентов полинома, посчитанные по формуле (12.2).

Для случая $n=0$ величину коэффициента следует считать равной единице по определению, $a_0 = 1$. В других случаях, когда множество S_n оказывается пустым ($S_n = \emptyset$), коэффициент будет равен нулю, $a_n = 0$. По результатам вычислений коэффициентов характеристического полинома, Таблица 12.1, записывается его алгебраическое выражение:

$$P(G; x) = x^6 - 6x^4 + 8x^2 - 2x - 1. \quad (12.3)$$

Корни полинома приводятся ниже:

$$\bar{x}' = [2.11491 \quad 1.0 \quad 0.61803 \quad -0.25410 \quad -1.61803 \quad -1.86081].$$

Теория электрических цепей использует граф для представления структуры схем. Имеет смысл, в виде примера, применить графический метод Коулсона-Сакса для расчета коэффициентов характеристического полинома известной схемы – моста Уитстона, рис.12.2.

Пример. Применим этот графический метод к электрической цепи, рис.12.2. Количество узлов графа – 4, количество ветвей графа – 6.

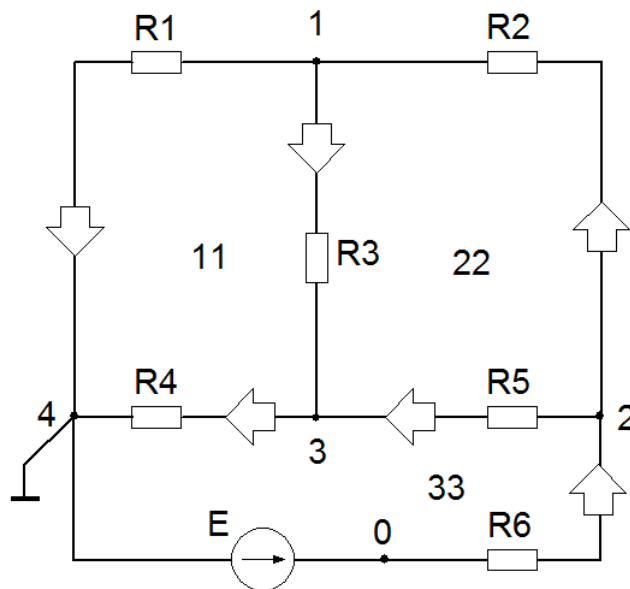


Рис. 12.2. Схема измерительного моста.

В соответствии с формулой (12.1) характеристический полином этого графа будет иметь следующий вид:

$$P_{(x)} = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x^1 + a_4. \quad (12.4)$$

Определяем значения коэффициентов полинома (12.4), а результаты заносим в таблицу 12.2.

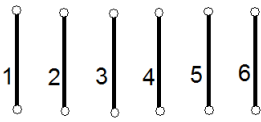
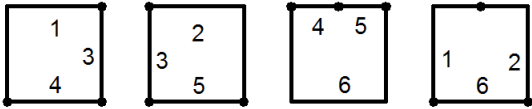
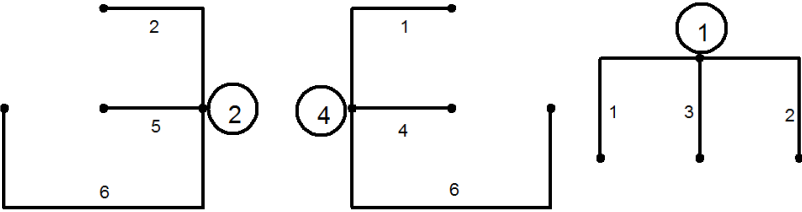
Два коэффициента полинома (12.4) можно считать известными – первый по определению равен единице, $a_0 = 1$, а второй равен нулю, т.к. независимых, отдельных от графа узлов в данном примере нет, $a_1 = 0$.

Модуль третьего коэффициента равен числу ветвей графа:

$$a_2 = 6(-1)^1 (2)^0 = -6.$$

Количество суграфов шесть – множитель выражения (12.4) для значения этого коэффициента равен 6. Степени в формуле определяются так: в суграфе один компонент – 1 ветвь, а контуров в суграфе нет – 0.

Таблица 12.2.

n	S_n	a_n
0		1
1	$S_n = \emptyset$	0
2		$6(-1)^1 (2)^0 = -6$
3		$4(-1)^3 (2)^1 = -8$
4		$3(-1)^3 (2)^0 = -3$

Значение четвертого коэффициента вычисляется по четырем контурам, содержащим по три узла каждый. Множество этих суграфов получаем после удаления из полного графа одного из узлов вместе с инцидентными ему ветвями. Ниже записаны схемные контурные множества и соответствующие узловые схемные множества, которые удалялись из графа для получения указанного контура.

$$\begin{aligned}
 11. \{1, 3, 4\} &\Rightarrow 2. \{2, 5, 6\}; & 33. \{4, 5, 6\} &\Rightarrow 1. \{1, 2, 3\}; \\
 22. \{2, 3, 5\} &\Rightarrow 4. \{1, 4, 6\}; & 00. \{1, 2, 6\} &\Rightarrow 3. \{3, 4, 5\}.
 \end{aligned}$$

По формуле (12,2) получаем значение коэффициента:

$$a_3 = 4(-1)^3 (2)^1 = -8.$$

Количество суграфов четыре – множитель выражения (12.2) для величины коэффициента равен 4. Степени в формуле определяются так: в суграфе три компонента – 3 ветви, а контур один – 1.

Последний коэффициент определяем по трем узловым множествам ветвей (общий узел 3 не рассматривается), которые удалялись ранее при выделении контуров. Каждый такой элемент с ветвями содержит четыре узла:

$$a_4 = 3(-1)^3 (2)^0 = -3.$$

Количество суграфов три – множитель выражения (12.2) для величины коэффициента равен 3. Степени в формуле определяются так: в суграфе три компонента – 3 ветви, а контуров нет – 0.

Итак, получаем характеристический полином графа схемы измерительного моста:

$$P_{(x)} = x^4 - 6x^2 - 8x^1 - 3. \quad (12.5)$$

Корни полинома (12.5) имеют следующие значения:

$$\bar{x}^t = [3 \quad -1 \quad -1 \quad -1].$$

Результат (12.5) проверим алгебраически, вычисляя полином по формуле, содержащей матрицу смежности графа.

Для проверки уравнения (12.5) определим характеристический полином графа по матричному уравнению:

$$P_{(x)} = \det[\bar{x}^t \cdot E - A], \quad (12.6)$$

где E - единичная матрица,

A - матрица смежности графа.

Итак, после подстановки в формулу (12.6) матрицы смежности графа схемы измерительного моста получаем:

$$\begin{aligned}
 P_{(x)} = \det \begin{bmatrix} x & -1 & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{bmatrix} &= \begin{Bmatrix} x^4 & -3x^2 & -2x \\ -x^2 & -2x & -1 \\ -x^2 & -2x & -1 \\ -x^2 & -2x & -1 \end{Bmatrix} = \\
 &= x^4 - 6x^2 - 8x - 3. \qquad (12.7)
 \end{aligned}$$

Определитель четвертого порядка в (12.7) раскрываем определитель матрицы A по первой строке (теорема Лапласа):

$$\det A = \det A_{\bar{1}:1} - \det A_{\bar{1}:2} + \det A_{\bar{1}:3} - \det A_{\bar{1}:4}.$$

Записываем слагаемые определителя в фигурных скобках построчно (сверху-вниз), (12.7). После суммирования коэффициентов при неизвестных в одинаковой степени получаем коэффициенты характеристического полинома равные тем, которые были найдены графическим методом (12.5).

Суграфы, которые были использованы для получения значений коэффициентов характеристического полинома (12.5), в теории электрических цепей имеют физический смысл. Множество контуров является одним из представлений схемы. Узловые множества – это второе представление схемы, а, следовательно, совершенно естественно выглядит отказ от рассмотрения узлового множества ветвей, которое принадлежит базовому узлу с нулевым потенциалом. Множество ветвей цепи является одной из характеристик графа. Приведем доказательство вышеперечисленных утверждений.

Пусть номиналы всех элементов электрической цепи рис.12.2 будут приравнены единице. Вследствие этого остается только структура схемы – ориентированный или неориентированный граф. Рассмотрим это преобразование на примере уравнения Кирхгофа для контура 11 электрической цепи этой схемы. Придадим параметрам элементов цепи единичные значения, например,

$$\text{Контур 11 } I_1 R_1 - I_4 R_4 - I_3 R_3 = 0 \Rightarrow I_1 1_1 - I_4 1_4 - I_3 1_3 = 0. \quad (12.8)$$

Отметим, что в результате описанных выше действий отношение подобия между графом и изображением электрической цепи не нарушается, т.е. исчезают только элементы электрической цепи, а ее ветви становятся

ребрами графа. Другими словами, преобразование не затрагивает структуры электрической цепи, поэтому индексы ветвей сохраняются. Знаки операций из уравнений Кирхгофа также сохранены, чтобы показать ориентацию ветвей структуры. Связность ветвей электрической цепи не нарушалась, а, следовательно, уравнения контура переходят к графу в вырожденной форме (12.8). Таким образом, контур представляется только множеством своих ветвей: $11\{1,3,4\}$. Декартово произведение схемных множеств позволяет получить структуру всех слагаемых определителя системы уравнений электрической цепи [5].

1. Если перемножаются контурные схемные множества, то получается структура слагаемых определителя матрицы системы уравнений, составленной по методу контурных токов. Записанные определенным образом они образуют, так называемое структурное число [23]:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1' & 1' & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2' & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4' \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (12.9)$$

Выражение (12.9) следует назвать контурным структурным числом, столбцы, представляющие структуру контуров электрической цепи, помечены одним штрихом.

2. Если перемножаются узловые схемные множества, то получается структура слагаемых определителя матрицы, составленной по методу узловых потенциалов. Записанные определенным образом они также образуют структурное число [28]:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1'' & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1'' & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2'' & 3'' & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (12.10)$$

Выражение (12.10) следует назвать узловым структурным числом, столбцы, представляющие структуру узлов электрической цепи, помечены двумя штрихами. Таким образом, схемные множества ветвей контуров (узлов) отражают не только структуру полного графа электрической цепи, но и структуру слагаемых детерминант соответствующих матриц.

Матрицу (12.7) можно представить последовательностью ее частей:

$$[x], \begin{bmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{bmatrix}. \quad (12.11)$$

Каждой матрице соответствует свой характеристический полином, который можно определить, а также найти его корни. Матрицы (12.11), приведенные выше, небольшого ранга, поэтому не будет трудно найти их определители вручную, чтобы проверить результаты, сведенные в таблицу 20.3.

Таблица 12.3.

$x = 0$	(0)
$x^2 - 1 = 0$	$(-1, 1)$
$x^3 - 3x - 2 = 0$	$(-1, -1, 2)$
$x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = 0$	$(-1, -1, -1, 3)$

Характеристические полиномы, полученные из определителей матриц (12.11) приведены в первом столбце. Во втором столбце находятся корни этих полиномов. Таблица 12.3 иллюстрирует результат уточнения корней полностью связного графа в процессе добавления узлов.

Правую колонку таблицы можно рассматривать как своеобразную последовательность, похожую на ряд подходящих дробей. Вероятно, после добавления пятого узла в полностью связный граф, мы получим характеристический полином, который будет иметь следующие корни $(-1, -1, -1, -1, 4)$. Попробуем обосновать этот прогноз.

К графу рис.12.2 добавим пятый узел с четырьмя ветвями (по одной к каждому из четырех узлов). Характеристический полином такого графа имеет следующий вид:

$$P(x) = a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5. \quad (12.12)$$

Четыре коэффициента полинома можно считать известными:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -10, \quad a_5 = -4.$$

Обоснование этих значений коэффициентов приводится ниже. Схемное

множество добавленного пятого узла содержит четыре ветви, прибавим это число к количеству ветвей графа рис.12.2 и получим $a_2 = -10$. Величина пятого коэффициента определена на основании анализа первого столбца таблицы 12.3.

Подставим известные коэффициенты в выражение (12.12) и приравняем его нулю:

$$x^5 + 0x^4 - 10x^3 + a_3x^2 + a_4x - 4 = 0. \quad (12.13)$$

Остается определить значения двух коэффициентов полинома (12.3). Для этой цели подставим в уравнение (12.13) корень, равный -1, и получим первое уравнение:

$$a_3 - a_4 = -5.$$

Подставим в уравнение (12.13) корень, равный 4, и получим второе уравнение:

$$16a_3 + 4a_4 = -380.$$

Объединим эти уравнения в систему:

$$\begin{cases} a_3 - a_4 = -5 \\ 4a_3 + a_4 = -95 \end{cases} \quad (12.14)$$

Решая эту систему уравнений, получаем: $a_3 = -20$, $a_4 = -15$.

Окончательный вид характеристического полинома полно связного графа с пятью узлами получает после подстановки всех коэффициентов:

$$P(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4. \quad (12.15)$$

Корни характеристического полинома записываем, продолжая правый столбик таблицы 12.3:

$$(-1, -1, -1, -1, 4).$$

Каждый читатель может самостоятельно убедиться в том, что корни полинома обращают полином (12.15) в ноль.

13. Аксиоматический подход к изучению структуры цепей

«... *аксиоматика* чаще всего преследует не чисто математические ... а, например, *гносеологические ...цели ...*»
Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Аксиоматика преследует, прежде всего, не математические, а гносеологические цели, т.е. желание разобраться в проблеме при строгом соблюдении математического подхода. Ему принадлежит следующая мысль:

«Будем понимать аксиому как суждение, очевидность которого не нуждается в доказательствах» ...

Соединение реальных элементов в электрическую (электронную) схему настолько очевидный факт, что его никто не может оспорить, так как только после соединения реальных элементов возникает работающая схема (устройство). Электрическая цепь является идеальной копией электрической схемы, которую можно рассматривать как реализацию отношения связи между ее узлами. Примем этот факт как аксиому, а отношение связи как реальность, ветвь графа - как его графическое изображение.

В одной из первых работ Кирхгофа схема соединений элементов в электрическую цепь была представлена в виде ненаправленного графа [4]. Приведем для иллюстрации граф электрической цепи, соответствующий схеме моста Уитстона. Именно эту схему и ее граф исследовал Кирхгоф в статье, которая положила начало их математическому моделированию.

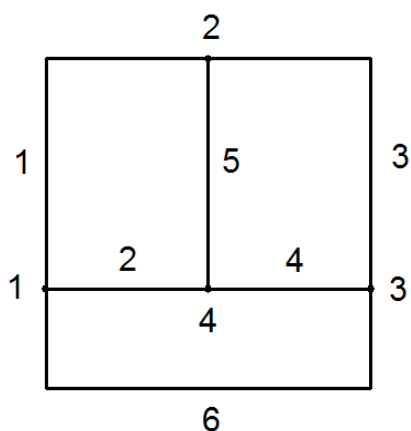


Рис.13.1. Ненаправленный граф электрической цепи.

Интересно, что первое изображение электрической цепи в упомянутой выше статье содержит ветви графа разной длины. Дело в том, что элементы схемы Кирхгоф создавал из отрезков проволоки разной длины, чтобы обеспечить необходимую величину сопротивления. Возможно, что отличие ветвей по длине он сохранил в изображении графа сознательно как средство обозначения величин сопротивлений ветвей. Отметим, что на рис.13.1 длина ветвей не зависит от их сопротивления. Другими словами, свойства всех ветвей одинаковы, и это позволяет назвать такой граф объектом топологии.

Однако, для составления системы уравнений электрической цепи топологический граф «в чистом виде» не подходит, т.к. отсутствие направлений протекания токов в ветвях (хотя бы условных) не дает возможности составить уравнения Кирхгофа. Неориентированный граф необходимо изменить так, чтобы любая ветвь могла иметь одну из двух ориентаций. На рис.13.2 представлены два графа, в которых любая пара одинаковых ветвей ориентированы встречно.

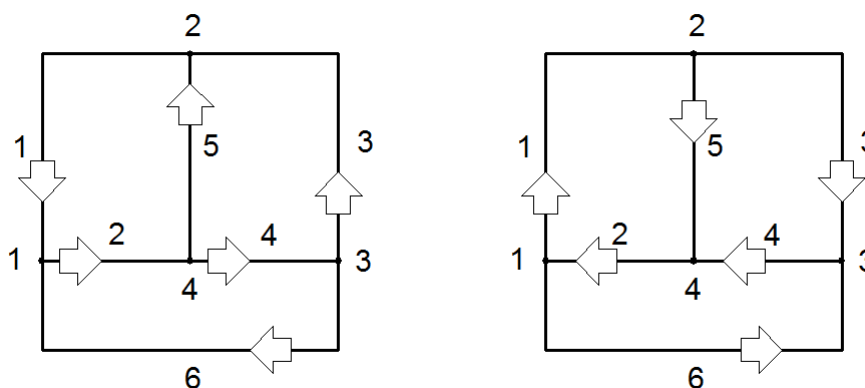


Рис. 13.2. Двойственные ориентации графа рис.13.1.

Формально эти графы принадлежат разным топологиям, одну из которых принято называть **к0**-топологией.

Любой граф рис.13.2 можно записать как множество ветвей, каждая из которых представлена кортежем двух чисел, разделенных точкой. Объединение множеств N' и N'' представляет ветви ненаправленного графа. Назовем это множество фундаментальным множеством отношений связи N ветвей электрической цепи рис.13.1.

$$N' = \{2.1, 1.4, 3.1, 4.2, 3.2, 4.3\}, \quad N'' = \{1.2, 1.3, 4.1, 2.4, 2.3, 3.4\};$$

$$N = N' \cup N'' \quad (13.1)$$

Очевидно, что, увеличивая число узлов обеих графов рис.13.2, можно получить множество N любой мощности. Из алгоритма образования подмножеств (13.1) следует, что любому члену множества N' соответствует противоположно направленный элемент (того же множества). Это дает нам возможность постулировать особый элемент (13.2), а, следовательно, и аддитивную группу элементов [48].

$$i.j \oplus j.i = \emptyset. \quad (13.2)$$

Отметим, что любой из членов формулы (13.2) можно назвать прямым, тогда другой член формулы становится противоположным элементом. Если, кроме прямых и противоположных элементов, постулировать существование обратных, то возникает возможность определения другого особого элемента (13.3), а, следовательно, существование мультипликативной группы элементов, включенных в фундаментальное множество ветвей.

$$i.j \otimes (i.j)^{-1} = e. \quad (13.3)$$

Легко представить себе совокупность значений сопротивлений и проводимостей ветвей, каждый элемент которой соответствуют элементам аддитивной или мультипликативной групп ветвей алгебраической цепи. Так как величины сопротивлений и проводимостей связаны между собой известным соотношением $G = R^{-1}$, то по аналогии можно установить следующее соответствие между отношениями и их параметрами (или наоборот):

$$i.j \rightarrow G \quad (i.j)^{-1} \rightarrow R. \quad (13.4)$$

Граф электрической цепи, который наглядно представляет совокупность отношений связи, будет естественно назвать **графом-схемой**. В современной теории электрических цепей такое определение отсутствует, т.к. считается очевидным аналогия между изображением схемы и графом. Однако, при аксиоматическом построении теории введение такого определения необходимо.

Наличие особых элементов (13.2), (13.3) делает возможным создание структурной алгебры со следующими правилами выполнения операций:

\oplus	\emptyset	$i.j$	$j.i$
\emptyset	\emptyset	$i.j$	$j.i$
$i.j$	$i.j$	$i.j$	\emptyset
$j.i$	$j.i$	\emptyset	$j.i$

\otimes	e	$i.j$	$(i.j)^{-1}$
e	e	$i.j$	$(i.j)^{-1}$
$i.j$	$i.j$	$i.j$	e
$(i.j)^{-1}$	$(i.j)^{-1}$	e	$(i.j)^{-1}$

Операции структурной алгебры обладают следующими свойствами:

а) ассоциативность

$$(a.b \oplus c.d) \oplus e.f = a.b \oplus (c.d \oplus e.f),$$

$$(a.b \otimes c.d) \otimes e.f = a.b \otimes (c.d \otimes e.f);$$

б) коммутативность

$$a.b \oplus c.d = c.d \oplus a.b,$$

$$a.b \otimes c.d \neq c.d \otimes a.b;$$

в) дистрибутивность

$$a.b \otimes (c.d \oplus e.f) = a.b \otimes c.d \oplus a.b \otimes e.f,$$

$$(c.d \oplus e.f) \otimes a.b = c.d \otimes a.b \oplus e.f \otimes a.b.$$

Перечисленные правила выполнения операций структурной алгебры и их свойства интересуют, прежде всего, математиков, а специалистов по теории электрических цепей – возможности алгебры отображать разные типы соединений ветвей.

Допустим, что две ветви, свойства которых характеризуются проводимостью, соединены последовательно. По аналогии с формулой эквивалентной проводимости запишем:

$$\frac{a.b \otimes b.c}{a.b \oplus b.c} = \frac{1}{(a.b)^{-1} \oplus (b.c)^{-1}}. \quad (13.5)$$

Равенство (13.5) тождественно преобразуется двумя способами:

$$a.b \otimes b.c = \frac{a.b \oplus b.c}{(a.b)^{-1} \oplus (b.c)^{-1}}, \quad (a.b)^{-1} \oplus (b.c)^{-1} = \frac{a.b \oplus b.c}{a.b \otimes b.c}. \quad (13.6)$$

Если в формулах (13.6) числитель вынести за скобки, то получим приближенные равенства, каждое из которых лишилось справа одного и того же сомножителя:

$$a.b \otimes b.c \approx \frac{1}{(a.b)^{-1} \oplus (b.c)^{-1}}, \quad (a.b)^{-1} \oplus (b.c)^{-1} \approx \frac{1}{a.b \otimes b.c}. \quad (13.7)$$

В соответствие с формулами (13.7), умножение двух последовательно соединенных ветвей и сложение обратных отношений связи тех же ветвей образуют двойственные формулы.

Отметим, что выражение (13.5) описывает не только последовательное соединение двух ветвей, характеризующихся проводимостью, но и параллельное соединение двух ветвей, характеризующихся сопротивлением. То же самое можно сказать по поводу формулы для последовательного соединения двух ветвей, характеризующихся сопротивлением

$$a.b \oplus b.c.$$

Одновременно, эта формула справедлива для параллельного соединения двух проводимостей. Описанные выше операции и преобразования распространяются не только на отдельные отношения между узлами, но и на подгруппы множества N . Приведем пример группирования, имеющий физический смысл.

Из множества N отношений связи составляем узловые схемные множества [5]:

$$\begin{aligned} T'_1 &= \{1.2, 1.3, 1.4\}, T''_1 = \{2.1, 3.1, 4.1\}; \\ T'_2 &= \{2.1, 2.3, 2.4\}, T''_2 = \{1.2, 3.2, 4.2\}; \\ T'_3 &= \{3.1, 3.2, 3.4\}, T''_3 = \{1.3, 2.3, 4.3\}; \\ T'_4 &= \{4.1, 4.2, 4.3\}, T''_4 = \{1.4, 2.4, 3.4\}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Схемное множество T'_i (с одним штрихом) характеризует узел как исток, а схемное множество T''_i (с двумя штрихами) характеризует узел как сток.

Полное схемное множество представляет собой объединение подмножеств (13.8)

$$T_i = T_i' \cup T_i'' . \quad (13.9)$$

На совокупности схемных множеств могут быть заданы все операции алгебры структур:

$$T_i' \oplus T_i'' = \emptyset , \quad T_i' \otimes (T_i'')^{-1} = e .$$

Транзитивное замыкание отношения связи представляется матрицей смежности:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_1 & T_2'' \cap T_1' & T_3'' \cap T_1' & T_4'' \cap T_1' \\ T_1'' \cap T_2' & T_2 & T_3'' \cap T_2' & T_4'' \cap T_2' \\ T_1'' \cap T_3' & T_2'' \cap T_3' & T_3 & T_4'' \cap T_3' \\ T_1'' \cap T_4' & T_2'' \cap T_4' & T_3'' \cap T_4' & T_4 \end{bmatrix} . \quad (13.10)$$

Выражение (13.10) является структурной матрицей метода узловых потенциалов. Отметим, что в каждой ячейке главной диагонали стоит структура собственной проводимости соответствующего узла. Все ветви узлового множества рассматриваются как соединенные параллельно. Из технических соображений не раскрыты ячейки главной диагонали. В остальных ячейках матрицы находятся смежные ветви соответствующих пар узлов, их величины заносятся в матрицу метода узловых потенциалов со знаком минус.

$$[T] = \begin{bmatrix} 1.2 \oplus 1.3 \oplus 1.4 & & & & \\ \cup 2.1 \oplus 3.1 \oplus 4.1 & 1.2 & 1.3 & 1.4 & \\ & 2.1 & T_2 & 2.3 & 2.4 \\ & 3.1 & 3.2 & T_3 & 3.4 \\ & 4.1 & 4.2 & 4.3 & 4.1 \oplus 4.2 \oplus 4.3 \\ & & & & \cup 1.4 \oplus 2.4 \oplus 3.4 \end{bmatrix} . \quad (13.11)$$

Матрица (13.11) изображается графически с помощью двудольного графа, в котором каждый узел имеет два образа: узел-исток и узел-сток. Кроме того, отметим, что диагональные элементы матрицы можно обозначить

традиционно, т.е. одинаковыми номерами строки и столбца. Если разделить эти номера точкой, то запись следует понимать как отношение связи.

Формулы (13.7) служат, в том числе, для описания отдельных фрагментов графа, например, такого, который изображен на рис.13.3. Непосредственное применение операций алгебры структур приводит к выражению:

$$a.b \otimes (b.c \oplus b.d \oplus b.f). \quad (13.12)$$

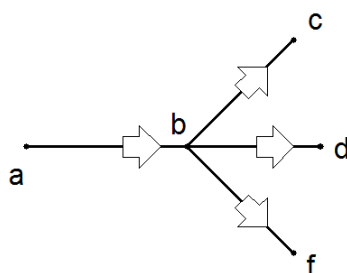


Рис. 13.3. Окрестность узла b.

В соответствие с (13.7), заменим некоммутативное умножение операцией сложения в пространстве обратных отношений связи:

$$a.b \otimes (b.c \oplus b.d \oplus b.f) = \frac{1}{(a.b)^{-1} \oplus \frac{1}{b.c \oplus b.d \oplus b.f}}. \quad (13.13)$$

Применяя такой прием, можно описывать и более сложные графы, рис.13.4.

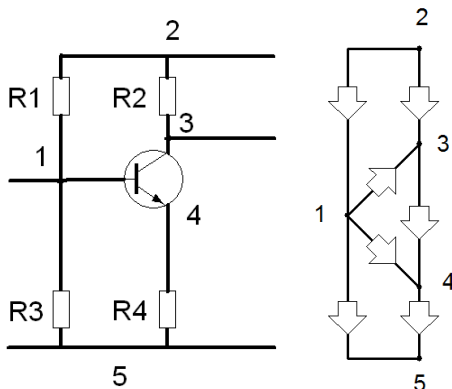


Рис. 13.4. Усилительный каскад и его граф.

Структура входного сопротивления будет иметь вид:

$$1.5 \oplus \frac{1}{\frac{1}{2.1 \oplus \frac{1}{(1.5)^{-1}}} + \frac{1}{2.3 \oplus \frac{1}{(3.4)^{-1} \oplus \frac{1}{4.5}}}} \oplus \frac{1}{(1.3)^{-1} \oplus \frac{1}{3.4 \oplus \frac{1}{(4.5)^{-1}}}} \oplus \frac{1}{(1.4)^{-1} \oplus \frac{1}{4.5}}$$

(13.14)

Выражение (13.14) представляет собой структуру ветвящейся цепной дроби [32].

Вернемся к выражению (13.1), чтобы подчеркнуть, что графическое представление отношения связи включает в себя понятия узла-истока и узла-стока. По определению отношения связи не допускаются ветви, связывающие исток и сток одного номера, хотя в двудольном графе это допускается. Приведем изображение простого двудольного графа:

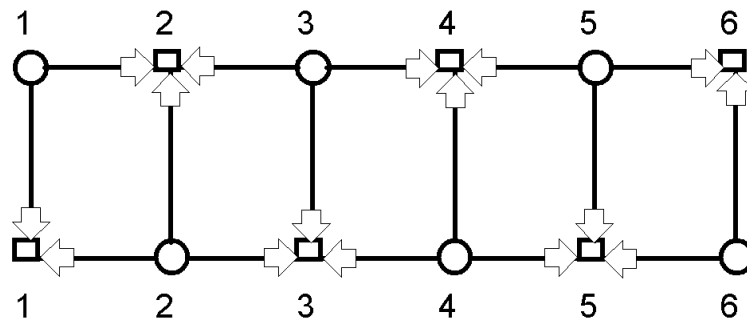


Рис. 13.5. Изображение двудольного графа лестничной схемы.

Запишем матрицу, соответствующую графу рис.13.5:

$$\begin{matrix} I \\ C \\ T \\ O \\ K \\ И \end{matrix} \begin{bmatrix} 11 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 22 & 23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & 33 & 34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 44 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 55 & 56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 65 & 66 \end{bmatrix}. \quad (13.15)$$

Матрица (13.15) представляет собой структуру системы уравнений лестничной схемы, поэтому граф рис.13.5. естественно назвать **графом-уравнением**.

Пример. Двудольный граф нечасто используется в литературе, поэтому его легче записывать с помощью схемных множеств (13.8). Ниже записаны схемные множества узлов-истоков и узлов-стоков графа моста Уитстона:

$$\begin{aligned} &1.1, 1.2, 1.3 \cup 1.1, 2.1, 3.1 \\ &2.1, 2.2, 2.3 \cup 1.2, 2.2, 3.2 \\ &3.1, 3.2, 3.3 \cup 1.3, 2.3, 3.3 \end{aligned} \quad (13.16)$$

Поочередно используя записи узлов-истоков и узлов-стоков, можно построить двудольное дерево, показанное на рис.13.6.

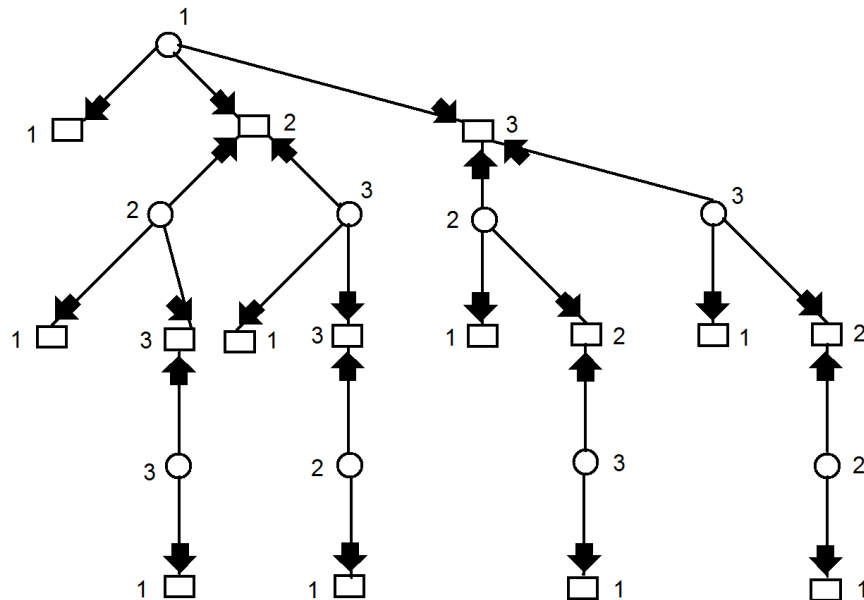


Рис. 13.6. Двудольное дерево, представляющее схемную функцию.

Приведенное дерево представляет структуру схемной функции, которая в матричном виде записывается следующим образом:

$$g_{14} = \frac{\Delta[G]_{\bar{4};\bar{4}}}{\Delta[G]_{\bar{1},\bar{4};\bar{1},\bar{4}}} \quad (13.17)$$

Дерево рис.13.6 является структурой ветвящейся цепной дроби:

$$1.1 - \frac{1.2}{\frac{2.2}{2.1 - \frac{2.3}{3.1}} + \frac{3.2}{3.1 - \frac{3.3}{2.1}}} - \frac{1.3}{\frac{2.3}{2.1 - \frac{2.2}{3.1}} + \frac{3.3}{3.1 - \frac{3.2}{2.1}}}. \quad (13.18)$$

Очевидно, что каждая ветвь этого дерева является контуром в двудольном графе, поэтому при построении структуры схемной функции надо соблюдать правило, что в контуре не должно быть повторяющихся элементов.

Если записи отношений связи заменить соответствующими проводимостями и свернуть дробь, то получим соотношение (13.17). Особо отметим, что для получения ряда подходящих дробей нет необходимости заниматься обрезкой «листьев» этого дерева. Достаточно увеличивать кратность цепных путей от одной подходящей дроби к другой. Например, приведем подходящие дроби схемной функции (13.17):

$$g_{14}^1 = g_{11}; \quad g_{14}^2 = g_{11} - \frac{g_{12}}{\frac{g_{22} + g_{32}}{g_{21}} + \frac{g_{13}}{\frac{g_{23} + g_{33}}{g_{21}} + \frac{g_{31}}{g_{31}}}}. \quad (13.19)$$

В выражении для первого приближения величины входной проводимости присутствует цепной путь первой кратности 11. В выражении для второго приближения к нему добавлены пути третьей кратности.

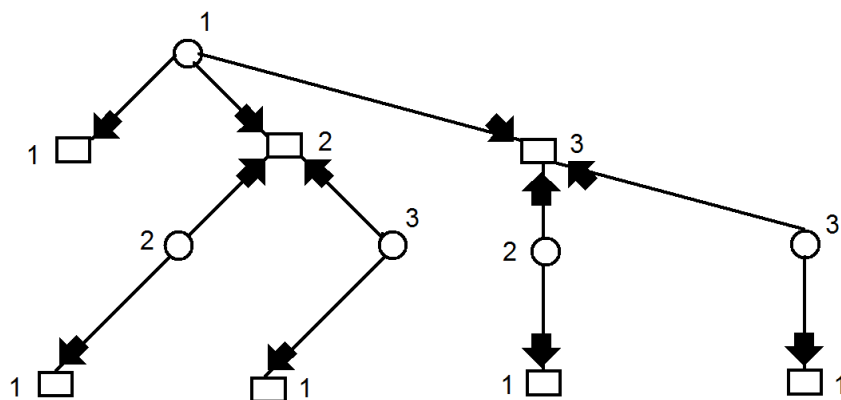


Рис. 13.7. Вторая подходящая дробь графа рис.13.6.

Двудольный граф позволяет нам выделить в графе рис.13.7. следующие определители:

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 31 & 32 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 21 & 23 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 31 & 33 \end{vmatrix}. \quad (13.20)$$

Конечно, все определители объединяются элементом 11 и попарно – элементами 12, 13, а, следовательно, их нет смысла вычислять. Значение второго приближения (13.19) получаем просто, сворачивая ветвящуюся цепную дробь. После прибавления путей пятой кратности мы получаем точное значение схемной функции (13.17). В более сложном графе рис.13.6 можно выделить следующие определители:

$$\begin{vmatrix} 21 & 23 \\ 31 & 33 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 21 & 23 \\ 31 & 33 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{vmatrix}. \quad (13.21)$$

Определители (13.21) попарно равны между собой и приведены здесь только для того, чтобы было легко соотнести их с соответствующими ветвями графа рис.13.6.

Представленные определения и операции показывают роль структуры в теории электрических цепей. Понятие структуры соответствует не только графу схемы, но и описанию элементов схем, а также функциям цепи. Любое из структурных выражений легко можно отразить на множестве параметров, получая привычные математические описания цепи, так и ее элементов.

14. Принцип взаимности и теорема Зеляха-Теллегена

«Мышление создает смысловой скелет вещи;
понимание исходит из вещи, которая
на своем скелете несет также и живое тело».
Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Роль структуры в описании электрических цепей познавалась при изучении общих свойств линейных схем, например, принципа взаимности. В одной из первых своих статей по теории электрических цепей Г. Кирхгоф в нескольких предложениях сформулировал этот принцип [4]. Однако, считая его очевидным, не стал доказывать высказанное утверждение. Вполне возможно, что принцип взаимности формулировали до Кирхгофа и не только в отношении линейных электрических цепей.

В 1877 году вышел в свет первый том книги лорда Рэля «Теория звука», которая, в соответствие с названием, была посвящена механическим колебаниям разного типа [49]. В пункте 72 первого тома автор привел следующее уравнение, которое в будущем было сформулировано как теорема:

72. Если $\psi_1, \dots, \Psi_1, \dots$ и $\psi'_1, \dots, \Psi'_1, \dots$ — две группы перемещений и соответствующих сил, то мы имеем следующее соотношение взаимности:

$$\Psi_1\psi'_1 + \Psi_2\psi'_2 + \dots = \Psi'_1\psi_1 + \Psi'_2\psi_2 + \dots, \quad (1)$$

Далее предполагалось, что в левой части равенства остается действовать только сила Ψ_2 , а в правой части — Ψ'_1 . В таком случае уравнение принимает следующий вид:

$$\Psi_2\psi'_2 = \Psi'_1\psi_1. \quad (2)$$

Из упрощенного равенства видно, что, например, сила Ψ_2 умножается на перемещение того же номера, но из другой группы сил. Из этого равенства следует пропорция, приведенная ниже:

$$\frac{\Psi_2}{\Psi'_1} = \frac{\psi_1}{\psi'_2} \quad (14.1)$$

Выражение (14.1) носит сегодня название принципа (теоремы) взаимности, словесную формулировку которого даем по монографии [49]:

Если силы Ψ_2 и Ψ'_1 одинакового рода, мы можем предположить, что они равны; тогда очевидно, что действующая в отдельности сила какого-нибудь типа производит перемещение некоторого второго типа, равное перемещению первого типа, обязанному действию некоторой равной силы второго типа. Если, например, A и B — две точки стержня, который каким-нибудь образом поддерживается в горизонтальном положении, то вертикальное отклонение в точке A , когда груз W подвешен в точке B , будет тем же самым, что и отклонение в точке B , когда груз W подвешен в точке A ¹⁾.

В приведенной пространной цитате принципиально важно подчеркнуть тот факт, что свойства стержня, к которому прикладывались силы, оставались неизменными, другими словами, структура объекта оставалась одной и той же.

Автор принципа взаимности пытался ввести его в практику электрических расчетов, даже предусмотрел особый раздел в новом издании монографии, но по-настоящему отношение взаимности ввел в электротехнику только О. Хевисайд [50]. О. Хевисайд на странице 236 своей монографии, рассматривая два тока, находящихся на расстоянии Γ друг от друга, решил оценить потенциальную энергию магнитного поля:

«So let A and A' be the vector-potentials of complete currents C and C' , then (1) and (2) become

Пусть A и A' есть векторные потенциалы полных токов C и C' , с учетом (1) и (2) имеем»

$$\text{«}M = - C' \times \text{line-integral of } A \text{ once round } C' \text{ (3)}$$

$$= - C \times \text{line-integral of } A' \text{ once round } C \text{ (4)}$$

х линейный интеграл от A' одновременно с C »

«These, again, may be put in another form, which will be useful. Consider (3) only. Let ds' be an element of length of the current C' . The portion of M due to it alone is

Это, опять же, может быть записано в другой форме, которая будет полезна. Рассматриваем только уравнение (3). Пусть элемент линии тока C' обозначен ds' . Из-за этого часть M будет иметь вид

$$- AC'ds' \cos(\angle AC')».$$

Уравнение (3) в современном виде будет выглядеть следующим образом:

$$W_M = - \int_L AI' \cos(\bar{A} \wedge \bar{I}') \cdot dl, \quad (14.2)$$

где \bar{A} – векторный магнитный потенциал, Вб/м;

I' – сила тока, А;

W_M – магнитная энергия, Дж.

Уравнение (4) в современном виде будет выглядеть аналогично (14.2):

$$W'_M = - \int_L A' I \cos(\bar{A}' \wedge \bar{I}) dl. \quad (14.3)$$

Заметим, что сила электрического тока не является вектором, поэтому будет правильно записать уравнение (14.2), выразив силу тока через плотность того же тока $I' = \bar{\delta}' \cdot d\bar{s}$:

$$W_M = - \int_V A \cdot \delta' \cos(\bar{A} \wedge \bar{\delta}') \cdot dV. \quad (14.4)$$

Рассматриваемые токи действуют одновременно в каждом из проводов, поэтому подынтегральное выражение для энергии в этом случае будет иметь вид:

$$- \frac{I \cdot I'}{r} \cos(\angle \bar{I} \wedge \bar{I}') \cdot dl dl'. \quad (14.5)$$

Далее Хевисайд пишет:

« – The mutual energy of two closed currents is the same as if every pair of unit volumes, one belonging to the first, and the other to the second circuit, contributed the amount

Взаимная энергия двух замкнутых токов есть та самая, если в каждой паре группы токов, один принадлежит первой, а другой – второй цепи, но вносят свой вклад суммарно

$$- CC'/r = - AC' = - A'C \dots\dots\dots (1)».$$

Последняя запись очень краткая и условная, сократим ее до простого равенства:

$$AC' = A'C. \tag{14.6}$$

Это равенство означает только то, что энергии, соответствующие уравнениям (14.2), (14.3) равны, а пропорция, которая следует из (14.6), аналогично (14.1)

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$$

и свидетельствует об отношении взаимности, т.е. взаимного влияния. Учитывая тот факт, что токи, образующие магнитные поля, принадлежат двум контурам разных цепей, можно рассматривать соотношение (14.6) как первую запись теоремы Зеляха-Теллегена. Многие статьи из монографии [50], посвященные исследованию энергии электрических токов, были впервые опубликованы в нескольких номерах журнала «The Electrician» за 1883 год.

На практике вместо величины энергии электрического (магнитного) поля используется значение мощности. Например, для электростатического поля мощность, заключенная в некотором объеме, вычисляется по формуле

$$P = \int_V \bar{E} \cdot \bar{\delta} dV = 0, \tag{14.7}$$

где \bar{E} – напряженность электрического поля;

$\bar{\delta}$ – плотность полного электрического тока.

Интеграл по объему скалярного произведения (14.7) равен нулю при условии, что поле вектора напряженности электрического поля (аналог напряжения ветви) является безвихревым

$$\text{rot}\bar{E} = 0,$$

а поле второго сомножителя (аналог тока ветви) – соленоидальным

$$\text{div}\bar{\delta} = 0.$$

Первое условие аналогично закону Кирхгофа для контура, а второе – закону для узла [51]. При выполнении этих условий уравнение (14.7) можно считать формальной записью теоремы Зеляха-Теллегена для электромагнитного поля.

Вернемся к теореме взаимности. Приведем формулировку теоремы взаимности (принципа взаимности) из современного учебника по теории линейных электрических цепей [51]:

«если ЭДС $\dot{E}_{ab} = \dot{E}$, действуя в ветви ab сколь угодно сложной цепи, при отсутствии в цепи прочих ЭДС вызывает в другой ветви cd этой цепи ток $\dot{I}_{cd} = \dot{I}$, то такая же ЭДС $\dot{E}_{cd} = \dot{E}$, действуя в ветви cd , при отсутствии прочих ЭДС вызовет в ветви ab такой же ток $\dot{I}_{ab} = \dot{I}$ ».

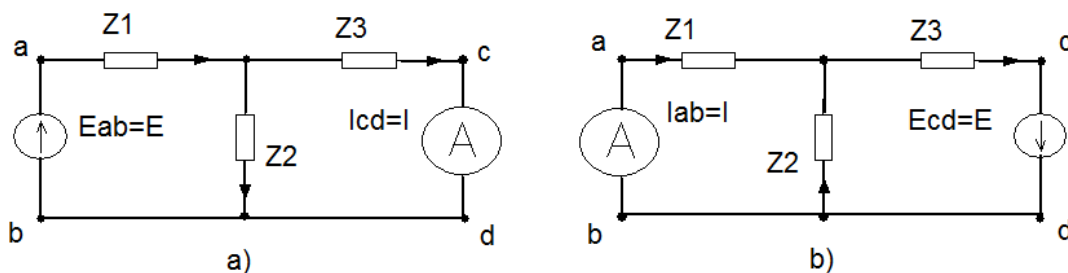


Рис. 14.1. Теорема взаимности.

По рис.14.1 легко проследить текст теоремы взаимности.

Из рис.14.1а, 14.1б берем следующие значения переменных

$$E_{ab}^a, I_{cd}^a, E_{cd}^b, I_{ab}^b$$

и составляем пропорцию, аналогичную (9.1):

$$\frac{E_{ab}^a}{E_{cd}^b} = \frac{I_{cd}^a}{I_{ab}^b}. \quad (14.8)$$

Из пропорции (14.8) получаем результат (14.9), который следует из текста теоремы. Отметим, что его также можно получить из теоремы Зеляха-Теллегена [20]:

$$E_{ab}^a \cdot I_{ab}^b = E_{cd}^b \cdot I_{cd}^a. \quad (14.9)$$

Теорема взаимности была обобщена на случай, когда в электрической цепи действует несколько источников:

«Пусть множество ЭДС V'_1, \dots, V'_n одной и той же частоты вызывает в n ветвях не изменяющейся схемы распределение токов I'_1, \dots, I'_n и пусть множество других ЭДС V''_1, \dots, V''_n той же самой частоты вызывает множество других токов I''_1, \dots, I''_n . Тогда

$$\sum_{j=1}^n V'_j I''_j = \sum_{j=1}^n V''_j I'_j. \quad (14.10)$$

Доказывать равенство (14.10) нет необходимости, так как мы подробно рассмотрели вывод соотношения (14.9). Кроме того, принцип наложения, справедливый для линейных электрических цепей, дает нам основания рассчитывать частичные токи и напряжения по формуле (14.10), вызываемые в ветвях ЭДС, которые мы вводим поочередно. Множества значений токов и напряжений ветвей, объединенных верхним индексом, легко интерпретировать как характеристику определенного режима электрической цепи. Заметим, что уравнение, аналогичное (14.10), приводится в статье [16], когда рассматривается возможность выделение из электрической цепи более двух внешних ветвей.

Удивительно, что научный мир не заметил более ранней публикации, в которой был сформулирован принцип взаимности [4]:

Es geht hieraus unter Anderem hervor, dafs, wenn wir aus einem beliebigen Systeme zwei Drähte auswählen, die Intensität des Stromes, welcher in dem einen hervorgebracht wird durch eine elektromotorische Kraft in dem zweiten, gerade dieselbe ist als die Intensität des Stromes, welcher in dem zweiten hervorgebracht wird durch eine ebenso grofse elektromotorische Kraft in dem ersten.

Приводим русский перевод оригинального текста:

«Отсюда среди прочего следует, что если из произвольной системы мы выделим два проводника, то сила тока, создаваемого в одном из них электродвижущей силой в другом проводнике, равна силе тока, которую создала бы во втором проводнике такая же по величине электродвижущая сила в первом проводнике».

Принцип взаимности как инструмент теории электрических цепей ученые используют давно, считая его название правильным. Однако особая трактовка этого принципа была все-таки названа теоремой [15].

Теллеген в аннотации к своей статье отмечает, что **«Эта теорема делает возможным доказательство закона сохранения энергии в электрической цепи и принципа взаимности...»**. Удивительно, что в этом предложении он отводит теореме, соавтором которой является, служебную роль. Другими словами, ставит принцип взаимности выше теоремы, претендующей на первое место в ряду теорем теории электрических цепей. Однако уже во введении к статье позиция несколько изменяется:

«Рассуждения, ведущие к этой теореме, обязательно присутствуют в различных исследованиях цепей, но сама теорема, насколько это известно автору, никогда не была сформулирована явно».

С этим трудно не согласиться, рассматривая текст из монографии Хевисайда, приведенный выше. Однако формулировка баланса мгновенных мощностей из монографии профессора Зеляха Э.В. была опубликована на год раньше и совершенно явно [13]. Трудно сказать, знал ли В. Теллеген об издании этой книги в СССР. Установить этот факт, не имея допуска к архиву ученого, просто невозможно. Остается только констатировать, что определение баланса мгновенных мощностей почти дословно совпадает с текстом теоремы [15].

15. Скрытая структура числа

«...**число** есть без-качественная, вне-содержательная смысловая **структура**».
Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Известна математическая максима, которая приписывается Архимеду: «**Все есть число**». Вероятно, великий ученый хотел подчеркнуть, что без численного определения свойств любого изучаемого объекта не может быть никакой науки.

Любое числовое поле легко представить неупорядоченным, так как упорядоченность предполагает сознательные действия некоторого субъекта, существование которого, как правило, проблематично. Несмотря на определенный беспорядок числового поля, никто из математиков не сомневается, что в формировании любого конкретного числа участвует некоторое количество чисел поля, связанных между собой процессом становления. Эти числа можно обнаружить, например, в процессе непрерывного деления двух чисел, выбранных произвольно. Найденные в процессе деления числа, можно рассматривать как связанные между собой некоторой структурой. В данном случае такой структурой являются непрерывные цепные дроби [31], которые из-за этого иногда называют арифметическими.

Непрерывную цепную дробь, вероятно, можно рассматривать как математический объект, расположенный на границе арифметики и алгебры. Теория непрерывных дробей является одной из классических в математике, ее история насчитывает несколько тысяч лет. В дореволюционной России теория непрерывных дробей включалась в учебники алгебры для гимназий и реальных училищ, раздел так и назывался «Арифметические непрерывные дроби» [52].

Доказана теорема, на основании которой идут поиски чисел, связанных некоторой структурой. Приведем ее текст в том виде, как ее понимают математики, но, все-таки, подчеркнем главное для нас: цепная дробь объединяет числа, которые с помощью структуры представляют интересующее нас число.

«Для всякого данного положительного числа Z , как рационального, так и иррационального, существует арифметическая непрерывная дробь, равная этому числу».

Пример. Разложим число $\frac{221}{651}$ в непрерывную дробь [52]. Запишем последовательность делений в строчку:

$$221|651|221|209|12|5|2|1$$

Результат деления числителя дроби на ее знаменатель меньше единицы, учитываем только целую часть результата, т.е. 0 ноль. Таким образом, на начальном этапе деления запоминаем этот результат. Меняем местами числитель и знаменатель, после чего продолжаем деление. Целая часть результата деления знаменателя дроби на числитель $651/221$ равна 2 двум. Учитываем это значение и помещаем на четвертую позицию строки остаток деления числа 209. Результат деления числа на позиции три $221/209$ равен 1 единице. Учитываем это значение, а остаток от деления 12 записываем на пятую позицию строки. Результат следующего деления $209/12$ равен 17, а остаток 5. Следующее деление $5/2$ равно 2 двум, а остаток равен 1 единице. Последнее деление $2/1$ дает значение 2. Записываем найденные числа как элементы непрерывной дроби:

$$\frac{221}{651} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{17 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}} = 0.339477... \quad (15.1)$$

Приведем еще один пример из учебника алгебры [52]. Разложим в непрерывную дробь иррациональное число:

$$\sqrt{27} = 5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{10 + \frac{1}{5 + \frac{1}{10 + \dots}}}} \quad (15.2)$$

Кроме самой дроби приведем ряд подходящих дробей, который помогает оценить точность результата:

$$\frac{5}{1}, \frac{26}{5}, \frac{265}{51}, \frac{1351}{260}, \frac{13775}{2651}.$$

Запишем значения подходящих дробей в десятичной форме, а также разницу их значений:

$$5; 5.2; 5.196078; 5.196153; 5.196152$$

$$-0.2, 0.003922, -0.000075, 0.000001.$$

Отметим, что пятая и шестая подходящие дроби дают хорошее приближение значения корня из числа 27.

Если внимательно рассмотреть арифметические дроби приведенных выше примеров, то можно заметить, что их элементами являются целые числа. Такая особенность дробей порождена принятым алгоритмом последовательного деления. Заметим еще одну особенность дробей (15.1), (15.2) – первая дробь конечна, а вторая является бесконечной. Выражение (15.1) представляет рациональное число, а выражение (15.2) – иррациональное.

Числа можно различать по признаку, который определяет их природу. Существуют числа с постоянным, не изменяющимся значением. Например, члены натурального числового ряда, каждое из которых не меняет свое значение, находясь на определенной позиции в ряде. Такие числа называют **константами**. Числа, изменяющие свое значение получили название **переменных**. Одни из них меняют свое значение независимо от каких-либо условий, их название – **аргумент**. Число, значение которого изменяется в зависимости от значения другого, называют **функцией**.

С таких определений начинается текст книги датского астронома и математика T.N. Thiele [53]. Книга посвящена процессу интерполяции, т.е. прогнозу значений функции в интервале между известными значениями аргумента $[a, b]$. Отметим, что значения функции, соответствующие крайним точкам интервала аргумента, считаются известными – $A(a), B(b)$.

Линейная интерполяция основана на представлении о постоянном шаге внутри интервала аргумента и о средней добавке к значению функции

по сравнению с предыдущим ее значением. Определим величину этой добавки:

$$\frac{A-B}{a-b} = \frac{A}{a-b} + \frac{B}{b-a} = \delta(b, a). \quad (15.3)$$

Понятие, введенное выражением (15.3), называется разделенной разностью. Конечно, отношение приращений функции и аргумента является приближением значения производной, но, чтобы избежать путаницы, используют новое, более точное название. Отметим, что после выполнения операции деления приращение аргумента рассматривается как алгебраический двучлен, из которого за скобку можно вынести знак минус.

Кроме разделенной разности первого порядка (15.3), которая определяется на одном интервале аргумента, возможны разделенные разности других порядков, в качестве примера, рассмотрим выражение для разделенной разности второго порядка:

$$\begin{aligned} \delta(a, b, c) &= \frac{\delta(a, b) - \delta(b, c)}{a - c} = \\ &= \frac{A}{(a-b)(a-c)} + \frac{B}{(b-a)(b-c)} + \frac{C}{(c-a)(c-b)}. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Аналогично образуются разделенные разности более высоких порядков.

В своей монографии Тиле вводит понятие обратное выражению (15.3):

$$\rho(a, b) = \frac{a-b}{A-B} = \frac{1}{\delta(a, b)}. \quad (15.5)$$

Величина (15.5) получила название обратной разделенной разности. Приведенное выше выражение (15.4) можно развить следующим образом:

$$\rho(a, b, c) = \frac{a-c}{\rho(a, b) - \rho(b, c)}. \quad (15.6)$$

Равенство (15.5) является двойственным выражению (15.3).

Функция, содержащая обратные разделенные разности может быть записана в виде цепной дроби:

$$X = A + \frac{|x-a|}{|\rho(a,b)|} + \frac{|x-b|}{|\rho(a,b,c)-A|} + \frac{|x-c|}{|\rho(a,b,c,d)-\rho(a,b)|} + \frac{|x-d|}{|\rho(x,a,b,c,d)-\rho(a,b,c)|}. \quad (15.7)$$

Непрерывная цепная дробь (15.7) получается при решении следующей системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho(x,a,b,c)-\rho(a,b,c,d)) \cdot (\rho(x,a,b,c,d)-\rho(a,b,c)) = x-d \\ (\rho(x,a,b)-\rho(a,b,c)) \cdot (\rho(x,a,b,c)-\rho(a,b)) = x-c \\ (\rho(x,a)-\rho(a,b)) \cdot (\rho(x,a,b)-A) = x-b \\ (X-A) \cdot \rho(x,a) = x-a \end{array} \right. \quad (15.8)$$

Очевидно, что из четвертого уравнения системы (15.8) можно получить выражение, аналогичное первым двум слагаемым цепной дроби (15.7):

$$(X-A) = \frac{x-a}{\rho(x,a)} \Rightarrow X = A + \frac{x-a}{\rho(x,a)}. \quad (15.9)$$

Детальным решением системы уравнений (15.8) читатель может заняться самостоятельно. Нам остается отметить, что представление функции в виде дроби, содержащей обратные разделенные разности, можно варьировать так, как, например, сделано в источнике [54]:

$$f(x) = a_0 + \frac{|x-x_0|}{|a_1|} + \frac{|x-x_0|}{|a_2|} + \frac{|x-x_0|}{|a_3|} + \dots, \quad (15.10)$$

где $a_0 = f(x_0)$; $a_1 = \rho_1(x_0, x_1)$;

$a_2 = \rho_2(x_0, x_1, x_2) - f(x_0)$; $a_3 = \rho_3(x_0, x_1, x_2, x_3) - \rho_1(x_0, x_1)$.

Возможности дробей Тиле были изучены В.Я. Скоробогатько в своей монографии [32]. Приведем достаточно большую цитату из этого источника.

«Пусть значения функции $f(x)$ известны в точках x_0, x_1, \dots, x_n . Естественно предположить, что среди этих значений аргумента нет равных между собой. Построим последовательность функций:

$$\Phi_0 = f(x),$$

$$\Phi_1[x_0, x] = \frac{x - x_0}{\Phi_0(x) - \Phi_0(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}, \dots,$$

Если здесь положить $x = x_k$, то получим выражение:

$$\Phi_k[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_k] - \Phi_{k-1}[x_0, \dots, x_{k-2}, x_{k-1}]}, \dots \quad (15.11)$$

$$(\overline{k=1, n}).$$

Здесь

$$\Phi_1[x_0, x_1] = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} - \text{обратная первая разделенная разность функции,}$$

$$\Phi_2[x_0, x_1, x_2] = \frac{x_2 - x_1}{\Phi_1[x_0, x_2] - \Phi_1[x_0, x_1]} - \text{обратная вторая разделенная разность} \dots$$

Остальные обратные разделенные разности функции $f(x)$ определяются по формуле (15.11) аналогично выражениям для первой и второй разности.

Выражение для функции $f(x)$ в виде цепной дроби получаем по формуле (15.12):

$$f(x) = \Phi_0(x_0) + \frac{x - x_0}{\Phi_1[x_0, x_1]} + \frac{x - x_1}{\Phi_2[x_0, x_1, x_2]} + \dots + \frac{x - x_n}{\Phi_n[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]} \quad (15.12)$$

($\overline{n=3, \dots}$)

При учете последующих номеров обратных разделенных разностей дробь (15.12) будет продолжена.

Вычисления обратных разделенных разностей удобно проводить по следующей расчетной схеме (15.13):

$$\begin{array}{cccccc}
 x_0 & f(x_0) & & & & \\
 x_1 & f(x_1) & \Phi_1[x_0, x_1] & & & \\
 x_2 & f(x_2) & \Phi_1[x_0, x_2] & \Phi_2[x_0, x_1, x_2] & & \\
 x_3 & f(x_3) & \Phi_1[x_0, x_3] & \Phi_2[x_0, x_1, x_3] & \Phi_3[x_0, x_1, x_2, x_3] & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array} \quad (15.13)$$

Пример. В таблице 15.1 приведены результаты измерений нелинейного участка вольт-амперной характеристики диода Д-205 (прямая ветвь).

Таблица 15.1

U, V	0.36	0.442	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.786
I, mA	0.0021	0.023	0.0595	0.28	0.662	1.677	4.22	11.6	22.11

На основании данных таблицы 15.1, по расчетной схеме (15.13) определим значения обратных разделенных разностей функции $i = f(u)$. Значения обратных разделенных разностей этой функции сводим в таблицу 15.2, которая разбита на несколько частей.

Таблица 15.2/1

№ п/п	U, V	I, mA	Φ_1	Φ_2	Φ_3
1	0	0			
2	0,36	0,0021	171,42857		
3	0,442	0,023	19,217391	$-5,387252 \cdot 10^{-4}$	
4	0,5	0,0595	8,403361	$-8,587628 \cdot 10^{-4}$	-181,2287
5	0,55	0,28	1,964285	$-1,12118 \cdot 10^{-3}$	-185,4221
6	0,6	0,662	0,906344	$-1,407441 \cdot 10^{-3}$	-181,8776
7	0,65	1,677	0,387596	$-1,6955 \cdot 10^{-3}$	-179,8102
8	0,7	4,22	0,165676	$-1,985254 \cdot 10^{-3}$	-178,358
9	0,75	11,6	$6,46552 \cdot 10^{-2}$	$-2,275858 \cdot 10^{-3}$	-177,3036
10	0,786	22,11	$3,65495 \cdot 10^{-2}$	$-2,485515 \cdot 10^{-3}$	-176,7011

Таблица 15.2/2

Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7
$-1,192349 \cdot 10^{-2}$			
$-1,541069 \cdot 10^{-1}$	$-3,516584 \cdot 10^{-1}$		
$1,057455 \cdot 10^{-1}$	$8,498415 \cdot 10^{-1}$	$4,161465 \cdot 10^{-2}$	
$6,966941 \cdot 10^{-2}$	1,838395	$4,566098 \cdot 10^{-2}$	12,35687
$6,369264 \cdot 10^{-2}$	2,644938	$5,005679 \cdot 10^{-2}$	11,84533
$6,316812 \cdot 10^{-2}$	3,142827	$5,322672 \cdot 10^{-2}$	11,71195

Таблица 15.2/3

Φ_8	Φ_9
.....
№ 1 – 7 ↑	№ 1 – 7 ↑
$-9,774406 \cdot 10^{-2}$	
$-1,333498 \cdot 10^{-1}$	$-1,011072$

Значения, расположенные на диагонали таблицы 15.2, являются элементами цепной дроби Тиле, которая соответствует функции, заданной таблицей 15.1 на указанном интервале аргумента. Запишем цепную дробь:

$$\begin{aligned}
 i(u) = & \frac{u}{|171.42857|} + \frac{u - 0.36}{|-5.387252 \cdot 10^{-4}|} + \frac{u - 0.442}{|-181.2287|} + \frac{u - 0.5}{|-1.192349 \cdot 10^{-2}|} + \\
 & + \frac{u - 0.55}{|-3.516584 \cdot 10^{-1}|} + \frac{u - 0.6}{|4.161465 \cdot 10^{-2}|} + \frac{u - 0.65}{|12.35687|} + \\
 & + \frac{u - 0.7}{|-9.774406 \cdot 10^{-2}|} + \frac{u - 0.75}{|-1.011072|}.
 \end{aligned} \tag{15.14}$$

Выражение (15.14) записано в линию, что возможно только для простых цепных дробей. Однако, дробь, приведенная выше, такой только кажется. Достаточно разделить числитель любого слагаемого на соответствующий знаменатель и произвести сложение, чтобы число слагаемых на образовавшемся этапе стало больше двух. Такие цепные дроби называются ветвящимися [32].

Покажем это преобразование на примере двух последних слагаемых выражения (15.14):

$$-9.774406 + \frac{u - 0.7}{-1.011072} - \frac{0.75}{-1.011072}.$$

Не будем продолжать преобразование дроби Тиле, т.к. приведенный пример доказывает, что, на самом деле, выражение (15.14) является ветвящейся цепной дробью.

Свернем дробь (15.14) и получим выражение функции в виде соотношения многочленов:

$$i(u) = \frac{u(u^4 - 1.8604u^3 + 1.26948u^2 - 3.774103 \cdot 10^{-1}u + 4.140848 \cdot 10^{-2})}{1.19401u^4 - 3.3178u^3 + 3.42581u^2 - 1.554798u + 2.612436 \cdot 10^{-1}}. \quad (15.15)$$

Можно предположить, что многочлены числителя и знаменателя (15.15) получены при раскрытии некоторых определителей. В результате вычислений по выражению (15,14) получаем значения тока, которые соответствуют табличным величинам с погрешностью 0,635%.

По данным таблицы 15.1 были рассчитаны параметры модели Эберса – Молла для диода и получено уравнение для статической вольт-амперной характеристики:

$$i(u) = 1.58533 \cdot 10^{-6} \left[\exp\left(\frac{u}{4.675751 \cdot 10^{-2}}\right) - 1 \right]. \quad (15.16)$$

Величина погрешности значений, полученных по уравнению (15.16), составляет 10,35%. Однако, не смотря на довольно большую неточность, она используется во всех компьютерных программах расчета электрических

цепей. Популярность этой модели объясняется тем, что она обладает простой структурой и небольшим числом параметров. Связность графа электрической схемы в определенной мере компенсирует неточность моделирования.

Итак, было показано, что структура чисел-констант и чисел-функций определяется алгоритмом, с помощью которого она и была выявлена. Даже в случае функции электрической цепи, представленной таблично, нет (и не может быть) отображения структуры графа схемы. То, что сохраняется на уровне символов, но исчезает при переходе к числам. Это надо знать, чтобы не искать того, что просто отсутствует.

16. Особенности численных методов решения

«Можно, например, очень хорошо *решать* математические задачи и в то же время совершенно не отдавать себе *отчета* в ...*значимости* употребляемых здесь *категорий*». Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Методы решения уравнений/систем уравнений разрабатывались математиками в соответствии с потребностями науки и практики. Физики не подвергали эти результаты сомнению и использовали математические методы для решения физических задач. Например, прямой метод решения алгебраических уравнений использовал Кирхгоф при решении задачи, которая послужила началом нового раздела науки [4].

Впервые была поставлена задача по нахождению значений токов в ветвях схемы, которая была системой проводников, соединенных между собой с образованием узлов и контуров. Задача не получила практического решения потому, что автор не ограничивал размера системы проводников. Однако благодаря постановке такой масштабной задачи были стимулированы работы в том же направлении, что привело к постепенному формированию современной теории электрических цепей.

Сначала электрические цепи состояли только из резисторов, но когда в них начали включать реактивные элементы, то в алгебраических уравнениях появились комплексные величины. Позже специалисты заинтересовались динамическими процессами в электрических схемах и в виде модели стали рассматривать дифференциальные уравнения. Оказалось, что ранее отработанные алгоритмы решения задач надо было менять.

Методы решения дифференциальных уравнений существенно отличаются от методов решения алгебраических. Потребовалось применять операцию интегрирования, которая использовалась до этого только в механике. «Взять интеграл» – это значит найти первообразную функцию той, которая расположена под его знаком. Успех на этом этапе зависит от знаний и опыта человека, который осуществляет решение дифференциального уравнения. Однако это не всегда удается даже для дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому этот метод решения

дифференциальных уравнений стали применять только в исключительных случаях.

Трудности в определении первообразной функции дали импульс развитию численных методов интегрирования. Чтобы применить численное интегрирование надо выбрать один из известных методов, главным элементом которого является итерационная формула. Кроме того, для начала вычислительного процесса требуется знать «нулевые» значения переменных, которые содержатся в итерационной формуле. Эти значения находят разными способами, которые не имеют никакого отношения к итерационной процедуре. Если вычислить их невозможно, то начальные значения назначают интуитивно, т.е. довольно случайно.

Большим преимуществом численных методов интегрирования является то, что они легко поддаются автоматизации с помощью компьютерных программ. Давно существуют стандартные программы, которые используются в научных исследованиях, но для решения прикладных задач разрабатываются особые программные комплексы. В каждом из комплексов программ анализа электрических цепей сегодня используются численные методы решения.

В теории электрических цепей существует понятие – **«состояние электрической схемы»**, что означает фиксацию распределения мощности источников по ее элементам. Отметим, что реактивные элементы цепи обладают энергией даже тогда, когда остальные лишены этого, т.к. в некоторых индуктивностях продолжают течь токи, а на конденсаторах задерживаются определенные напряжения. Даже при традиционном расчете переходного процесса эту энергию обязательно учитывают. Запас энергии в реактивных элементах схемы в момент $t=0$ связывают с начальными значениями переменных U_C, I_L .

За время переходного процесса распределение энергии между элементами схемы меняется, т.к. в обмене энергией участвуют все элементы электрической цепи. И если определение мощностей на резисторах не представляет труда, то количество энергии реактивных элементов можно определить по двум переменным. Напряжения на конденсаторах и токи индуктивностей определяются зарядами емкостей и потокосцеплений индуктивностей. Поэтому **переменными состояния** считаются оба набора

физических величин: $u_C(q_C), i_L(\psi_L)$. Они входят в следующую систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{X}' = A\bar{X} + B\bar{u} \\ \bar{Y} = C\bar{X} + D\bar{u} \end{cases} \quad (16.1)$$

где \bar{X} – вектор переменных состояния;

\bar{X}' – вектор производных переменных состояния;

\bar{u} – вектор источников энергии;

\bar{Y} – вектор выходных переменных.

Все матрицы системы уравнений (16.1), как правило, получаются автоматически в процессе работы соответствующих компьютерных программ.

Дифференциальным является только первое матричное уравнение системы (16.1), именно оно решается с помощью численных методов. Второе уравнение системы реализует прямой метод решения, в процессе которого на основе найденных величин переменных состояния определяются остальные переменные цепи. В качестве стандартного метода переменных состояния (16.1) считается метод **«прогноз-коррекция»**, в котором используются две итерационные формулы: прогноз основан на применении **явного метода Ньютона**, а коррекция – на **неявном методе Эйлера**. Рассмотрим особенности применения этих методов в процессе численного решения **уравнений состояния** [8].

Численный метод Ньютона.

Итерационная формула метода Ньютона следует из ряда Тейлора, а точнее – из двух его первых слагаемых:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h, \quad (16.2)$$

где h – шаг изменения аргумента.

Запишем выражение (16.2) в виде расчетной схемы метода Ньютона:

$$f(x^{j+1}) = f(x^j) + \frac{df(x^j)}{dx} \cdot h \quad (16.3)$$

Выражение (16.3) представляет собой дифференциальное уравнение с правой частью (в нашей записи – с левой частью). Найдем общее решение этого уравнения:

$$0 = f(x^j) + f'(x^j) \cdot (x^{j+1} - x^j). \quad (16.4)$$

Из уравнения (16.4) находим величину следующей координаты по оси аргумента:

$$x^{j+1} = x^j - \frac{f(x^j)}{f'(x^j)}. \quad (16.5)$$

Таким образом, получена итерационная формула для определения корня уравнения (16.4).

Как следует из формулы (16.3), для начала итерационной процедуры нам следует знать:

x_0 – начальное значение аргумента;

$f(x_0)$ – значение функции при начальной величине аргумента;

$f'(x_0)$ – значение первой производной этой функции.

Набор перечисленных величин называется начальными условиями. Далеко не всегда можно назначить числовые величины начальных условий, близкие к реальным значениям.

Алгоритм вычислений по итерационной формуле (16.5) следующий:

а) задается численное значение аргумента x^j , и производятся вычисления по итерационной формуле (16.5).

б) Найденное значение аргумента возвращается в ту же формулу и совершается следующая итерация.

в) Процесс вычислений останавливается лишь тогда, когда выполняется условие $\left| (x^{j+1} - x^j) \right| < \varepsilon$, т.е. корень уравнения (16.4) найден с заданной точностью.

Теперь значение корня и начальных условий подставляются в формулу (16.3), чтобы определить первое приближение к значению функции. Количество итераций будет небольшим только в том случае, когда начальное значение аргумента будет близко к значению корня уравнения.

В случае, если выбранный шаг будет больше некоторой пороговой величины то, результат вычислений по формуле (16.3) будет постоянно расти от итерации к итерации. Наступит численная неустойчивость, которую называют А-неустойчивостью. Чтобы избавиться от нее, надо будет уменьшать шаг интегрирования. В современных программах оптимизация значения шага происходит автоматически. Второй шаг вычислений начинается с того, что найденное на первом шаге значение подставляется в неявную формулу метода Эйлера для его уточнения. При следующей итерации уточненное значение используется как прогноз.

Численные методы Эйлера.

Если подынтегральную функцию представить графически, то значение интеграла на заданном интервале аргумента будет соответствовать площади под ее изображением. Пространство под кривой функции Эйлер разбивал на прямоугольники или трапеции, а значение интеграла получал как сумму площадей этих элементарных фигур. Итерационные формулы метода Эйлера находят из следующих уравнений:

1. Значения функции в точках интерполяции определяются в соответствии с решением дифференциального уравнения (16.6) [55]:

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \Rightarrow u_{i+1} = (1+h) \cdot u_i \quad (16.6)$$

где u_{i+1} , u_i , u_{i-1} – значения функции в соседних точках;

h – шаг интегрирования, длина элементарного отрезка по оси аргумента.

Далее, после стрелки, записано разностное уравнение, соответствующее этому дифференциальному уравнению. Оно является записью явного метода численного интегрирования, предложенного Эйлером.

2. Значения функции в точках интерполяции определяется в соответствии с решением дифференциального уравнения (16.7) [55]:

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \Rightarrow u_{i+1} = \frac{1}{1-h} \cdot u_i \quad (16.7)$$

Далее, после стрелки, записано разностное уравнение, соответствующее этому дифференциальному уравнению. Оно является записью неявного метода численного интегрирования, предложенного Эйлером. Этот метод лишен численной неустойчивости, т.е. метод А - устойчив.

Разностные уравнения легко преобразовать так, чтобы они были одинаковыми по форме:

$$u_{i+1} = u_i + h \cdot u_i, \quad (16.8)$$

$$u_{i+1} = u_i + h \cdot u_{i+1}. \quad (16.9)$$

Теперь очевидно, что уравнение (16.8) записано в явной форме, а следующее (16.9) – в неявной. Уравнение неявного численного метода можно использовать для коррекции величины шага интегрирования:

$$h = 1 - \frac{u_i}{u_{i+1}}. \quad (16.!0)$$

На практике все выглядит сложнее, так как к расчету предлагаются достаточно большие электрические схемы. При моделировании этих схем используются матрицы, да и сама она заменяется электрической цепью, в которой активные элементы представляются соответствующими схемами замещения. По этой причине модель схемы содержит управляемые источники напряжения и тока.

В большой схеме замещения возможно появление узлов, ветви которых содержат только идеальные индуктивности и контуров, ветви которых содержат только идеальные емкости. Такие узлы и контура

называют **топологическими вырождениями**, т.к. в обозначенных случаях нет возможности составить уравнения Кирхгофа. Идеальные индуктивности не имеют внутреннего сопротивления, а идеальные конденсаторы не имеют путей для разряда емкости. Такие вырождения надо замечать в большой схеме замещения и дорабатывать. Идеальным индуктивностям искусственно создают внутреннее сопротивление, включая последовательно с ними резисторы небольшого номинала, а идеальным емкостям добавляют пути разряда, включая параллельно емкостям резисторы большого номинала. В конечном счете, эти значения выбирает специалист, проводящий расчет электрической цепи с помощью комплекса программ.

Итак, построение системы уравнений начинается с выбора дерева электрической цепи в графе схемы замещения. В ветви дерева стараются включить элементы, которые характеризуются потенциалом или напряжением, а в ветви связи преимущественно включают элементы, характеризующиеся током. Резисторы можно включать в любые ветви графа.

Ниже приведена структура векторов напряжения и тока, которые соответствуют требованиям, предъявленным к ветвям дерева и связям электрической цепи:

$$\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} u_{EI} \\ u_{CI} \\ u_{RI} \\ u_{LI} \\ u_{j\Lambda} \\ u_{L\Lambda} \\ u_{R\Lambda} \\ u_{C\Lambda} \end{bmatrix}, \quad \bar{i}(t) = \begin{bmatrix} i_{EI} \\ i_{CI} \\ i_{RI} \\ i_{LI} \\ i_{j\Lambda} \\ i_{L\Lambda} \\ i_{R\Lambda} \\ i_{C\Lambda} \end{bmatrix}. \quad (16.11)$$

Здесь знак I означает принадлежность элемента ветвям дерева, а знак Λ – принадлежность элемента ветвям связи.

Матрицы инцидентий сложных электрических цепей являются блочными, что следует из структуры векторов (16.11) [8]:

$$A_f = \begin{bmatrix} 1_{EI} & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ 0 & 1_{CI} & 0 & 0 & F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ 0 & 0 & 1_{RI} & 0 & F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1_{LI} & F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix}. \quad (16.12)$$

В диагональной подматрице (16.12) расположены блоки, соответствующие элементам, включенным в дерево. Блоки, соответствующие элементам, включенным в ветви связи, содержит диагональная подматрица (16.13).

$$B_f = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 1_{j\Lambda} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 & 1_{L\Lambda} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 & 1_{R\Lambda} & 0 \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & 0 & 0 & 0 & 1_{C\Lambda} \end{bmatrix}. \quad (16.13)$$

В каждой из диагональных матриц имеется блок, содержащий элементы, которые не являются типичными для соответствующих ветвей дерева или связей. Подматрицы фундаментальных матриц инцидентий (16.3), (16.4) играют ключевую роль в алгоритме автоматического составления системы уравнений.

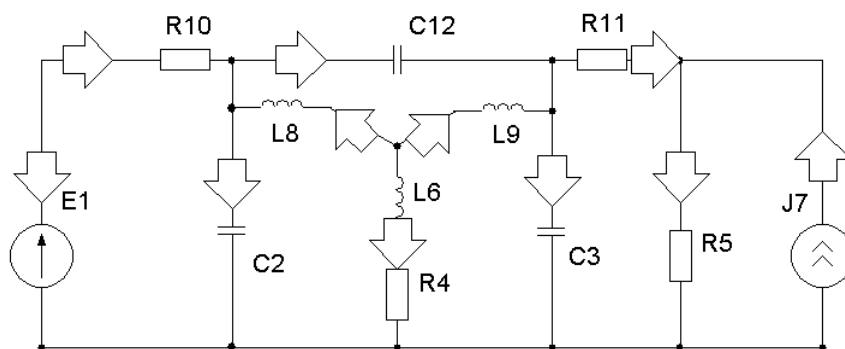


Рис. 16.1. Пример электрической цепи.

Пример. Составим уравнения метода переменных состояния для электрической цепи, рис.16.1, взятой из источника [8]. Выберем дерево в графе рис. 16.1 – (1, 2, 4, 6, 3, 5); ветви дерева обозначены номерами

элементов электрической цепи. Запишем фундаментальную матрицу узловых инциденций:

$$[A_f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Столбцы фундаментальной матрицы соответствуют номерам элементов схемы. Элементы, которые содержатся в ветвях, представлены ниже:

$$\begin{array}{cccccccccccc} E_I & C_I & & R_I & & L_I & J_\Lambda & L_\Lambda & & R_\Lambda & & C_\Lambda \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}.$$

Строки фундаментальной матрицы соответствуют номерам главных сечений, так как ветвь дерева может содержать два последовательно соединенных элемента (4, 6), то сечение по этой ветви проводится дважды. По этой причине 4-я и 6-я строки матрицы идентичны.

Матрица (16.12) содержит блок F , состоящий из более мелких блоков. Запишем их для нашего примера:

$$\begin{aligned} F_{11} &= [0]; F_{12} = [0 \ 0]; F_{13} = [1 \ 0]; F_{14} = [0]; \\ F_{21} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; F_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; F_{23} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; F_{24} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \\ F_{31} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}; F_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; F_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; F_{34} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ F_{41} &= [0]; F_{42} = [1 \ 1]; F_{43} = [0 \ 0]; F_{44} = [0]. \end{aligned}$$

Представим первое уравнение системы (16.1), подготовленное для решения методом численного интегрирования. После окончания работы алгоритма автоматического составления уравнений имеем [8]:

$$M^{(0)} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{CI} \\ i_{L\Lambda} \end{bmatrix} = A^{(0)} \begin{bmatrix} u_{CI} \\ i_{L\Lambda} \end{bmatrix} + B^{(0)} \begin{bmatrix} u_{EI} \\ i_{J\Lambda} \end{bmatrix} + B_1^{(0)} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{EI} \\ i_{L\Lambda} \end{bmatrix}, \quad (16.14)$$

где

$$M^{(0)} = \begin{bmatrix} C_I + F_{24} C_{\Lambda} F_{24}^t & 0 \\ 0 & (L_{\Lambda\Lambda} - F_{42}^t L_{I\Lambda} - L_{\Lambda I} F_{42} + F_{42}^t L_{II} F_{42}) \end{bmatrix};$$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} -F_{23} R^{-1} F_{23}^t & (-F_{22} + F_{23} R^{-1} F_{33}^t R_I F_{32}) \\ (F_{22}^t - F_{32}^t G^{-1} F_{33} G_{\Lambda} F_{23}^t) & -F_{32}^t G^{-1} F_{32} \end{bmatrix};$$

$$B^{(0)} = \begin{bmatrix} -F_{23} R^{-1} F_{13} & (-F_{21} + F_{23} R^{-1} F_{33}^t R_I F_{31}) \\ (F_{12}^t - F_{32}^t G^{-1} F_{33} G_{\Lambda} F_{13}^t) & -F_{32}^t G^{-1} F_{31} \end{bmatrix};$$

$$B_1^{(0)} = \begin{bmatrix} -F_{24} C_{\Lambda} F_{14}^t & 0 \\ 0 & (-F_{42}^t L_{II} F_{41} + L_{\Lambda I} F_{41}) \end{bmatrix}.$$

Уравнение (16.14) приведено в качестве иллюстрации, чтобы было видно, блоки матриц инцидентий и векторов переменных состояния входят в элементы матриц первого уравнения (16.1).

Приведем матрицу $M^{(0)}$ из выражения (16.14), так как известны составляющие блока F :

$$M^{(0)} = \begin{bmatrix} C_I + F_{24} C_{\Lambda} F_{24}^t & 0 \\ 0 & (L_{\Lambda\Lambda} - F_{42}^t L_{I\Lambda} - L_{\Lambda I} F_{42} + F_{42}^t L_{II} F_{42}) \end{bmatrix};$$

В ячейку матрицы $M^{(0)}$ подставлены блоки с индексами 11:

$$C_I + F_{24} C_{\Lambda} F_{24}^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}.$$

В ячейку матрицы $M^{(0)}$ подставлены блоки с индексами 22:

$$(L_{\Lambda\Lambda} - F_{42}^t L_{I\Lambda} - L_{\Lambda I} F_{42} + F_{42}^t L_{II} F_{42}).$$

Значения индуктивностей схемы – $L_8, L_9 = 2$ Гн, $L_6 = 4$ Гн. Кроме того, катушки связаны полем с коэффициентом $M = -1$ Гн. По этой причине отметим, что

$L_{II} = L_6 = 4$ Гн – принадлежит только дереву;

$$L_{\Lambda\Lambda} = \begin{bmatrix} L_8 & M_{89} \\ M_{98} & L_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \text{принадлежит только связям};$$

$$L_{I\Lambda} = \begin{bmatrix} M_{68} & M_{69} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} - \text{влияние дерева на ветви связи};$$

$$L_{\Lambda I} = \begin{bmatrix} M_{86} \\ M_{96} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \text{влияние связей на ветви дерева}.$$

После подстановки этих значений индуктивностей и соответствующих элементов структурированного блока F получается:

$$L_{\Lambda\Lambda} - F_{42}^t L_{I\Lambda} - L_{\Lambda I} F_{42} + F_{42}^t L_{II} F_{42} = \\ = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Итак, матрица $M^{(0)}$ будет иметь вид:

$$M^{(0)} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом получают остальные матрицы системы уравнений (16.14). Изложение процесса формирования матриц первого уравнения системы (16.1) приводится для того, чтобы показать читателю как используется структурная информация электрической цепи. Более подробно это можно проследить по источнику [8].

Следует заметить, что нелинейные электрические цепи линеаризуются на каждом шаге численного интегрирования, другими словами, на шаге интегрирования электрическая цепь линейна. По результатам итерации изменяются также значения управляемых источников энергии. И снова цепь становится линейной. Структура цепи используется при составлении системы уравнений в полной мере. Если до этого мы разделяли ветви по принадлежности к дереву или связи, то из приведенного примера видно, что введено дополнительное разделение ветвей по типу элемента, который она содержит.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение уравнения должно содержать n произвольных постоянных, определяемых с помощью n **начальных условий**. Некоторые авторы считают, что степень сложности задачи во многом определяется числом n – количеством начальных условий [8]. Можно предположить, что каждый элемент множества начальных условий влияет на точность результата интегрирования так же, как и величина шага. В таком случае, возникает погрешность, которая не входит в поле зрения ученых. Начальных условий

много, они взаимно связаны, как и все переменные схемы. Кроме того, в идеале их величины должны соответствовать одному режиму схемы. Но в большинстве случаев найти такие величины не представляется возможным. Вполне резонно задаться вопросом соответствия полученных при расчете значений переменных их реальным величинам, которые в эксперименте существуют на элементах схемы. Как правило, такой вопрос не обсуждается, т.к. существует абсолютное доверие к математике и математическим методам.

Отметим, что баланс токов в узлах или напряжений в контурах не является надежным признаком достоверности полученных результатов. Напомним, что ток ветви связи есть контурный ток, и ошибка в определении одного из них **не нарушит баланса** токов в узлах и напряжений в контурах. Баланс мощностей электрической цепи также **состоится** даже в случае ошибок в определении большого числа контурных токов, и это можно доказать с помощью теоремы Зеляха-Теллегена.

Пример. Проиллюстрируем наши утверждения на материале примера из раздела 3.

В разделе было показано, что матрицы инцидентий являются тензорами. Например, фундаментальная контурная матрица преобразует произвольные значения вектора контурных токов в числа, соответствующие токам ветвей:

$$\bar{I}_k^t B_f = \bar{I}_b^t, \quad B_f^t \bar{I}_k = \bar{I}^b. \quad (16.15)$$

Аналогично действует фундаментальная узловая матрица, преобразовывая произвольные значения вектора узловых потенциалов в числа, соответствующие напряжениям ветвей:

$$\bar{\varphi}_n^t A_f = \bar{U}_b^t, \quad A_f^t \bar{\varphi}_n = \bar{U}^b. \quad (16.16)$$

Применим преобразования (16.15), (16.16) векторам контурных токов и узловых потенциалов электрической цепи рис.3.1, которую повторяем в настоящем разделе, рис.16.2. Покажем получение векторов токов и напряжений ветвей из векторов контурных токов и узловых потенциалов, содержащие произвольные значения. Покажем получение векторов токов и

напряжений ветвей из векторов контурных токов и узловых потенциалов, содержащие произвольные значения. Матрицы инциденций приведены ниже:

$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

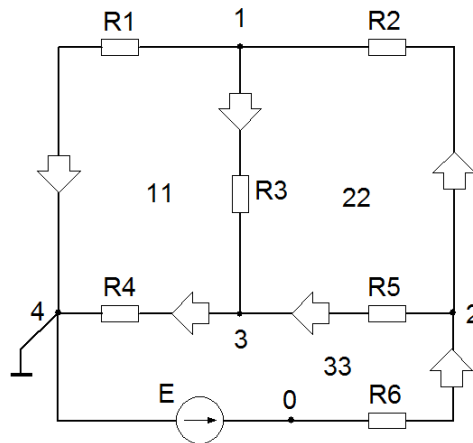


Рис. 16.2. Простая электрическая цепь.

$$B_f^t \bar{I}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}, \quad A_f^t \bar{\varphi}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ -15 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}.$$

Проверка – уравнения узла 1 и контура 11:

$$I_1^b - I_2^b + I_3^b = 0 \Rightarrow 3 - 4 + 1 = 0, \quad U_1^b - U_3^b - U_4^b \Rightarrow 6 + 2 - 8 = 0.$$

Сумма напряжений ветвей в первом контуре равна нулю. Баланс токов в первом узле также выполняется.

Проверим баланс мощностей в электрической цепи рис.16.1, перемножая полученные вектора токов и напряжений ветвей:

$$\bar{U}_b^t \cdot \bar{I}^b = [39 \quad 8 \quad -75 \quad 6 \quad 14 \quad 8] = 0.$$

Баланс мощностей ветвей цепи выполняется.

Запишем уравнение баланса мощностей более подробно

$$\bar{U}_b^t \cdot \bar{I}^b = \bar{\varphi}_n^t A_f \cdot B_f^t \bar{I}_k = 0. \quad (16.17)$$

Структура уравнения баланса мощностей определяется фундаментальными матрицами инцидентий, произведение которых равно нулю:

$$A_f \cdot B_f^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (16.18)$$

Отметим, что баланс токов ветвей в узлах и напряжений ветвей в контурах, а также баланс мощностей выполняются при случайных значениях векторов контурных токов и узловых потенциалов. А это значит, что привычные средства проверки не дают гарантии того, что полученное с помощью компьютерных программ решение соответствует реальности.

Таким образом, заметим, что проблема проверки результатов, полученных с помощью численных методов интегрирования, существует. Ведь в расчетах участвуют величины разной структуры. Числа, получаемые с помощью итераций, обладают структурой используемых формул, а уравнения – структурой графа электрической цепи. Другими словами, результаты являются для уравнений «неестественными», и структура графа преобразует их в числа, соответствующие уравнениям Кирхгофа, не отвечая за их достоверность. Вероятно, надо искать другие алгоритмы проверки достоверности результатов расчета с помощью численных методов. Например, проверять закон Ома на ветвях, содержащих только резисторы. Действительно, ток и напряжения такой ветви вычисляются на любом этапе расчета, поэтому найти сопротивление ветви легко. Найденное значение достаточно сравнить с номиналом этого элементов, чтобы убедиться в том, что полученный результат расчета соответствует физически оправданному.

17. Переменные электрической цепи как понятие

«*Понятие*, как показывает самое название, есть *структура*, получившаяся в результате ... понимания». Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Первые измерения на электрической схеме, представленные широкой публике, были проведены Г. Омом [2]. Электроскоп, который был в распоряжении ученого, фиксировал наличие электричества (потенциала) в узлах исследуемой цепи.

Так как подвижные лепестки прибора отклонялись от стержня при прикосновении измерительного конца к узлу схемы, то это движение напрямую связывали с силой, которая понуждала их к движению. Значения этой силы на концах «проводящего тела», были разными, что позволило Ому сформулировать правило, по которому стали определять направление движения электричества. Разность значений силы в узлах была названа напряжением, что полностью аналогично внутреннему состоянию стержня, к концам которого приложены разные механические силы. Измеряемую величину потом называли потенциалом.

Движение электричества внутри проводящего тела было интуитивно представлено Омом как протекание воды по трубе. Кроме того, по аналогии с гидравлическим сопротивлением, было сформулировано понятие электрического сопротивления, и закон Ома предстал в виде:

$$I = \frac{U}{R} = G \cdot U, \quad (17.1)$$

где все величины обозначены привычными для читателя символами. Более практичной записью закона оказалась его двойственная форма:

$$U = R \cdot I. \quad (17.2)$$

Разделение системы уравнений Кирхгофа на части, образование двух подмножеств ветвей, отличающихся по функции в графе схемы, положило начало процессу различения и сопоставления разделенных частей схемы, а также переменных ветвей. Заметим, что записи закона Ома (17.1), (17.2) имеют много общего, но одновременно отличаются друг от друга. Очевидно, что каждое из выражений можно рассматривать отдельно, т.к. они

представляют один и тот же закон. Итак, перечисленные нами свойства соответствуют отношению двойственности [56].

Рассматривая двойственность как фундаментальное понятие, Г. Гегель считал, что такое разделение имеет смысл:

«Мы, таким образом, удваиваем явление, ломая его надвое: на внутреннее и внешнее, на силу и проявление, на причину и следствие» [57].

Принцип двойственности позволяет рассматривать изучаемый объект теории электрических цепей с двух ракурсов, что дает возможность проверки процесса расчета электрической цепи или преобразований математической модели схемы.

Рассмотрим простой пример [58]. Дан контур, представленный на рис.17.1, который содержит два одинаковых резистора. Источник ЭДС не показан на схеме, но очевидно, что он включен между резисторами. Положительный полюс источника подключен к устранимому узлу, от которого в разные стороны направлены токи I_1 и I_2 . Резисторы считаем линейными, по условию задачи они одинакового номинала. Графическое представление функций напряжения и тока в выбранной системе координат являются прямыми линиями. Их уравнения записаны ниже:

$$u_2 = 1 \cdot u_1, \quad i_2 = -1 \cdot i_1. \quad (17.2)$$

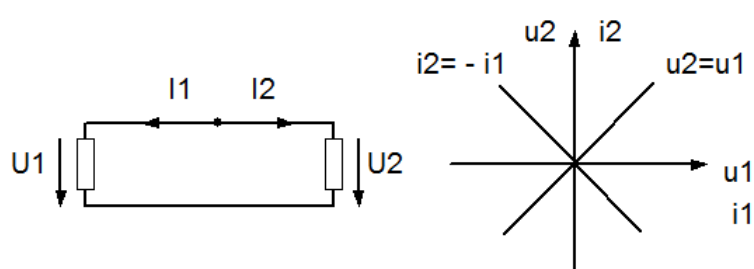


Рис. 17.1. Уравнения напряжения и тока [58].

Как видно из рис.17.1, эти функции (линии) соответствуют переменным, которые считаются двойственными. На основании этого можно сделать вывод, что одним из признаков отношения двойственности является расположение графически представленных функций (17.2) под прямым углом друг другу.

Известно, что уравнения Кирхгофа могут быть записаны только тогда, когда в ветвях графа схемы будут указаны условные направления движения носителей электричества, рис.17.2. На левом графе стрелки в ветвях расставлены произвольно, а на втором графе они расставлены с учетом направлений в ветвях первого, т.е. в противоположном направлении для каждой ветви. Два комплекта условных направлений тока в ветвях графа следует признать двойственными.

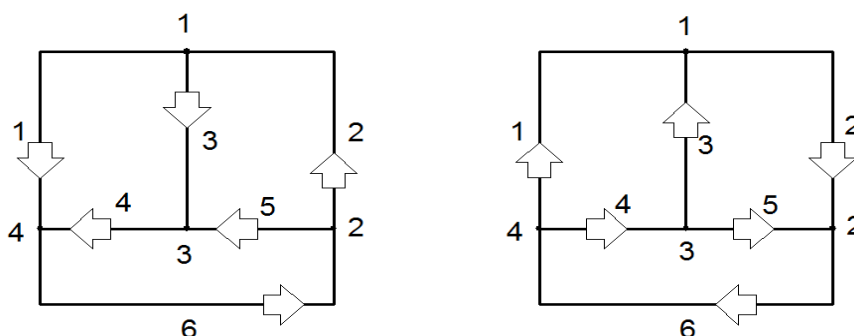


Рис. 17.2. Противоположные ориентации каждой из ветвей графа.

Для каждого из графов рис.17.2 может быть составлена фундаментальная контурная матрица. Выберем дерево графа – (3, 4, 5) и запишем фундаментальную контурную матрицу:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 6 \\
 B_f = & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & & & & & (17.3)
 \end{array}$$

Как видно из матрицы, направление обхода любого контура соответствует направлению тока в конкретной ветви связи – оно считается положительным. Только при таком выборе направления обхода контуров в каждом графе на рис.17.2 получаются фундаментальные матрицы идентичные (17.3).

Итак, ветвь электрической цепи описывается с помощью двух величин – электрическое напряжение и ток. Электрический **ток** понимается как **поток** – перемещение в пространстве и времени некоторых масс, вещества, информации, т.е. как движение вообще. В то же время, электрическое **напряжение** не является **потоком**, напряжением считается нечто, что содержится в растянутой пружине, в маятнике, зависшем в крайней точке

амплитуды, и определяется как потенциальная энергия, напряженность электрического поля, одним словом, некий аристотелевский «неподвижный двигатель».

Сопоставим две фундаментальные матрицы инцидентий – контурную и узловую. Общим для них является граф электрической цепи, а различия матриц состоят в том, что при их построении были выбраны разные элементы графа: контур, узел. В первом случае электрическая цепь представлялась как связная совокупность независимых контуров, а во втором случае – как связная совокупность независимых узлов.

Получается, что матрицы инцидентий также связаны отношением двойственности:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 6 \\
 B_f = & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \Leftrightarrow & A_f = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} & (17.4)
 \end{array}$$

Матрицы (17.4) состоят из блоков:

$$B_f = [K \quad 1], \quad A_f = [1 \quad F]. \quad (17.5)$$

Известно, что их произведение равно нулевой матрице [59]:

$$B_f \cdot A_f^t = 0 \Rightarrow [K \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ F^t \end{bmatrix} = K \cdot 1 + F^t \cdot 1 = 0,$$

откуда получаем:

$$K = -F^t, \text{ или } F = -K^t. \quad (17.6)$$

Блоки матриц (17.5) хорошо выделяются в матричной рамке, поэтому результат преобразования блока F фундаментальной узловой матрицы легко проверить.

Отношение двойственности справедливо для всех идеальных элементов электрической цепи. Двойственными могут быть признаны различные объекты и величины, но нас особо интересуют графы. Получение двойственного графа с помощью известного графического построения

является достаточно громоздким. Рассмотрим алгебраический метод получения двойственного графа, в основе которого лежит двойная матрица инцидентий, введенная в начальных разделах книги, например:

$$K_R = \begin{bmatrix} B_f \\ A_f \end{bmatrix}. \quad (17.7)$$

Матрица (17.7) содержит две матрицы инцидентий, упростим одну из них:

$$K_R^* = \begin{bmatrix} B_f \\ A_f^* \end{bmatrix}. \quad (17.8)$$

Верхним индексом отмечаем матрицу инцидентий, которая была подвергнута упрощению. Точнее, в фундаментальной узловой матрице инцидентий были оставлены только те ячейки, которые соответствуют дереву цепи. Алгоритм получения матрицы инцидентий двойственного графа имеет следующий вид:

$$M_G = \left\{ \left(K_R^* \right)^{-1} \right\}^t. \quad (17.9)$$

Пример.

$$K_R^* = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(K_R^* \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

3 4 5 1 2 6

$$M_G = \left\{ \left(K_R^* \right)^{-1} \right\}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Нижняя подматрица идентична фундаментальной узловой матрице, однако в двойственном графе ее надо трактовать как контурную матрицу.

Преобразование (17.9) можно записать более компактно с использованием символов подматриц:

$$\begin{bmatrix} K & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & F^t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & F \end{bmatrix}. \quad (17.10)$$

Преобразование (17.10) записано по подробным матрицам примера.

На рис.17.3 представлен исходный граф и соответствующий ему двойственный граф, полученный по алгоритму (17.10). Узлы исходного графа 1, 2, 4 соответствуют контурам двойственного графа 11, 22, 44. Направления потоков в ветвях обозначены так, чтобы сохранялись знаки ветвей в узле исходного графа при переходе к двойственному контуру. Например, присваиваем направление ветви связи 3 двойственного графа. Направление этой ветви и ветви 4 исходного графа совпадают с направлением обхода, поэтому в двойственном графе направление ветви 4 такое, как у ветви 3.

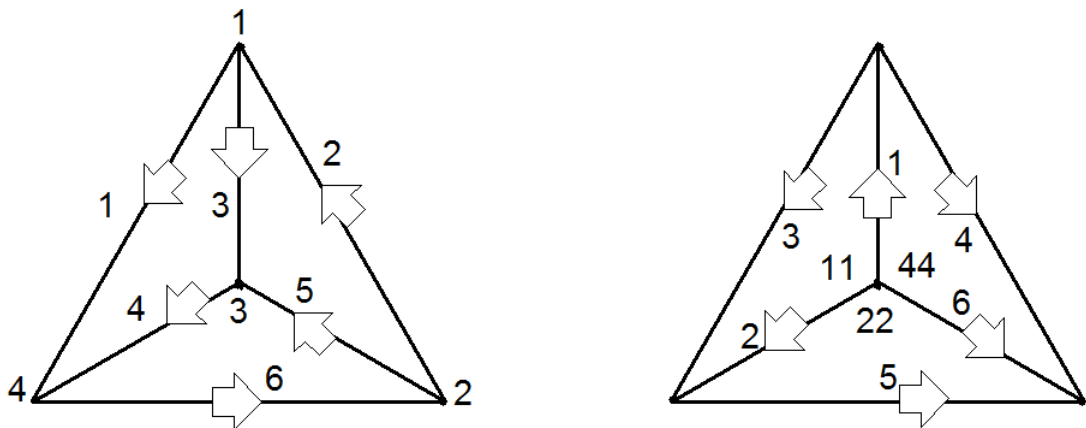


Рис. 17.3. Двойственный граф, соответствующий исходному графу.

Преобразование можно провести по двойственному алгоритму (17.11)

$$M_R = \left\{ \left(K_G^* \right)^{-1} \right\}^t, \quad (17.11)$$

Где

$$K_G^* = \begin{bmatrix} A_f \\ B_f^* \end{bmatrix}.$$

Запишем преобразование в компактной форме:

$$\begin{bmatrix} F & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & K^t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & K \end{bmatrix}. \quad (17.12)$$

Отметим, что матрицы, полученные по формуле (17.10), (17.12) соответствуют графу одинаковой структуры, но с разной нумерацией ветвей, что позволяет найти в них каждому контуру двойственный узел. Это лишнее подтверждает наличие отношения двойственности между матрицами инцидентий.

Преобразованию подвергаются не только матрицы инцидентий и граф, но и отдельные элементы цепи. Покажем на примере, рис.17.4

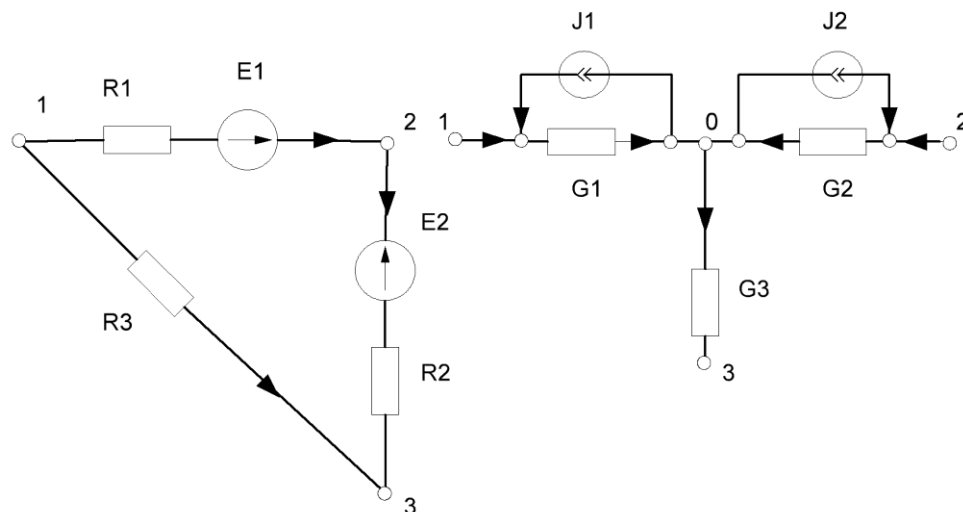


Рис.17.4. Двойственные элементы контура в ветвях соответствующего узла.

В двойственности контура и узла можно убедиться, сравнивая уравнения баланса напряжений и токов:

$$\begin{aligned} -U_1^b - U_2^b + U_3^b = 0 &\Leftrightarrow -I_1^b - I_2^b + I_3^b = 0 \\ -I_1^b R_1 - I_2^b R_2 + I_3^b R_3 = -E_1 + E_2 &\Leftrightarrow -U_1^b G_1 - U_2^b G_2 + U_3^b G_3 = J_1 - J_2 \end{aligned}$$

Очевидно, что контуру сопротивлений с источниками напряжения, рис. 17.4, соответствует узел проводимостей с источниками тока, которые эквивалентны источникам напряжения контура.

Отметим, что, в соответствии с формулой (17.10), приходим к системе уравнений, аналогичных методу контурных токов:

$$N_G = B_f \cdot G_0 \cdot B_f^t, \quad (17.13)$$

где G_0 – диагональная матрица проводимостей ветвей.

Аналогично методу узловых потенциалов получаем по формуле (17.12) следующую систему уравнений:

$$N_R = A_f \cdot R_0 \cdot A_f^t, \quad (17.14)$$

где R_0 – диагональная матрица сопротивлений ветвей.

Пример. Пусть графом схемы электрической цепи будет тот, который расположен слева на рис.17.2. Источник ЭДС включен в ветвь 6 и ориентирован к узлу 2. Параметры электрической цепи следующие:

$$\begin{aligned} R_1 = 10, & \quad G_1 = 0.1, & \quad R_4 = 25, & \quad G_4 = 0.04, \\ R_2 = 15, & \quad G_2 = 0.066666, & \quad R_5 = 30, & \quad G_5 = 0.033333, & \quad E_6 = 10. \\ R_3 = 20, & \quad G_3 = 0.05, & \quad R_6 = 35. & \quad G_6 = 0.028571. \end{aligned}$$

Размерность значений резисторов [Ом], размерность двойственных элементов [Ом⁻¹], источника ЭДС [В].

После подстановки в формулу (17.13) значений элементов получаем:

$$N_G = \begin{bmatrix} 0.19 & -0.05 & -0.04 \\ -0.05 & 0.149999 & -0.033333 \\ -0.04 & -0.033333 & 0.101904 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.285714 \end{bmatrix}.$$

Вектор правых частей системы уравнений содержит значение эквивалентного источника тока. Подстановка значений элементов в формулу (17.14) и выполнение известных действий дает следующий результат:

$$N_R = \begin{bmatrix} 45 & 10 & -15 \\ 10 & 70 & 35 \\ -15 & 35 & 80 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что диагональ матриц параметров в формулах (17.13), (17.14) заполняется в соответствие с номерами столбцов матриц инцидентий.

В результате решения матричных уравнений получаем вектора псевдо-потенциалов и псевдо-контурных токов:

$$\bar{\varphi}_n^* = \begin{bmatrix} -1.06073 \\ -1.15297 \\ -3.59726 \end{bmatrix}, \quad \bar{I}_k^* = \begin{bmatrix} 0.167563 \\ -0.3136 \\ 0.29362 \end{bmatrix}.$$

С помощью транспонированных матриц инцидентий получаем значения псевдо-напряжений и псевдо-токов ветвей:

$$\bar{U}_b^* = \begin{bmatrix} -0.09224 & 3 \\ -2.53653 & 4 \\ -2.44429 & 5 \\ -1.06073 & 1 \\ -1.15297 & 2 \\ -3.59726 & 6 \end{bmatrix}, \quad \bar{I}_b^* = \begin{bmatrix} 0.167563 & 3 \\ -0.3136 & 4 \\ 0.29362 & 5 \\ -0.14604 & 1 \\ 0.126057 & 2 \\ 0.019985 & 6 \end{bmatrix}.$$

Произведение этих векторов показывает, что баланс мощностей выполняется:

$$(\bar{U}_b^*)^t \cdot \bar{I}_b^* = -1.38778 \cdot 10^{-17}.$$

В завершение раздела обсудим контурный ток как переменную электрической цепи. С первым использованием этой физической величины в расчетах связано имя Максвелла. Ученый не смог предложить удовлетворительную формулировку для контурного тока, поэтому считал его удобной расчетной величиной. Интерес к этой величине возобновился в связи с подробной разработкой метода переменных состояния. Интересно, что контурный ток и узловые потенциалы можно противопоставить переменным метода описания электрической цепи, который заложен в программы автоматического анализа схем

Составление уравнений метода переменных состояния начинается с выбора дерева схемы замещения:

«...при выборе дерева графа необходимо учитывать, что топологические уравнения цепи (10.20) позволяют выразить токи ветвей дерева через токи **главных ветвей**, а напряжения **главных ветвей** - через напряжения ветвей дерева [60]».

При ближайшем рассмотрении оказалось, что главными ветвями являются ветви связи, замыкание которых образуют контура в дереве графа. Если есть **главные ветви**, то почему не определены **главные узлы**? На эту роль претендуют узлы, к которым подсоединяются ветви связи. Когда связь подсоединяют к соответствующим узлам дерева, устанавливается путь для тока и этот ток следует называть контурным. И даже тот факт, что этот ток вполне может протекать через индуктивность, расположенную в этой ветви, не может отменить названия контурный.

Расположение индуктивностей и источников тока (всех видов) в ветвях связи обеспечивает начальное значение контурного тока в контурах, образуемых при замыкании узлов дерева соответствующей ветвью связи. А включение емкостей и источников напряжения (всех видов) в ветви дерева – гарантирует начальное значение потенциалов узлам дерева. Вот поэтому узлы подключения ветвей связи претендуют на название главных. Именно токи главных ветвей и потенциалы главных узлов являются независимыми переменными и их можно задавать произвольно.

Сегодня, когда численные методы используются для нахождения значений переменных электрической цепи, своевременно напомнить, что ток – это понятие, а не только число и его величина. Перечислим разновидности понятия: а) ток ветви, б) ток элемента, в) входной (выходной) ток и, наконец, г) контурный ток. Тоже можно сказать и о напряжении, которое является не только числом, но и понятием. Как понятие оно может выступать в виде: а) напряжения ветви, б) напряжения элемента, в) входного (выходного) напряжения и г) потенциала узла. Думать мы умеем только на понятийном уровне, который сопряжен с образным мышлением. Конечно, без численных значений трудно доказать справедливость анализа цепи, но думать человек может только на уровне понятий и образов. Нельзя замыкаться в числовых значениях исследуемых переменных.

18. Переменные состояния

«... *теория* не может быть никогда чем-то абсолютно законченным, пока не закончилась сама *история*, рождающая ... эту *теорию*». Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Глава 8 известной книги по машинному анализу электронных схем посвящена уравнениям переменных состояния [8]. Начинается она с утверждения, что узловые уравнения достаточно простой электрической цепи рис.18.1 являются интегро-дифференциальными (18.1).

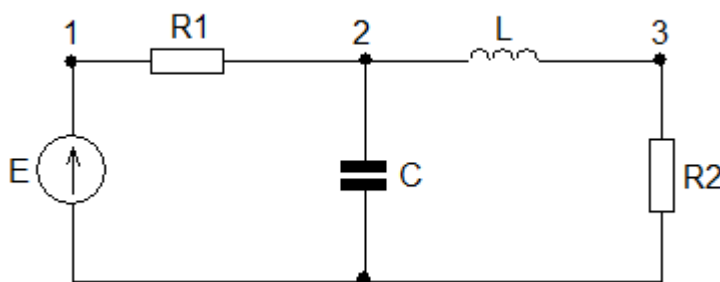


Рис. 18.1. Простейшая электрическая цепь.

Например, интегро-дифференциальное уравнение Кирхгофа для узла 2 имеет следующий вид:

$$i_{R1} - i_C - i_L = 0 \Rightarrow \frac{E - u_C}{R_1} - C \frac{du_C}{dt} - \frac{1}{L} \int_0^t u_L d\tau = 0, \quad (18.1)$$

где $u_C(t)$ – напряжение на емкости,

$u_L(t)$ – напряжение на индуктивности.

Операция интегрирования затрудняет решение уравнения (18.1), поэтому преобразуем его таким образом, чтобы оно стало дифференциальным:

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{1}{R_1 C} u_C + \frac{1}{R_1 C} E.$$

Отметим, что полученное уравнение содержит переменные реактивных элементов электрической цепи рис.1. Именно эти переменные принято считать переменными состояниями.

Для составления системы дифференциальных уравнений необходимо, чтобы в схеме имелось определенное количество реактивных элементов. Никто не старался определить их число, но, вероятно, на практике такие случаи встречались, когда электрическая схема не содержала необходимого числа реактивных элементов. Достаточно внимательно прочитать цитату из книги [8], чтобы понять это:

«В любой схеме с сосредоточенными параметрами имеют место три основных типа уравнений: ... для **каждого узла**, ... **каждого контура** и уравнения вольт-амперной характеристики для **каждого из элементов** Если с их помощью удастся получить систему линейно независимых дифференциальных уравнений первого порядка, то говорят, что для данной схемы существует **уравнение переменных состояния в нормальной форме**:

$$x' = f(x, t), \quad (18.2)$$

где x – набор из n независимых **вспомогательных** переменных».

Полную систему уравнений метода переменных состояния принято записывать следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} &= C\bar{x} + D\bar{u}' \end{aligned} \quad (18.3)$$

где \bar{x}' – вектор производных переменных состояния;

\bar{u} – вектор независимых источников;

\bar{y} – вектор вспомогательных переменных цепи.

До начала процесса интегрирования реактивные элементы могут обладать определенным запасом энергии. Покажем это на примере напряжения конденсатора (18.4), где первое слагаемое представляет его начальное значение:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) \cdot d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_C(\tau) \cdot d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) \cdot d\tau. \quad (18.4)$$

Конечно, величина первого слагаемого может быть записана кратко, как начальное условие для напряжения конденсатора – $u_C(0)$.

Из выражения (18.4) следует, что для определения реальной величины напряжения на конденсаторе в момент времени t важно точно знать его начальное значение. К сожалению, следует заметить, что значения начальных условий не всегда удастся определить точно или хотя бы приблизительно. Именно по этой причине количество начальных условий схемы автор цитируемой книги считает индексом сложности расчета [8].

В предыдущем разделе книги был описан (в общих чертах) процесс построения системы уравнений переменных состояния и требования к выбору дерева схемы. Основные требования этого алгоритма для схемы рис.18.1 будут выполнены, если ветви, содержащие элементы E, C, R_2 , включить в дерево, а ветви, содержащие элементы R_1, L , считать связям. При таком выборе дерева напряжение на конденсаторе C определяет напряжение (потенциал) узла 2, а ток в индуктивности L соответствует одному из контурных токов цепи.

Отметим, что контурные токи связаны с токами ветвей уравнением (18.5), где матрица инцидентий действует как тензор, т.е. совершает простое преобразование вектора токов:

$$\bar{I}_b = [B_f]^t \bar{I}_c, \quad (18.5)$$

где \bar{I}_b – вектор токов ветвей.

Двойственное уравнение (18.6) связывает напряжения (потенциалы) узлов и напряжения ветвей, где матрица инцидентий действует также как тензор, т.е. совершает простое преобразование вектора напряжений:

$$\bar{U}_b = [A_f]^t \bar{\varphi}_n, \quad (18.6)$$

где \bar{U}_b – вектор напряжений ветвей.

Контурный ток, как вспомогательную величину, ввел Максвелл, чтобы облегчить расчет переменных электрической цепи. Но уже в источнике [8], контурный ток был определен как независимая переменная, а в учебнике [60] – как ток, протекающий по ветвям, которые были названы главными. Другими словами, авторы этих книг предполагали, что значения элементов

вектора контурных токов можно назначать независимо от определенных обстоятельств.

В статье [61] показано, что значения элементов вектора контурных токов можно назначать произвольно. Интересно, что при этом, расчет токов ветвей по формуле (18.5) даст величины, отвечающие первому закону Кирхгофа. Аналогичными свойствами обладают и вектора узловых напряжений (потенциалов), значения элементов которых были назначены произвольно. Расчет значений напряжений ветвей по формуле (18.6) даст величины, отвечающие второму закону Кирхгофа.

Вероятно, свойства контурных токов и узловых напряжений (потенциалов) могут быть перенесены на переменные состояния, так как:

1. В графе электрической цепи переменным состояниям соответствуют ветви дерева и связей. **Независимым переменным схемы ($\bar{I}_c, \bar{\varphi}_n$) теория электрических цепей отводит те же ветви графа.**
2. По значениям переменных состояния вычисляются величины остальных переменных цепи (18.3). **По значениям независимых переменных ($\bar{I}_c, \bar{\varphi}_n$) определяются величины напряжений и токов ветвей (18.5), (18.6).**

Начальные условия, отражающие запас энергии реактивных элементов до начала процесса интегрирования, изображаются на схеме как дополнительные источники напряжения или тока, рис.18.2.

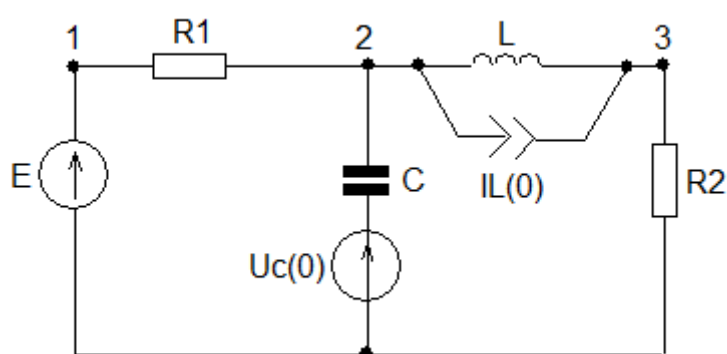


Рис. 18.2. Фиксация начальных условий реактивных элементов.

Как видно из рис.18.2, начальное ток добавляется к току индуктивности, а начальное напряжение – к напряжению конденсатора. Если величины

начальных условий определены с погрешностью, то она становится погрешностью переменных состояния. Трудно предположить, что в процессе итераций погрешность начальных условий будет сведена к нулю.

При назначении начальных условий произвольным образом погрешность будет, строго говоря, неизвестной, но нельзя исключать того, что она будет очень большой. Вполне возможно, что переменные состояния, определенные таким образом, будут выглядеть как назначенные произвольно. Естественно, что даже в такой ситуации второе уравнение системы (18.3) даст значения остальных переменных, соответствующие законам Кирхгофа. Кроме того, уравнения мощностей будут также соблюдать баланс, так как вектора напряжений и токов ветвей соответствуют одной и той же структуре электрической цепи [13], [15].

Математики, использующие в своих исследованиях численные методы интегрирования, согласны с тем, что результаты расчета получаются с погрешностью. Приведем цитату из лекции для студентов-математиков [62]:

Существуют четыре источника погрешности результата:

1) *погрешность математической модели* – связана с ее несоответствием физической реальности, так как абсолютная истина недостижима. Если математическая модель выбрана недостаточно тщательно, то, какие бы методы мы не применяли для расчета, все результаты будут недостаточно надежны, а в некоторых случаях и совершенно неправильны.

2) *погрешность исходных данных*, принятых для расчета. Это *неустраняемая погрешность*, но это погрешность возможно и необходимо оценить для выбора алгоритма расчета и точности вычислений. Как известно, ошибки эксперимента условно делят на – систематические, случайные и грубые, а идентификация таких ошибок возможно при статистическом анализе результатов эксперимента.

3) *погрешность метода* – основана на дискретном характере любого численного алгоритма. Это значит, что вместо точного решения исходной задачи метод находит решение другой задачи, близкого в каком-то смысле (например, по норме банахова пространства) к искомому. Погрешность метода – основная характеристика любого численного алгоритма. Погрешность метода должна быть в 2-5 раз меньше неустраняемой погрешности.

4) *погрешность округления* – связана с использованием в вычислительных машинах чисел с конечной точностью представления.

Погрешность результата расчета, которая вызвана произвольным заданием начальных условий, соответствует второму пункту перечисления ошибок численного интегрирования и определяется как неустранимая.

Существование неустранимой погрешности в результате расчета сводит на нет усилия по выводу уравнения погрешностей конкретного метода численного интегрирования с установленным шагом и конечной оценкой допустимого округления [63]. Погрешности в определении величин переменных состояния отражаются в погрешностях токов и напряжений ветвей, где безусловное выполнение законов Кирхгофа делает эту ошибку «невидимой». Советуют, что погрешность можно идентифицировать при статистическом анализе данных, получение которых возможно только при многократных расчетах с вариацией величин начальных условий. Реализовать это, чаще всего, нет никакой возможности.

Верификация результатов возможна только по чисто резистивным ветвям, токи и напряжения которых (как и других ветвей) определяются в процессе расчета. Применяя закон Ома, мы можем определить сопротивление резистора и сравнить полученное значение с его номиналом в схеме замещения. Максвелл был бы очень рад тому, что именно уравнение Ома позволяет произвести проверку результатов расчета, т.к. считал это соотношение фундаментальным.

В виде альтернативы можно предложить расчет начальных условий на упрощенной модели электрической цепи. Ее следует получать из схемы замещения реальной электрической схемы. Как надо упрощать модель электрической цепи должны решать специалисты, но все должны понимать, что максимальное сохранение структуры графа модели является гарантией успеха. Это условие противоречит необходимости радикального упрощения, поэтому никаких общих рецептов дать невозможно.

Покажем на примере модели транзистора вариант радикального упрощения, рис.18.3.

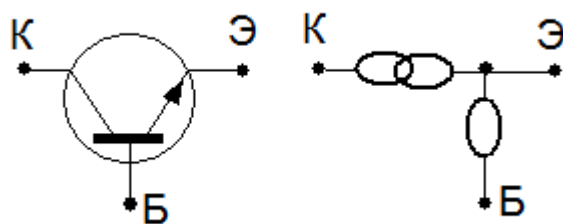


Рис.18.3. Радикально упрощенная модель транзистора.

Сопротивление базы транзистора, как правило, небольшое, значение которого можно устремить к нулю и представить идеальным элементом нуллатором. Сопротивление коллектора транзистора, как правило, довольно большое, значение которого можно устремить в бесконечность и представить идеальным элементом норатором. Модель транзистора радикально упростится, что допустимо при оценочных расчетах. Конечно, данное направление требует своего детального развития, но даже из приведенного примера видно, что полученную упрощенную модель следует описывать с помощью метода узловых потенциалов. Кроме того, следует отметить, что каждая индуктивность должна быть соединена последовательно с резистором, а индуктивность – параллельно с резистором. Для электронных схем определение начальных условий эквивалентно расчету схемы по постоянному току.

Конечно, в результате расчета упрощенной модели получаются приближенные значения величин начальных условий. Однако частичное сохранение структуры гарантирует то, что приближенные значения не будут случайными величинами для расчета основной модели электрической цепи.

19. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ПРИ РАСЧЕТЕ

«Мышление создает смысловой **скелет вещи**;
понимание исходит из вещи, которая
на своем скелете несет также и **живое тело**».
Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Теория структурных чисел [28] не пользуется особой популярностью у отечественных специалистов, однако следует признать, что именно она наиболее полно использует понятие структуры электрической цепи в алгоритмах расчета. Отметим, что основные понятия теории структурных чисел не вызывают споров, но для сложного графа их получить трудно. По этой причине развитие теории структурных чисел замедлилось, и интерес научной общественности к ней ослаб.

Однако некоторые результаты теории, продолжают удивлять специалистов тем, что они «работают почти правильно», но этому не существует удовлетворительного объяснения.

Рассмотрим пункт 3 приложения 2 источника [28], стр.294. Здесь приведен анализ двух электрических цепей, в каждой из которых сначала определяется структурное выражение для тока конкретной ветви. Формулу для структуры конкретного тока предлагается получать из выражения:

$$I_k = \frac{E}{\det_Y A} \sum_{i=1}^p \det_Y \left(\prod_{i=1}^{wt} [\alpha_{ii}] \prod_{r=1}^{v-wt} [P_{tr}] \right). \quad (19.1)$$

Приведем расшифровку основных символов приведенной выше формулы:

I_k - величина тока ветви k;

E - источник напряжения;

A – структурное число цепи;

α_{ii} - ветви элементарного контура t;

P_{tr} - структурное число узлов, не входящих в контур.

Подробно объяснять все символы, как это сделано в книге, не будем, так как это не способствует пониманию самой формулы. Заметим, что авторы сделали полную расшифровку символов (с предельной скрупулёзностью).

Это заняло 14 строк, но оказалось, что одной расшифровки символов недостаточно.

После 14-ти строк расшифровки следуют довольно объемные дополнения и уточнения, что занимает большую часть страницы. Несмотря на эти усилия, не удалось добиться необходимого понимания содержания заявленного **«метода контуров»**. Поясним применение формулы (19.1) на примере.

Пример. Применение формулы (19.1) показано на двух примерах. Рассмотрим первый из них – **D2-3**, рис.19.1 [28].

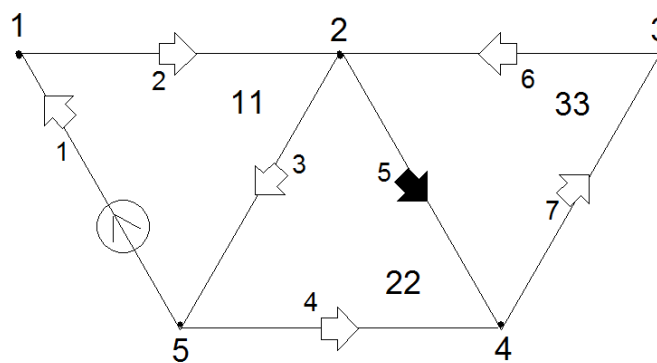


Рис. 19.1. Граф простой схемы.

Граф имеет 4-ре независимых узла, 7-мь ветвей, а число независимых контуров равно 3-м.

Для построения структурного выражения тока I_5 выбран контур максимального размера 1, 2, 4, 5, в который одновременно входят ветви, содержащие как искомый ток, так и источник напряжения. Структурное число этого контура авторы находят, суммируя схемные множества двух контуров

$$(1, 2, 3) + (3, 4, 5) = (1, 2, 4, 5).$$

Эту операцию можно провести в привычном формате контурных уравнений:

$$+ \begin{cases} R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_1 \\ -R_3 I_3 - R_4 I_4 + R_5 I_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_4 I_4 + R_5 I_5 = E_1.$$

Очевидно, что полученное уравнение обладает структурой, которая найдена выше с помощью операции структурного суммирования.

Выражение для искомого тока записывается по формуле (19.2), которая является реализацией выражения (19.1) [28]:

$$I_5 = \frac{E_1}{\det_y A} y_1 y_2 y_4 y_5 (y_6 + y_7), \quad (19.2)$$

где $\det_y A$ – определитель цепи, полученный из структурного числа A , в котором символы структуры заменены проводимостями ветвей.

$y_1 y_2 y_4 y_5 (y_6 + y_7)$ – произведение проводимостей ветвей контура и одного из узловых схемных множеств цепи.

По поводу этого сомножителя в источнике сказано следующее:

«... где контур, составленный из ветвей 1, 2, 4, 5 не содержит узла графа, которому инцидентны ветви 6 и 7».

Интересно, что элементы структуры (без каких-либо объяснений) авторами заменяются величинам, алгебра которых отличается от той, что использовалась выше при определении контура 1, 2, 4, 5.

Запишем выражения для структур токов в ветвях 3, 5, 7:

$$I_3 = E \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (6+7)(4+5+7)}{(1+2)(2+3+5+6)(6+7)(4+5+7)}, \quad (19.3)$$

$$I_5 = E \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (6+7)}{(1+2) \cdot (2+3+5+6) \cdot (6+7) \cdot (4+5+7)}, \quad (19.4)$$

$$I_7 = E \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}{(1+2)(2+3+5+6)(6+7)(4+5+7)}. \quad (19.5)$$

Граф электрической цепи рис.19.1 позволяет выбрать следующую систему контуров – (1, 2, 3), (1,2,4,5), (1, 2, 4, 6, 7). При таком выборе контуров ветви 1, 2, 4, 6 будут принадлежать дереву графа, а ветви 3, 5, 7 – связям.

Тогда токи (19.3), (19.4), (19.5) можно считать контурными. После подстановки параметров электрической цепи в числители структурных выражений, а в знаменатели – значения определителей цепи, получим некоторые величины, которые будем трактовать как величины соответствующих токов. Возникает необходимость сравнить эти значения с результатом расчета электрической цепи традиционным методом. Найдем значения этих токов методом контурных токов.

Пример. Для графа рис.19.1 зададим параметры ветвей. Отдельно запишем значение источника ЭДС.

	1	2	3	4	5	6	7
Ом.	10	5	2,5	2	6,666	4	2,222
Ом ⁻¹	0,1	0,2	0,4	0,5	0,15	0,25	0,45

ЭДС источника напряжения – $E = 10$ В.

Система уравнений в численном виде, составленная методом контурных токов, будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 17,5 & 15 & 15 \\ 15 & 23,666 & 17 \\ 15 & 17 & 23,222 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Значения контурных токов в амперах определяем из этой системы уравнений:

$$\bar{I}_{kk} = \begin{bmatrix} 0.405081 \\ 0.093693 \\ 0.100379 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I_3 = 0.405081 \\ I_5 = 0.093693 \\ I_7 = -0.100379 \end{matrix}.$$

Определим величины остальных ветвей электрической цепи рис.19.1:

$$I_4 = I_7 - I_5 = -0.100379 - 0.093693 = -0.194072;$$

$$I_1 = I_3 - I_4 = 0.405081 + 0.194072 = 0.599153;$$

$$I_2 = I_1 = 0.599153;$$

$$I_6 = I_7 = -0.100379.$$

Найдем напряжение ветви 5 по закону Ома:

$$U_5 = R_5 I_5 = 0.624557 \text{ В}.$$

Проверим, насколько оправданы прямые подстановки значений параметров ветвей в формулу (19.3), которые произведены в источнике [28]. После подстановки значений параметров в числитель формулы (19.3) получаем:

$$E \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (6 + 7) = 10 \cdot (0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.15) (0.25 + 0.45) = 0.01050.$$

Значение знаменателя находим из матрицы проводимостей, составленной по методу узловых потенциалов:

$$\det_Y \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 & 0 & 0 \\ -0.2 & 1.0 & -0.25 & -0.15 \\ 0 & -0.25 & 0.7 & -0.45 \\ 0 & -0.15 & -0.45 & 1.1 \end{bmatrix} = 0.112075.$$

В результате численное значение выбранного тока получаем в процессе деления:

$$I_5 = \frac{0.01050}{0.112075} = 0.093693 \text{ A.}$$

Сравнивая полученное значение с эталонной величиной, делаем вывод о том, что прямые подстановки параметров в числитель формулы, аналогичной (19.3), не искажают результат.

Числитель формул (19.3), (19.4), (19.5) представляет собой интересную конструкцию, в которой видное место занимает произведение ветвей, образующих контур. Эту часть числителя следует рассмотреть отдельно для того, чтобы выяснить ее физическое содержание.

Начнем с рассмотрения структуры определителя графа цепи, которую запишем, с помощью операционных форм узловых схемных множеств [5]:

$$\det_Y A = (1+2) \times (2+3+5+6) \times (6+7) \times (4+5+7). \quad (19.6)$$

Узловые множества ветвей являются элементами графа, которые перемножаются для получения структуры определитель графа (цепи).

В формуле (19.6) используются традиционные знаки алгебраических операций, чтобы не вводить и не объяснять новых операций. Суть операций понятна и остается только привести правила структурной алгебры:

$$a \oplus a = \emptyset, \quad a \otimes a = \emptyset.$$

Под символами a можно понимать как одинаковые ветви, так и одинаковые комбинации ветвей. Знак суммирования, введенный в уравнение (19.6), позволяет освободиться от тождественных сочетаний ветвей, которые возникают в процессе реализации декартового умножения. По аналогии с определителем (19.6) именно **произведение ветвей контура**, которые являются его элементами, будем считать его определителем.

Используем это понятие при анализе формул (19.3), (19.4), (19.5). Начнем с формулы (19.2), взятой из источника [28]. Запишем формулу (19.1) для тока ветви 5, рис.19.1, и доведем ее до вида (19.4):

$$I_5 = E \frac{[\det_Y M^{km} (1+2+4+5)] \cdot [M_n (6+7)]}{\det_Y A} = \quad (19.7)$$

$$= E \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (6+7)}{(1+2) \cdot (2+3+5+6) \cdot (6+7) \cdot (4+5+7)}.$$

Произведем определенные упрощения формулы (19.7), удаляя из числителя и знаменателя одинаковые сомножители:

$$I_5^* = E \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5}{(1+2) \cdot (2+3+5+6) \cdot (4+5+7)} = E \cdot \Phi_{1245}. \quad (19.7^*)$$

Отметим, что в формуле (19.7*) в виде сомножителя можно выделить соотношение определителей. Знаменатель дроби является определителем упрощенного графа, из которого удален узел (6, 7). В то же самое время, числитель – определителем контура. Соотношение определителей теория цепей рассматривает как схемную функцию. Структура формулы (19.7*) аналогична уравнению Ома:

$$I = U \cdot G,$$

где проводимость G обладает структурой Φ_{1245} , задаваемой графом схемы.

Другими словами, электрическая цепь представляется двухполюсником [65]:

$$I_k = E_k \frac{D_{kk}}{D},$$

где D – определитель матрицы системы уравнений цепи;

D_{kk} – соответствующее алгебраическое дополнение.

Структура схемной функции выражения (19.7) записана ниже:

$$\Phi_{1245} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5}{(1+2) \cdot (2+3+5+6) \cdot (4+5+7)}.$$

Числитель формулы (19.4), (18.7) можно получить из определителя графа, упрощая его по Фойснеру [26].

Приведем уравнение, которое является фундаментальным для этого метода преобразования:

$$N = w_a N_a + N_{a'}, \quad (19.8)$$

где N - определитель матрицы системы уравнений;

N_a - определитель матрицы, из которой удалена ветвь a ,

$N_{a'}$ - определитель, в котором узлы ветви a замкнуты, т.е. $w_a = 0$.

Определитель матрицы может быть записан в виде структурного числа, элементы которого отражают структуру его слагаемых. Тогда обе части формулы (19.8) могут быть получены в процессе алгебраического дифференцирования структурного числа графа. Покажем это на примере.

Пример. Ниже приведено узловое структурное число графа электрической цепи (19.6), рис.19.1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 6 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}. \quad (19.9)$$

Продифференцируем алгебраически выражение (19.9) по индексу ветви 1:

$$N_a = N_1 = \frac{dA}{d1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}. \quad (19.10)$$

Выражение (19.10) соответствует одному из слагаемых формулы (19.8). Операцию можно понимать так, как это делает Фойснер, утверждая, что ветвь 1 была **вынесена** из первой части структурного числа (19.9) – N_1 . Часть структурного числа $N_{1'}$, которая не содержит ветви 1 – аргумента дифференцирования – остается неизменной при выполнении операции (19.10) и ее легко выделить из выражения (19.9). Естественно, что остается возможность возвращения аргумента дифференцирования в виде множителя – $1 \cdot N_1$.

Запишем формулу (19.8), используя выражения (19.10), (19.9):

$$A = 1 \times \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}. \quad (19.11)$$

Таким образом, операцию **выноса ветви** из выражения определителя можно осуществить, выполняя формальную процедуру алгебраического дифференцирования структурного числа схемы.

Воспользуемся более сложной формулой преобразования определителя, когда удаляются одновременно две ветви [26]:

$$N = w_a w_b N_{ab} + w_a N_{ab'} + w_b N_{a'b} + N_{a'b'}. \quad (19.12)$$

Уравнение (19.12) можно получить, повторяя процедуру алгебраического дифференцирования выражения (19.11) по аргументу 2:

$$A = 1 \times 2 \times \begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix} + 1 \times \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}. \quad (19.13)$$

Если выполнить алгебраические операции, записанные в выражениях (19.11), (19.13), то мы получим структурное число (19.9).

Вынесем индексы ветвей 1, 2, 3 из выражения определителя графа электрической цепи (19.6):

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 (\det_{\gamma} A) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (0+0) \times (0+0+5+6) \times (6+7) \times (4+5+7) = \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (6+7) \times (4+5+7). \end{aligned} \quad (19.14)$$

Из результата (19.14) видно, что после **выноса** индексов ветвей из записи определителя графа электрической цепи (19.6) мы получили числитель формулы (19.3). Таким образом, найден формальный способ получения выражений для числителей формул, аналогичных (19.3), (19.4), (19.5).

Пример. Подставим значения параметров ветвей и источника в формулы (19.3), (19.4), (19.5). Значение знаменателя этих формул найден выше из матрицы проводимостей, составленной по методу узловых потенциалов:

$$\det_Y A = 0.112075.$$

Начнем с формулы первого контура (19.3):

$$\begin{aligned} I_{33} &= E \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (6+7)(4+5+7)}{(1+2)(2+3+5+6)(6+7)(4+5+7)} = \\ &= 10 \cdot \frac{0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,4 \cdot (0,25 + 0,45) \cdot (0,5 + 0,15 + 0,45)}{0,112075} = 0,549631A. \end{aligned} \quad (19.15)$$

Подставим параметры ветвей и источника в формулу (19.4):

$$\begin{aligned} I_{55} &= E \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (6+7)}{(1+2) \cdot (2+3+5+6) \cdot (6+7) \cdot (4+5+7)} = \\ &= 10 \cdot \frac{0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,5 \cdot 0,15 \cdot (0,25 + 0,45)}{0,112075} = 0.093687A. \end{aligned} \quad (19.16)$$

Завершим подстановкой параметров в формулу (19.5):

$$\begin{aligned} I_{77} &= E \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}{(1+2)(2+3+5+6)(6+7)(4+5+7)} = \\ &= 10 \cdot \frac{0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,45}{0,112075} = 0.100379A. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Контурные токи найдены, остается определить токи ветвей дерева.

Составим фундаментальную контурную матрицу электрической цепи рис.1.

$$B_f = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \end{matrix}. \quad (19.18)$$

Вектор значений токов ветвей определяется по следующей формуле:

$$\left[B_f \right]^t \bar{I}_{kk} = \bar{I}_b. \quad (19.19)$$

Результаты расчета по формуле внесены во второй столбец таблицы 1.

Таблица 1

№ ветви	Обычный расчет	Подстановка в числитель	Подстановка в числитель/знаменатель
3	0,405081	0,549631	2,379355
5	0,093693	0,093687	0,405571
7	-0,10038	-0,10038	-0,43454
1	0,599153	0,74369	3,219468
2	0,599153	0,74369	3,219468
4	-0,19407	-0,19407	-0,84011
6	-0,10038	-0,10038	-0,43454

Распространим прямую подстановку значений проводимостей на выражение определителя (19.2), которое повторяем ниже:

$$\det_y A = (1+2) \times (2+3+5+6) \times (6+7) \times (4+5+7).$$

После подстановки значений проводимостей ветвей получаем:

$$\Delta_y = (0.1+0.2)(0.2+0.4+0.15+0.25)(0.25+0.45)(0.5+0.15+0.45) = 0.231.$$

Пересчитаем значения ветвей 3, 5, 7 с учетом новой величины определителя знаменателя их выражений:

$$I_3 = \frac{0.0616}{0.231} = 0.266666A,$$

$$I_5 = \frac{0.01050}{0.231} = 0.045454A,$$

$$I_7 = \frac{0.009}{0.231} = 0.038961A.$$

Значения токов, представленные выше, можно считать контурными. Токи ветвей дерева получаем по формуле (19) и заносим все результаты в **третий столбец таблицы 1.**

Покажем, что значение напряжения на резисторе 5 можно найти с помощью формулы, аналогичной (19.3). В основу такой формулы положим контурные схемные множества. Если в первом случае выбран максимальный контур цепи, то во втором случае – максимальный путь, объединяющий ветвь с источником тока $J=1$ А и ветвь 5, напряжение которой определяем в данный момент. Запишем формулу двойственную (19.3):

$$U_5 = J \frac{[\det_z L^{nm} (1+3+5)] \cdot [L_k (6+7)]}{\det_z A} = \quad (19.20)$$

$$= 1 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (6+7)}{(1+2+3)(3+4+5)(5+6+7)} = \frac{1036.8963}{1660.207} = 0.624558V.$$

В формуле введены обозначения:

$\det_z L^{nm} (1+3+5)$ – определитель выбранного пути;

$L_k (6+7)$ – множество ветвей, не охваченных выбранным путем;

$\det_z A$ – структура определителя цепи на основе контурных схемных множеств. Параметры элементов электрической цепи приведены в примере.

Числитель двойственной формулы найдем по методу Фойснера:

$$N = (0+2+0)(0+4+0)(0+6+7) \Rightarrow 1 \cdot 3 \cdot 5(6+7).$$

Рассмотрим пример **D2- 4** [28], рис.19.2. В графе выбраны два контура, каждый из которых содержит как ветвь искомого тока, так и четыре источника

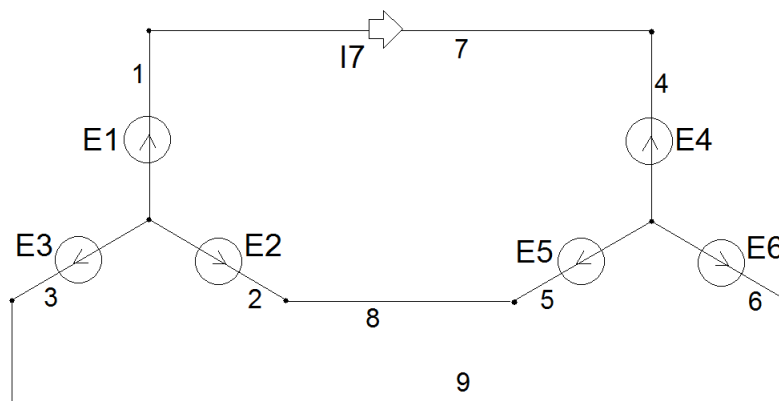


Рис. 19.3. Граф схемы примера D2- 4.

Обозначим эти контура структурно:

$$M_1^{km} (1+2+4+5+7+8), \quad M_2^{km} (1+3+4+6+7+9).$$

Заметим, что при выборе первого контура мы не охватываем узловое схемное множество (3, 9) со стороны источников E_1, E_2 и узловое множество (6, 9) со стороны источников E_4, E_5 . Второй контур не охватывает узловое схемное множество (2, 8) со стороны источников E_1, E_3 , а также узловое схемное множество (5, 8) со стороны источников E_4, E_6 .

Запишем формулу для определения величины тока седьмой ветви так, как это делали авторы [28]:

$$I_7 = \frac{(E_1 + E_5 - E_2 - E_4) [\det_Y M_1^{km} (1+2+4+5+7+8)] [(3+9)(6+9)]}{\det_Y A} + \frac{(E_1 + E_6 - E_3 - E_4) [\det_Y M_2^{km} (1+3+4+6+7+9)] [(2+8)(5+8)]}{\det_Y A}. \quad (19.10)$$

Найдем структуры числителей по предложенной методике, изложенной в статье. Приведем структуру определителя «плавающей» матрицы цепи, рис.19.3, где включены все схемные множества [64]:

$$N^0 = (1+7) \cdot (1+2+3) \cdot (4+7) \cdot (4+5+6) \cdot (2+8) \cdot (5+8) \cdot (3+9) \cdot (6+9) = \emptyset.$$

Находим первое слагаемое разложения этого определителя схемы по Фойснеру для каждого из контуров:

$$N_{124578} = 124578(3+9)(6+9),$$

$$N_{134679} = 134679(2+8)(5+8).$$

После получения структур определителей формула (10) несколько упрощается:

$$I_7 = \frac{(E_1 + E_5 - E_2 - E_4) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8) (3 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 6 \cdot 9)}{\det_Y A} + \frac{(E_1 + E_6 - E_3 - E_4) (1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9) (2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 5 \cdot 8)}{\det_Y A}. \quad (19.11)$$

Для получения численного значения I_7 остается задаться параметрами схемы и подставить их в формулу (19.11), что оставляем читателю. Заметим, что значение определителя цепи легче получить из матрицы проводимостей, составленной по методу узловых потенциалов.

Итак, если необходимо найти структурные выражения для токов схемы, то надо использовать выражение определителя графа цепи через операционные формы узловых схемных множеств (19.2), которое будет расположено в знаменателе формулы (19.3). Числитель формулы получаем после алгебраического дифференцирования выражения (19.2) по символам ветвей максимального контура, содержащего источник напряжения и ветвь искомого тока.

Однако при расчете напряжения некоторой ветви следует определить максимальный путь от ветви с источником тока до ветви, напряжение которой рассчитываем. Используем выражение структуры определителя графа цепи, полученного с помощью операционных форм контурных схемных множеств. Это выражение является знаменателем формулы (19.9). Числитель формулы получаем после алгебраического дифференцирования выражения знаменателя по символам ветвей максимального пути, содержащего источник тока и ветвь искомого напряжения.

Из формул (19.3), (19.11) могут быть выделены схемные функции в виде соотношения структур определителей. Числители этих отношений найдены по упрощенной методике, описанной выше. Сами эти формулы аналогичны уравнению закона Ома по структуре. Например, формулу (19.3) можно записать следующим образом:

$$I_5 = EY_S, \quad (19.12)$$

где Y_S – проекция соотношения структур определителей на множество параметров цепи.

Структура формулы (19.3*) аналогична закону Ома:

$$U_5 = JZ_S, \quad (19.13)$$

где Z_S – проекция соотношения структур определителей на множество параметров цепи.

Соотношение определителей в формулах (19.12), (19.13) выступает в роли коэффициента распределения энергии источника в цепи, обусловленного структурой. Численное значение коэффициента для каждой

ветви будет индивидуальным. Особо отметим, что для определения тока (напряжения) одной ветви нет необходимости решать систему уравнений электрической цепи.

Следует отметить, что структурный подход к получению формулы тока или напряжения ветви опирается на основные законы теории электрических цепей. Кроме того, обратим внимание на то, что граф, которым описывается схема соединений элементов в цепь, имеет одни и те же свойства, как для линейных, так и для нелинейных электрических цепей [66]. Таким образом, получение структуры для тока /напряжения не зависит от типа схемы.

В структурных формулах легко выделить схемные функции в виде отношения структур определителей. В числителе это определитель контура (пути), в знаменателе – определитель графа электрической цепи. Для получения числителя структурных формул достаточно знать выражение определителя цепи в виде произведения операционных форм схемных множеств. Для получения приближенного значения определителя возможна подстановка параметров цепи непосредственно в элементы схемных множеств.

20. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

«...структура ...есть резкая **выявленность внутреннего содержания**, когда **положенным** и утвержденным **оказывается каждый** мельчайший **момент** этого **содержания**».

Лосев А.Ф. «Хаос и структура».

Матрицы соответствий контур-ветвь, узел-ветвь, получившие в теории иностранное название матриц инцидентий, являются алгебраической формой записи направленного графа цепи, т.е. отображают структуру схемы. Эти простые математические объекты часто используются сугубо формально, без попыток физического осмысления, и это успешно превращает теорию электрических цепей в специальный раздел математики.

Возвращаясь к графическому образу, следует отметить, что одним из главных объектов при моделировании электрических схем является дерево графа. Число деревьев у конкретной цепи зависит от количества узлов и ветвей. Даже у схемы моста Уитстона, граф которой содержит всего четыре узла и шесть ветвей, деревьев насчитывается шестнадцать. Каждое из них содержит все узлы графа схемы и несколько ветвей, не образующих ни одного контура. Таким образом, с позиций топологии все деревья являются равноправными объектами. Выберем одно из них, например, то, которое представлено на рис.20.1.

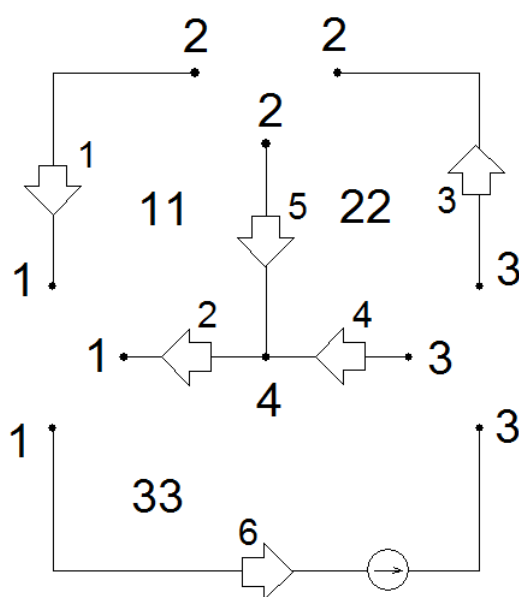


Рис. 20.1. Одно из деревьев графа моста Уитстона и его связи.

Из рис.20.1 видно, что ветви 2, 4, 5 принадлежат выбранному дереву графа, а ветви 1, 3, 6 являются связям. После присоединения одной из них к соответствующим узлам дерева образуется замкнутый путь и при наличии в контуре источников по нему протечет ток. После подсоединения к дереву всех ветвей-связей эти токи считаются контурными [65]:

$$I_{11} = I_1, \quad I_{22} = I_3, \quad I_{33} = I_6.$$

Дерево графа лежит в основе любых алгоритмов составления уравнений электрической цепи. Этот факт сам по себе указывает на то, что структура графа служит основой математического описания схемы.

Контурные токи считаются независимыми величинами, которые определяют режим всей схемы [60], [65]. По значениям контурных токов рассчитывают величины токов ветвей:

$$[B]^t \cdot \bar{I}_{kk} = \bar{I}_b.$$

Заметим, что токи ветвей связи могут быть также определены по значениям напряжений (потенциалов) соответствующих узлов:

$$I_{11} = I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_1}, \quad I_{22} = I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_3}, \quad I_{33} = I_6 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_6}{R_6}.$$

Из выше приведенных соотношений следует, что, если контурные токи являются независимыми переменными, то и узловые напряжения (потенциалы) также независимые величины.

В книге было показано, что контурные токи и узловые напряжения (потенциалы) являются независимыми величинами, их можно назначать даже произвольно. С помощью формальной процедуры вектор значений независимых величин преобразуются в токи или напряжения ветвей. Отметим, что полученные переменные ветвей всегда будут отвечать законам Кирхгофа, т.к. в виде тензора преобразования выступают транспонированные матрицы инцидентий.

Ошибки, полученные при вычислении независимых величин, влекут за собой погрешности при определении переменных ветвей и их невозможно заметить сразу, т.к. баланс мощностей ветвей, также будет выполняться. Проверка результатов расчета возможна только на резистивных ветвях с

помощью закона Ома. Если величина сопротивления, полученная при делении численных значений напряжения и тока этой ветви, совпадает с номиналом элемента ветви, то это значит, что расчет переменных ветвей был правильным.

При составлении системы уравнений метода переменных состояния стремятся выбрать такое дерево схемы, в ветвях которого можно было бы разместить все емкостные элементы. Начальный заряд этих элементов формирует потенциалы узлов дерева. С другой стороны, все токи индуктивностей, размещенных в ветвях связи, будут исполнять роль контурных токов. Конечно, идеальное расположение реактивных элементов удастся только в исключительных случаях, поэтому некоторое количество реактивных элементов будет располагаться в ветвях, не предназначенных для этого.

Начальные условия, соответствующие запасу энергии реактивных элементов до начала процесса интегрирования, желательно определять отдельно, на структуре исследуемой схемы. Однако это, как правило, не делается. Начальные значения, чаще всего, задаются интуитивно, т.е. с неизвестными погрешностями.

После начала процесса интегрирования ошибки в определении начальных условий становятся погрешностями переменных состояния. Трудно предположить, что в процессе итераций эти погрешности исчезают, а, следовательно, возникает проблема верификации полученных результатов расчета.

Подчеркнем, что результат расчета, полученный в числовой форме, отражает структуру электрической цепи, но раскрыть ее нелегко, однако считаться с ней необходимо.

Чтобы сократить время вспомогательного расчета можно допустить упрощение графа схемы, ограничиваясь его частью. Схемы замещения активных элементов также можно упрощать, как показано в книге. Конечно, философы и математики считают, что эти усилия тщетны

«Целое стремится выразиться в убывающих частях и не может, и части стремятся стать целым и не могут» [67].

но численные значения, полученные на упрощенной структуре, не будут случайными для математической модели электрической схемы.

Как показано в последних разделах книги, есть много способов выявить структуру искомым переменных. Особый интерес представляет определение структуры неизвестной величины по графу схемы. Отметим, что это возможно как для линейных, так и для нелинейных схем. Таким образом, возникает возможность общего метода решения. В процессе подстановки параметров ветвей, нелинейный элемент представляется функцией.

Литература

1. Петров В.В. Известие о Гальвани-Вольтовских опытах (1803).// В кн. Избранные труды по электричеству. – М.: Гос. Изд. Техничко-теоретической лит, 1956. – 11 – 94 стр.
2. Ohm G.S. Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. – Т.Н. Riemann: Berlin, 1827. – 247s.
3. Кирхгоф Г. О прохождении электрического тока через плоскую пластину, например, круглой формы // Избранные труды. Г. Кирхгоф. – М.: Наука, 1988. – с. 155 – 166.
4. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов // Избранные труды. Г. Кирхгоф. – М.: Наука, 1988. – с. 170 – 178.
5. Максимович Н.Г. Методы топологического анализа электрических цепей. – Львов: Изд. Львов. Универ., 1970. – 258с.
6. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. – 778с.
7. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей / Учебник для ВУЗов. – М. : Энергия, 1975. – 752 с.
8. Чуа Л.О., Лин П.М. Машинный анализ электронных схем. – М.: Энергия, 1980. – 640с.
9. Stern T.E. On the equation of Nonlinear Networks/ T.E. Stern// IEEE Transaction on Circuit Theory. – 1966. – vol. CT-13, №1, pp. 74 – 81.
10. P. Penfield, R. Spence, S. Duinker A Generalized Form of Tellegen`s Theorem // IEEE Transact. on circuit Theory, v. CT-17, №3, 1970, p.302-305.
11. Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме./ В двух томах. Т. 1 . – М.: Наука, 1989. – 416с.
12. Кирхгоф Г. О применимости формул для силы гальванического тока в системе линейных проводников к системе, частично состоящей из нелинейных проводников // Избранные труды. Г. Кирхгоф. – М.: Наука, 1988. – с.178 – 189.
13. Зелях Э.В. Основы общей теории линейных электрических схем. – М.: Изд. АН СССР, 1951. – 334с.
14. Кулаков Ю.И. Теория физических структур.- Новосибирск: Изд-во «Альфа Виста», 2004. – 851с.

15. Tellegen B.D.H. A general network theorem, with applications// Philips Res. Rept., vol.7, pp. 259 – 269, August 1952.
16. P. Penfield, R. Spence, S. Duinker Tellegen's Theorem and Electrical Networks. – Mass.: M/I/T/ Press, 1970. – 160 p.
17. Teorema di Tellegen: wikipedia it./
[https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema di Tellegen](https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Tellegen)
18. Ерохов И.В. О теореме Зеляха / Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Междунар. сб. науч. тр./ Под ред. В.В.Филаретова.- Ульяновск: УлГТУ, 2012. – Вып.10. – с.259-262
19. Пенфилд П., Спенс Р., Дюинкер С. Энергетическая теория электрических цепей. – М.: Энергия, 1974г. -152с.
20. Ерохов И.В. Главная теорема общей теории цепей. – Запорожье, 2011. – 88с.
21. Ерохов И.В. Реконструкция первого топологического метода расчета, созданного Г.Кирхгофом. / Труды международной конференции «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике – КЛИН – 2006». – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Том 3. – с. 76 – 83.
22. Ahrens W. Ueber das Gleichungssystem einer Kirchhoff'schen galvanischen Stromverzweigung.// Math. Ann. 49, 1897, p.311 – 324.
23. Трохименко Я.К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. – М.: «Советское радио», 1972. – 310с.
24. Fleming M.A. Problems on the Distribution of Electric Currents in Networks of Conductors treated by the Method of Maxwell. / Phil. Mag. (5s.) 20, 1885. – p.221 – 258
[//https://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/serial?id=philosmag](https://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/serial?id=philosmag)
25. Элементарные преобразования матрицы.
[https://ru.wikipedia.org/wiki/Элементарные преобразования матрицы](https://ru.wikipedia.org/wiki/Элементарные_преобразования_матрицы)
26. Feussner W. Ueber Stromverzeigung in netzförmigen Leitern. // Annalen der Physik und Chemie, Band 9, Leipzig 1902, s.1304 – 1329.
27. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstärke in netzförmigen Leitern. // Annalen der Physik und Chemie, Band 15, Leipzig 1904, s.385 – 394.
28. Bellert S. Woźniacki H. Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. – Warszawa : Wydaw. Naukowo-techniczne, 1968. – 306.

29. Ерохов И.В. Машинное моделирование и анализ радиоэлектронных цепей на основе ветвящихся цепных дробей. / Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, 1982. – Одесса: ОЭИС. – 175с.
30. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970. – 400с.
31. Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112с.
32. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 312с.
33. Шатихин Л.Г. Структурные матрицы и их применение для исследования систем. – М.: Машиностроение, 1974. – 248с.
34. Хрестоматия по истории математики. //Пособие для студентов физ.-мат. фак., под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976. – 318с.
35. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
36. Ерохов И.В. Алгоритм решения линейной системы уравнений, размерность которой последовательно увеличивается.// В сб. Автоматизация проектирования в электронике. – Киев: Техника, 1981, вып. 24. – 23 – 30.
37. Cauer W. Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. – Berlin: Akademie Verlag, 1954. – 586 s.
38. Обобщенные числа Фибоначчи. – <http://www.goldenmuseum.com/>
39. Ерохов И.В. Теоретико-множественное обоснование топологического метода, созданного Г.Кирхгофом //Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Междунар. сб. науч. тр./Под ред. В.В.Филаретова.- Ульяновск: УлГТУ, 2011. – Вып.9. – с.56-63.
40. Магнусон В., Харрис Д., Бейсак С. Топологические индексы, основанные на симметрии окрестностей: химические и биохимические применения./ Химические приложения топологии и теории графов: Пер. с англ./ Под ред. Р.Кинга. – М.: Мир, 1987. – с.206 – 221.
41. Меррифилд Р., Симмонс Х. Топология конечного точечного множества и молекулярная структура./ Химические приложения топологии и теории графов: Пер. с англ./ Под ред. Р.Кинга. – М.: Мир, 1987. – с.11 – 27.

42. Руврэ Д. Следует ли заниматься разработкой топологических индексов?/ Химические приложения топологии и теории графов: Пер. с англ./ Под ред. Р.Кинга. – М.: Мир, 1987. – с.183 – 205.
43. Баласубраманиан К. Симметрия и спектры графов. Их применение в химии./ Химические приложения топологии и теории графов: Пер. с англ./ Под ред. Р.Кинга. – М.: Мир, 1987. – с.278 – 287.
44. Balasubramanian K. Spectra of Chemical Trees./ Int. J. Quantum Chem., v.21,1982. – p. 581 – 590.
45. Godsil C.D., McKay B.D. A new graph product and its spectrum. / Bull. Austral. Math. Soc., v.18, 1978. – p. 21-28 .
46. Тринайстич Н. Теория Хюккеля и топология./ В кн. Полуэмпирические методы расчета электронной структуры. Под ред. Дж. Сигал. – М.: Изд. «Мир», 1980. – 328с.
47. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов. Теория и применение. – Киев: Наукова думка, 1984. – 384 с.
48. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 455с.
49. Стретт Дж. В. Теория звука. /В 2-х томах, том 1. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 504с.
50. Heaviside O. Electrical Papers /in two volumes, vol. 1. – London, New York: Macmillan and Co., 1892. – 590 p.
51. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: В 2-х т. Учебник для вузов, Том 1. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 536с.
52. Билибин Н. Учебник алгебры /для гимназий и реальных училищ. – С.-Петербург: Изд. Билибина И.И., 1905. – 502с.
53. Thiele T.N. Interpolationsrechnung. – Leipzig: Teubner B.G., 1909. – 175 s.
54. Hildebrand F.B. Introduction to Numerical Analysis. /Second Edition. – N.Y.: McGraw-Hill Book company, 1974. – 669 p.
55. Метод конечных разностей./Электронная публикация./Википедия. – https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_конечных_разностей
56. Попков В.В. Двойственность. – www.bogdinst.ru/works/int.htm/
57. Труфанов С.Н. «Наука логики» Гегеля. – Самара: «Парус», - 1999. – 192с.
58. Wagner Paul-Jürgen Der Satz von Tellegen. Ursprung, traditionelle und neuere Anwendungen / 9825610, 1.8.2004.
59. Ерохов И.В. Принцип двойственности и теория электрических цепей./ www.bogdinst.ru/works/erohov 2014. pdf.

60. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высш. шк., 2000. – 575 с.
61. Ерохов И.В. Об операторах Кирхгофа, введенных Пенфилдом./ Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Междунар. сб. науч. тр. - Вып.14 / Под ред. В.В.Филаретова.-Ульяновск: УлГТУ, 2017. – с.6-13.
62. Лекция для студентов./https://studopedia.ru/4_33684_leksiya--tochnost-vichisleniy-klassifikatsiya-pogreshnostey.html
63. Лозинский С.М. Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений./Известия ВУЗов, Математика, 1958, №5, с.52-90.
64. Величко Ю.Т. Анализ напряжений, токов и мощностей в линейном многополюснике. / Известия ВУЗов – Радиоэлектроника, 1969 т.12, №8. – с.767-786.
65. Шимони К. Теоретическая электротехника. М.: Мир. 1964. -773 с.
66. Ерохов И.В. Уточнение понятия структуры графа электрической цепи./ Труды международной «Конференции по логике, информатике, науковедению – КЛИН – 2007». – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Том 3. – с. 85 - 90.
67. Лосев А.Ф. Хаос и структура. – М.: Мысль, 1997. – 831с.

Ерохов Игорь Васильевич (12.08.1939-11.05.2021)



Игорь Васильевич – к.т.н., Ph.D.,
ученый и преподаватель по призванию.

За 35 лет педагогического стажа он обучил тысячи студентов. Занимался научной деятельностью до последних дней жизни.

Эту книгу он закончил 1 мая 2021 за 10 дней до своей смерти.

Умер в ясном сознании на руках у любящей жены 11 мая 2021.

В заключение оригинального текста я приведу 2 статьи из изданий, в которых Игорь Васильевич был постоянным автором в 2000-е годы.

1. В.В. Фролов, К 80-летию Ерохова И.В., сборник «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» Ульяновского государственного технического университета

Игорю Васильевичу Ерохову – постоянному автору сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» – исполнилось 80 лет. О его вкладе в теоретическую электротехнику можно судить по приложенному списку основных работ.

Игорь Васильевич родился 12 августа 1939 года в г. Кривой Рог (УССР). После восьми классов средней школы родного города завершил получение среднего образования в г. Днепропетровске.

В 1961 году окончил Днепропетровский Metallургический институт по профессии «Автоматизация металлургического оборудования». Первое место работы – Запорожский филиал института автоматики Госплана УССР, младший научный сотрудник. Затем была работа в Запорожском филиале КБ Электроприборостроения. Год провел в командировке в Харьковской ведущей организации в теоретическом комплексе – осваивал автоматические системы ракет и спутников.

С 1970 года И. В. Ерохов занимался машинным проектированием, а затем разрабатывал охранную сигнализацию, у которой сейсмический сигнал был основным. Защитил проект первой стадии управления ракетными войсками. Оформил карточку ВПК и проект совместного решения на заказ разгонного

блока, который выводит спутник на стационарную орбиту. В 1980 году перешел на кафедру электротехники Запорожского Индустриального института, затем работал в Приватном Классическом Университете на кафедре Информатики и электроники.

Игорь Васильевич пять лет на пенсии, но продолжает работать над статьями для нашего сборника, активно их дорабатывает и заочно участвует в обсуждениях по различным вопросам. За многие десятилетия своей научной работы он приобрел уникальную квалификацию по основаниям теоретической электротехники и истории открытий.

Список литературы

1. Ерохов И.В., Тесленко В.П. Анализ электрических схем при помощи структурных матриц // Теоретическая электротехника. – Львов, 1972.– Вып.14.
2. Ерохов И.В., Тесленко В.П. Структурный анализ алгебраической модели электрической цепи // Электроника и моделирование.– Киев, 1975.– Вып.7.
3. Ерохов И.В. Возможность применения аппарата цепных ветвящихся дробей для электротехнических расчетов // Теоретическая электротехника.– Львов, 1977.– Вып. 24.
4. Ерохов И.В. Уравнение, аналогичное первому правилу Г.Кирхгофа для цепи произвольного размера//Прикладная электротехника.–Киев,1981.
5. Ерохов И.В. Представление внешней проводимости произвольной схемы, аналогичное форме Кауэра // ТУИС «Обработка информации в системах связи».– Л.: ЛЭИС, 1981.
6. Ерохов И.В. Алгоритм решения линейной системы уравнений, размерность которой последовательно увеличивается // Автоматизация проектирования в электронике.– Киев, 1981.– Вып. 24.
7. Ерохов И.В. Машинное моделирование и анализ радиоэлектронных цепей на основе ветвящихся цепных дробей // Автореф. дис. канд. техн. наук.– Одесса: ОЭИС, 1982.– 23 с.
8. Ерохов И.В. Кирхгоф Г. Избранные труды // Электричество, 1990, №7.– С. 91–92.

9. Ерохов И.В. Реконструкция первого топологического метода расчета, созданного Г.Кирхгофом // Тр. международ. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике».–Ульяновск: УлГТУ,2006.–Т. 3. – С. 76–83.
10. Ерохов И.В. Уточнение понятия структуры графа электрической цепи // Тр. международ. конф. по логике, информатике, науковедению – КЛИН–2007». – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 85–90.
11. Ерохов И.В. Новый подход к созданию топологического метода анализа электрических цепей // Тр. международной конф. по логике, информатике, науковедению».– Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3.– С.76–84.
12. Ерохов И.В., Филаретов В.В. Теорема Зеляха-Теллегена // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2008.– Вып. 6.– С. 6–14.
13. Ерохов И.В. Исследования начал теории электрических цепей.– Запорожье: КПУ, 2008.– 100 с.
14. Ерохов И.В. О приближенном моделировании сложных электрических схем // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ.сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2008.– Вып. 6.– С.88–97.
15. Ерохов И.В., Арбузников В.А. Элизар Вольфович Зелях (21.04.1904–03.02.1991) // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ.сб.науч.тр.–Ульяновск:УлГТУ,2008.–Вып.6.–С.88–97.
16. Ерохов И.В. Уравнение разомкнутого пути электрической цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Междунар. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2009.– Вып.7.– С. 87–93.
17. Исследование начал теории электрических цепей: монография / Ерохов И.В. // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Междунар.сб.науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2009.– Вып. 7.– С. 329.
18. Ерохов И.В. Величко Юрий Теофанович // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2010.– Вып.8.– С. 212.

19. Ерохов И.В., Филаретов В.В. Бернард Теллеген: Гиратор, нулор, теорема виртуального баланса // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2010. – Вып. 8.– С. 212.
20. Ерохов И.В. Теоретико-множественное обоснование топологического метода, созданного Г.Кирхгофом // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2011.– Вып. 9.– С. 236.
21. Ерохов И.В. Экономия слов – традиция научных статей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2011.– Вып. 9.– С. 236.
22. Ерохов И.В. Главная теорема общей теории цепей.– Запорожье: КПУ, 2011.– 89 с.
23. Ерохов И.В. Схема соединений есть граф электрической цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2012. – Вып. 10.– С. 280.
24. Ерохов И.В. Граф множества разомкнутых путей одна из форм схемы соединений // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С. 280.
25. Ерохов И.В. О теореме Зеляха // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2012. – Вып. 10.– С. 280.
26. Ерохов И.В. О системе уравнений Кирхгофа для электрической цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2013.– Вып. 11.– С. 69–79.
27. Ерохов И.В. Подробный анализ первой работы по теории электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2013.–Вып.11.–С. 273–290.
28. Ерохов И.В. Вычисление знака алгебраического дополнения элемента матрицы // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2015.–Вып.12.– С.189–193.

29. Ерохов И.В. Двойственность и дуальность электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2015.– Вып. 12.– С. 262–272.
30. Ерохов И.В. Простой способ получения фундаментальной контурной матрицы инцидентий // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2015. – Вып. 12.– С. 284–294.
31. Ерохов И.В. Школа-семинар по теоретической электротехнике и электронике // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск:УлГТУ,2015.– Вып. 12.– С.316–320.
32. Ерохов И.В. Метод Гаусса и решение систем уравнений с помощью цепных дробей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016.– Вып. 13.– С. 224–232.
33. Ерохов И.В. К преобразованию n-звезды проводимостей в эквивалентный полный n-угольник // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016. – Вып.13.– С. 216–223.
34. Ерохов И.В. Критические замечания к работам Габриэля Крона // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016.– Вып. 13.– С. 202–210.
35. Ерохов И.В. Об операторах Кирхгофа, введенных Пенфилдом // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып. 14.– С. 6–13.
36. Ерохов И.В. Теорема взаимности в творчестве Г. Кирхгофа // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып.14.– С. 233–239.
37. Ерохов И.В. Первые законы теории электрических цепей: 190-я годовщина монографии Георга Ома // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2018.– Вып. 15.– С. 211–221.
38. Ерохов И.В. Уравнения, отражающие структуру электрической цепи: 170-я годовщина первого топологического метода // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2018.– Вып. 15.– С. 222–234.

39. Ерохов И.В. Создание схемы электрического баланса // In memoriam: Василий Андреевич Андреев / Сборник памяти Андреева В.А. – Ульяновск: УлГТУ, 2018.– С. 153–165.

2. Страница автора на сайте «Академия Тринитаризма»

Ерохов Игорь Васильевич

Кандидат технических наук, профессор, г. Запорожье

Родился 12 августа 1939 году в г. Кривой Рог Днепропетровской области

Образование: Днепропетровский металлургический институт, 1961 г.
Инженер-механик.

Ученая степень и звание: Закончил заочную аспирантуру ОЭИС им. А.С. Попова защитой диссертации «Машинное моделирование и анализ радиоэлектронных цепей на основе ветвящихся цепных дробей» (1982 г.), получил диплом в 1983 году, специальность 05.12.17 – Радиотехнические устройства и системы. Звание доцента получил в 1988 году (по кафедре электротехники).

Производственная, преподавательская и научная деятельность:

После окончания ВУЗа работал в Запорожском филиале Института автоматизации Госплана УССР, в Филиале КБ «Электроприборостроения».

В 1980 году прошел по конкурсу на кафедру «Электротехники» Запорожского Индустриального института, старший преподаватель. С 1983 года и.о. доцента, доцент, заведующий кафедрой. В настоящее время – доцент Классического Приватного Университета, кафедра Электроники и информатики.

Научное направление: Общая теория электрических цепей. Являясь учеником проф. Зеляха Э.В., продолжаю развивать его направление в науке.

Основываясь только на законах теории электрических цепей, выделил объект, который в математике называется ветвящейся цепной дробью. Был признан математиками г. Львова, которые открыли ветвящуюся дробь как обобщение простой цепной дроби (В.Я. Скоробогатько).

Опубликованные и упоминаемые в нашем издании работы Автора

1. Принципиально важные этапы в развитии теории электрических цепей
2. Эйдетическая логика и прикладные науки
3. Численные коэффициенты размерностей физических величин
4. Симметрия объекта, представляющего ряд Фибоначчи

5. Система физических величин Роберта Ороса ди Бартини
6. Преобразования числового ряда Фибоначчи
7. Темы для серьезной дискуссии нет
8. Физическая трактовка «ЗОЛОТОЙ КОНСТАНТЫ»
9. В поисках смысла замечательного числа
10. Получение размерностей физических величин по Р.О.Бартини, электрические величины
11. Фрактал – новое название известного свойства?
12. «Золотые» условия равновесия сил на мембране живой клетки
13. Получение структур схемных функций

Ссылка на страницу автора: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/1025-00.htm#list>

Контакты

По всем вопросам относительно этой книги просьба обращаться к Елене Игоревне Ероховой по адресу erokhova.mob@yandex.ru