

Способ получения эйлеровых параллелепипедов на основе значений котангенса пифагоровых троек

Аннотация. Найден не формульный способ получения значений сторон «производного» эйлерова параллелепипеда на основе значений «родительского» эйлерова параллелепипеда. Для этого в фигуре выделяется три треугольника с целочисленными значениями сторон. Далее – из полученных треугольников посредством подбора значения их котангенса – определяются пифагоровы тройки. Эти тройки заносятся в таблицу. Приемом перекрестной расстановки в таблице двух значений (из трех) пифагоровых троек (посредством описанного алгоритма математических операций) вычисляются значения трех сторон «производного» эйлерова параллелепипеда.

Ключевые слова: эйлеров параллелепипед, способ получения эйлерова параллелепипеда, пифагорова тройка, котангенс пифагорова треугольника.

Введение. Известно, что прямоугольный параллелепипед у которого целочисленны только рёбра и диагонали граней называется эйлеровым. Самый маленький из эйлеровых параллелепипедов – 240, 117, 44 – был найден Паулем Хальке в 1719 году [1] (рисунок). Кроме параллелепипеда Пауля Хальке найдено еще четыре эйлеровых параллелепипеда до значения ребер не более 1000 (рисунок) [1].

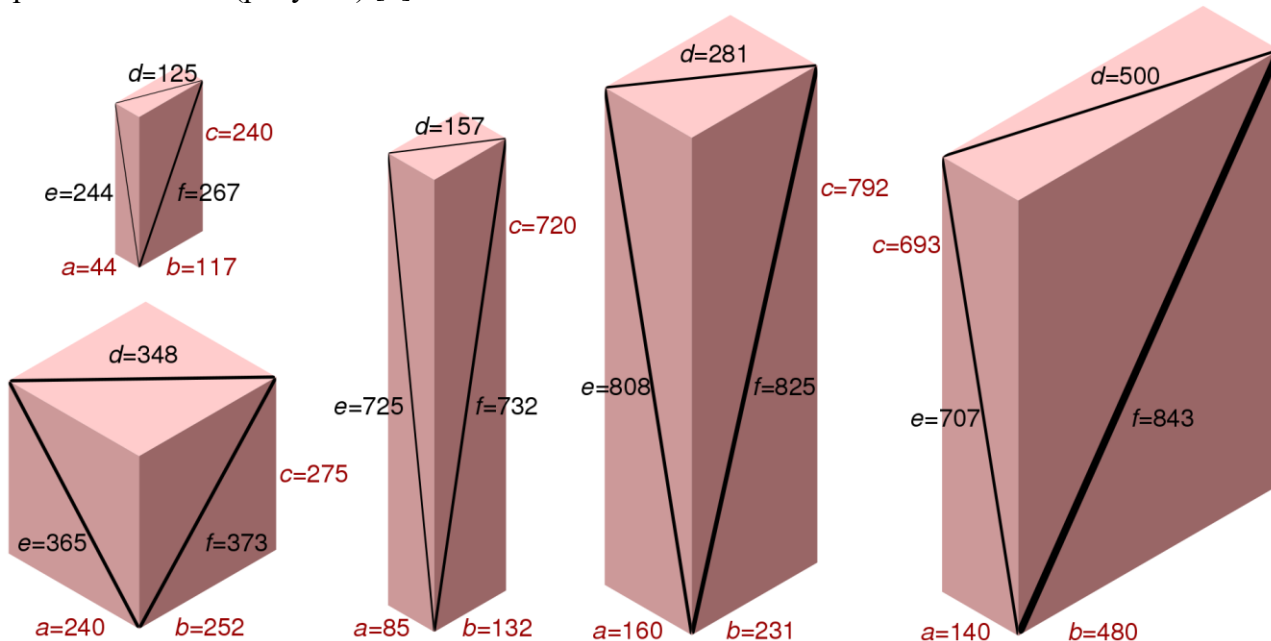


Рисунок – Пять эйлеровых параллелепипедов (до значения ребер не более 1000)

Известно так же, что Эйлер описал два семейства эйлеровых параллелепипедов, которые задаются формулами аналогичными формулам для нахождения значений пифагоровых треугольников. Эти семейства включают не все эйлеровы параллелепипеды. Среди них не может быть совершенного кубоида [1]. Полного описания всех эйлеровых параллелепипедов сегодня не существует.

Одно из семейств параллелепипедов полученных Эйлером задается формулами (при $n > 3$):

$$a = n^6 - 15n^4 + 15n^2 - 1 \quad (1)$$

$$b = 6n^5 - 20n^3 + 6n \quad (2)$$

$$c = 8n^5 - 8n \quad (3)$$

Следуя предлагаемым формулам (1–3) получаем, к примеру, – подставив значения 4, 5 – два параллелепипеда со сторонами (4, 5):

$$\begin{aligned} a &= 4096 - 3840 + 240 - 1 = 495 \\ b &= 6144 - 1280 + 24 = 4888 \\ c &= 8192 - 32 = 8160 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} a &= 15625 - 9375 + 375 - 1 = 6624/8 = 828 \\ b &= 18750 - 2500 + 30 = 16280/8 = 2035 \\ c &= 25000 - 40 = 24960/8 = 3120 \end{aligned} \quad (5)$$

В любом прямоугольном параллелепипеде можно выделить три ребра задающих линейные размеры объемной фигуры. В случае с эйлеровым параллелепипедом можно так же выделить три различных треугольника с целочисленными значениями сторон. Далее – из полученных треугольников посредством подбора значения котангенса – пифагоровы тройки. Таким образом любой эйлеров параллелепипед можно рассматривать как геометрический объект основанный на трех пифагоровых тройках. Нами предположено в этой связи, что существует способ получения эйлеровых параллелепипедов на основе значений котангенса пифагоровых троек.

Основная часть. Нами выделены (из известных пяти [1] и полученных нами (4, 5) еще двух эйлеровых параллелепипедов) пифагоровы тройки. Для этого были рассчитаны значения котангентов составляющих эйлеровые параллелепипеды треугольников и – по разработанной нами классификации [2] – найдены котангенты пифагоровых троек посредством электронного поиска (таблицы 2–9). Полученные значения котангентов занесены в таблицу 1.

Таблица 1 – Значения сторон примитивных пифагоровых треугольников (пифагоровых троек) и их котангентов как оснований эйлеровых параллелепипедов двух семейств

Семейство «а»	Пифагорова тройка			Δctg	Множитель	Значения эйлерова параллелепипеда	Семейство «b»	Пифагорова тройка			Δctg	Множитель	Значения эйлерова параллелепипеда
1a	11	60	61	5,45454545	*4	240	1b	11	60	61	5,45454545	*39	2340
	39	80	89	2,05128205	*3	117		39	80	89	2,05128205	*11	880
	44	117	125	2,65909090	*1	44		44	117	125	2,65909090	*20	429
2a	11	60	61	5,45454545	*12	720	2b	11	60	61	5,45454545	*17	1584
	17	144	145	8,47058823	*5	132		17	144	145	8,47058823	*11	1020
	85	132	157	1,55294117	*1	85		85	132	157	1,55294117	*12	187
3a	20	21	29	1,05	*12	275	3b	20	21	29	1,05	*55	1155
	48	55	73	1,14583333	*5	252		48	55	73	1,14583333	*21	1100
	252	275	373	1,09126984	*1	240		252	275	373	1,09126984	*4	1008
4a	7	24	25	3,42857142	*33	792	4b	7	24	25	3,42857142	*20	693
	20	99	101	4,95	*8	231		20	99	101	4,95	*7	480
	160	231	281	1,44375	*1	160		160	231	281	1,44375	*3	140
5a	69	260	269	3,76811594	*12	3120	5b	69	260	269	3,76811594	*407	105820
	407	624	745	1,53316953	*5	2035		407	624	745	1,53316953	*69	43056
	828	2035	2197	2,45772946	*1	828		828	2035	2197	2,45772946	*52	28083
6a	611	1020	1189	1,66939443	*8	8160	6b	611	1020	1189	1,66939443	*33	332384
	33	544	545	16,4848484	*15	4888		33	544	545	16,4848484	*611	33660
	495	4888	4913	9,87474747	*1	495		495	4888	4913	9,87474747	*68	20163

Условно нами были выделены два семейства эйлеровых параллелепипедов (подобно семействам параллелепипедов Эйлера) – семейство «а» и семейство «b» (таблица 1). Первое семейство, по логике нашего исследования, можно определить так же как «родительское», а второе – как «производное». Семейство «а» составлено нами из известных уже значений четырех эйлеровых параллелепипеда до значения ребер не более 1000 [1] и еще двух – из полученных значений задаваемых формулами (1, 2, 3). Другие же шесть эйлеровых параллелепипеда названных нами «производными» получены определенным образом (описание алгоритма ниже по тексту) из первых шести «родительских».

Следует отметить, что приступив к анализу таблицы с заполненными числами сторон эйлеровых параллелепипедов (из известных до значения ребер не более 1000 [1]) мы обнаружили – закономерную смену – два значения пифагоровых троек из блока «4b» «перекрестно» совпадают со значениями множителей этого блока (таблица 1, обозначено стрелками). В этой связи мы предположили, что подобным свойством «совпадения» значений пифагоровых троек и множителей обладают и иные значения блоков семейства «b». Проведенные (необходимые для расчетов) математические операции подтвердили данное предположение (таблица 1).

Из иных закономерностей обращает на себя внимание повторение в значениях множителей блоков семейства «b» цифр 12, 5, 1. Связанную с этим повторением закономерность обнаружить не удалось.

В таблице 1 различными цветами обозначены ячейки со значениями большего и меньшего катетов пифагорова треугольника. При этом можно выделить своеобразные пары, например, в блоке «1a» – пары 60 и 80, 39 и 117, 11 и 44. Значения этих пар и множителей, в дальнейшем, позволят нам получить значения размеров эйлеровых параллелепипедов.

При составлении эйлеровых параллелепипедов семейства «b», в табличном представлении наблюдается зеркальное отражение цветовых рисунков таблицы по отношению к таковым семейства «а»: слева-направо и сверху-вниз. При этом красный цвет изменяется на желтый и наоборот, а светло-синий – остается без изменений.

Способ определения значений трех сторон эйлера параллелепипеда семейства «b» может быть описан следующим алгоритмом операций:

– *выявление значений трех котангенсов эйлера параллелепипеда семейства «а» (деление значений эйлера параллелепипеда семейства «а»);*

– *нахождение по значениям сторон эйлера параллелепипеда значений большего и малого катетов трех пифагоровых троек его основывающих (поиск посредством перебора по таблицам 2–9 значений котангенсов пифагоровых троек);*

– *составление в табличном виде трех позиций из трех пифагоровых троек (таблица 1);*

– *нахождение в трех позициях чисел одной пары чисел с наименьшей их суммой, но не подобных парам значений пифагоровых троек параллелепипеда из семейства «а»;*

– *перекрестная расстановка двух значений в таблице из трех пифагоровых троек – одно из значений пифагоровой тройки будет множителем для другой тройки и наоборот (указано стрелками, таблица 1);*

– *перемножение значений таблицы из двух пифагоровых троек (значений большего и меньшего катетов) на значения двух множителей (таблица 1);*

– *нахождение множителя третьей пифагоровой тройки посредством деления полученных значений двух сторон эйлера параллелепипеда на значения третьей пифагоровой тройки.*

Нами выявлено условие для построения эйлера параллелепипеда: *произведение двух меньших значений котангенсов двух пифагоровых треугольников эйлера параллелепипеда равно значению котангенса третьего пифагорова треугольника данного параллелепипеда.*

№ п/п	+2	$\Sigma+4$ (-0)	$\Sigma+4$ (-0)	+4	$\Sigma+8$ (-1)	$\Sigma+8$ (-1)	ctg Разница 1 $\Delta\text{ctg}\approx 1,0\dots(1/1)$	ctg Разница 2 $\Delta\text{ctg}\approx 1,0\dots$
		Разница 1 $\Delta\text{ctg}\approx 1,0\dots(1/1)$			Разница 2 $\Delta\text{ctg}\approx 1,0\dots$			
1.	3	4	5	8	15	17	1,3333333333333333	1,875
2.	5	12	13	12	35	37	2,4	2,916666666666667
3.	7	24	25	16	63	65	3,428571428571429	3,9375
4.	9	40	41	20	99	101	4,444444444444444	4,95
5.	11	60	61	24	143	145	5,454545454545455	5,958333333333333
6.	13	84	85	28	195	197	6,461538461538462	6,964285714285714
7.	15	112	113	32	255	257	7,466666666666667	7,96875
8.	17	144	145	36	323	325	8,470588235294118	8,972222222222222
9.	19	180	181	40	399	401	9,473684210526316	9,975
10.	21	220	221	44	483	485	10,47619047619048	10,97727272727273
11.	23	264	265	48	575	577	11,47826086956522	11,979166666666667
12.	25	312	313	52	675	677	12,48	12,98076923076923
13.	27	364	365	56	783	785	13,48148148148148	13,98214285714286
14.	29	420	421	60	899	901	14,48275862068966	14,983333333333333
15.	31	480	481	64	1023	1025	15,48387096774194	15,984375
16.	33	544	545	68	1155	1157	16,48484848484848	16,98529411764706
17.	35	612	613	72	1295	1297	17,48571428571429	17,986111111111111
18.	37	684	685	76	1443	1446	18,48648648648649	18,98684210526316
19.	39	760	761	80	1599	1601	19,48717948717949	19,9875
20.	41	840	841	84	1763	1765	20,48780487804878	20,98809523809524
21.	43	924	925	88	1935	1937	21,48837209302326	21,98863636363636

Таблица 2 – Значения сторон примитивных пифагоровых треугольников (цвет) и их котангенсов

Таблица 3 – Значения сторон примитивных пифагоровых треугольников (цвет) и их котангенсов ($\Delta\text{ctg}\approx 0,333\dots(1/3)$)

№ п/п	+6	$\Sigma+4$ (-0)	$\Sigma+4$ (-0)	+12	$\Sigma+8$ (-1)	$\Sigma+8$ (-1)	ctg Разница 9 $\Delta\text{ctg}\approx 0,333\dots(1/3)$	ctg Разница 18 $\Delta\text{ctg}\approx 0,333\dots$
		Разница 9 $\Delta\text{ctg}\approx 0,333\dots(1/3)$			Разница 18 $\Delta\text{ctg}\approx 0,333\dots$			
1.	–	–	–	48	55	73		1,1458333333333333
2.	27	36	45	60	91	109		1,516666666666667
3.	33	56	65	72	135	153	1,696969696969697	
4.	39	80	89	84	187	205	2,051282051282051	2,226190476190476
5.	45	108	117	96	247	265		2,572916666666667
6.	51	140	149	108	315	333	2,745098039215686	
7.	57	176	185	120	391	409	3,087719298245614	3,258333333333333
8.	63	216	225	132	475	493		3,598484848484848
9.	69	260	269	144	567	585	3,768115942028986	
10.	75	308	317	156	667	685	4,106666666666667	4,275641025641026
11.	81	360	369	168	775	793		4,613095238095238
12.	87	416	425	180	891	909	4,781609195402299	
13.	93	476	485	192	1015	1033	5,118279569892473	5,286458333333333
14.	99	540	549	204	1147	1165		5,622549019607843
15.	105	608	617	216	1287	1305	5,79047619047619	
16.	111	680	689	228	1435	1453	6,126126126126126	6,293859649122807
17.	117	756	765	240	1591	1609		6,629166666666667
18.	123	836	845	252	1755	1773	6,796747967479675	
19.	129	920	929	264	1927	1945	7,131782945736434	7,299242424242424
20.	135	1008	1017	276	2107	2125		7,634057971014493
21.	141	1100	1109	288	2295	2313	7,801418439716312	

Таблица 4 – Значения сторон примитивных пифагоровых треугольников (цвет) и их котангенсов ($\Delta\text{ctg}\approx 0,5\dots(1/2)$)

№ п/п	+8	$\Sigma+8$ (-0)	$\Sigma+8$ (-0)	ctg Разница 8 $\Delta\text{ctg}\approx 0,5\dots(1/2)$
		Разница 8 $\Delta\text{ctg}\approx 0,5\dots(1/2)$		
1.	20	21	29	1,05
2.	28	45	53	1,607142857142857
3.	36	77	85	2,138888888888889
4.	44	117	125	2,659090909090909
5.	52	165	173	3,173076923076923
6.	60	221	229	3,683333333333333
7.	68	285	293	4,191176470588235
8.	76	357	365	4,697368421052632
9.	84	437	445	5,202380952380952
10.	92	525	533	5,706521739130435
11.	100	621	629	6,21
12.	108	725	733	6,712962962962963
13.	116	837	845	7,21551724137931
14.	124	957	965	7,717741935483871
15.	132	1085	1093	8,21969696969697
16.	140	1221	1229	8,721428571428571
17.	148	1365	1373	9,222972972972973
18.	156	1517	1525	9,724358974358974
19.	164	1677	1685	10,22560975609756
20.	172	1845	1853	10,72674418604651
21.	180	2021	2029	11,22777777777778

Таблица 5 – Значения сторон примитивных пифагоровых треугольников (цвет) и их котангенсов ($\Delta\text{ctg}\approx 0,2\dots(1/5)$)

№ п/п	+10	$\Sigma+4$ (-0)	$\Sigma+4$ (-0)	+20	$\Sigma+8$ (-1)	$\Sigma+8$ (-1)	ctg Разница 25 $\Delta\text{ctg}\approx 0,2\dots(1/5)$	ctg Разница 50 $\Delta\text{ctg}\approx 0,2\dots$
		Разница 25 $\Delta\text{ctg}\approx 0,2\dots(1/5)$			Разница 50 $\Delta\text{ctg}\approx 0,2\dots$			
1.	65	72	97	140	171	221	1,107692307692308	1,221428571428571
2.	75	100	125	160	231	281		1,44375
3.	85	132	157	180	299	349	1,552941176470588	1,661111111111111
4.	95	168	193	200	375	425	1,768421052631579	
5.	105	208	233	220	459	509	1,980952380952381	2,086363636363636
6.	115	252	277	240	551	601	2,191304347826087	2,295833333333333
7.	125	300	325	260	651	701		2,503846153846154
8.	135	352	377	280	759	809	2,607407407407407	2,710714285714286
9.	145	408	433	300	875	925	2,813793103448276	
10.	155	468	493	320	999	1049	3,019354838709677	3,121875
11.	165	532	557	340	1131	1181	3,224242424242424	3,326470588235294
12.	175	600	625	360	1271	1321		3,530555555555556
13.	185	672	697	380	1419	1469	3,632432432432432	3,734210526315789
14.	195	748	773	400	1575	1625	3,835897435897436	
15.	205	828	853	420	1739	1789	4,039024390243902	4,14047619047619
16.	215	912	937	440	1911	1961	4,241860465116279	4,343181818181818
17.	225	1000	1025	460	2091	2141		4,545652173913043
18.	235	1092	1117	480	2279	2329	4,646808510638298	4,747916666666667
19.	245	1188	1213	500	2475	2525	4,848979591836735	
20.	255	1288	1313	520	2679	2729	5,050980392156863	5,151923076923077
21.	265	1392	1417	540	2891	2941	5,252830188679245	5,353703703703704

Таблица 6 – Значения сторон примитивных пифагоровых треугольников (цвет) и их котангенсов ($\Delta \text{ctg} \approx 0,25 \dots (1/4)$)

№ п/п	+16	$\Sigma+8$ (-0)	$\Sigma+8$ (-0)	ctg Разница 32 $\Delta \text{ctg} \approx 0,25 \dots (1/4)$
		Разница 32 $\Delta \text{ctg} \approx 0,25 \dots (1/4)$		
1.	88	105	137	1,193181818181818
2.	104	153	185	1,471153846153846
3.	120	209	241	1,741666666666667
4.	136	273	305	2,007352941176471
5.	152	345	377	2,269736842105263
6.	168	425	457	2,529761904761905
7.	184	513	545	2,78804347826087
8.	200	609	641	3,045
9.	216	713	745	3,300925925925926
10.	232	825	857	3,556034482758621
11.	248	945	977	3,810483870967742
12.	264	1073	1105	4,064393939393939
13.	280	1209	1241	4,317857142857143
14.	296	1353	1385	4,570945945945946
15.	312	1505	1537	4,823717948717949
16.	328	1665	1697	5,076219512195122
17.	344	1833	1865	5,328488372093023
18.	360	2009	2041	5,580555555555556
19.	376	2193	2225	5,832446808510638
20.	392	2385	2417	6,084183673469388
21.	408	2585	2617	6,33578431372549

Таблица 7 – Значения сторон примитивных пифагоровых треугольников (цвет) и их котангенсов ($\Delta \text{ctg} \approx 0,143 \dots (1/7)$)

№ п/п	+14	$\Sigma+4$ (-0)	$\Sigma+4$ (-0)	+28	$\Sigma+8$ (-1)	$\Sigma+8$ (-1)	ctg Разница 49 $\Delta \text{ctg} \approx 0,143 \dots (1/7)$	ctg Разница 98 $\Delta \text{ctg} \approx 0,143 \dots$
		Разница 49 $\Delta \text{ctg} \approx 0,143 \dots (1/7)$			Разница 98 $\Delta \text{ctg} \approx 0,143 \dots$			
1.	119	120	169	252	275	373	1,008403361344538	1,091269841269841
2.	133	156	205	280	351	449	1,172932330827068	1,253571428571429
3.	147	196	245	308	435	533		1,412337662337662
4.	161	240	289	336	527	625	1,490683229813665	1,568452380952381
5.	175	288	377	364	627	725	1,645714285714286	1,722527472527473
6.	189	340	389	392	735	833	1,798941798941799	
7.	203	396	445	420	851	949	1,950738916256158	2,026190476190476
8.	217	456	505	448	975	1073	2,101382488479263	2,176339285714286
9.	231	520	569	476	1107	1205	2,251082251082251	2,32563025210084
10.	245	588	637	504	1247	1345		2,474206349206349
11.	259	660	709	532	1395	1493	2,548262548262548	2,62218045112782
12.	273	736	785	560	1551	1649	2,695970695970696	2,769642857142857
13.	287	816	865	588	1715	1813	2,843205574912892	
14.	301	900	949	616	1887	1985	2,990033222591362	3,063311688311688
15.	315	988	1037	644	2067	2165	3,136507936507937	3,209627329192547
16.	329	1080	1129	672	2255	2353	3,282674772036474	3,355654761904762
17.	343	1176	1225	700	2451	2549		3,501428571428571
18.	357	1276	1325	728	2655	2753	3,574229691876751	3,646978021978022
19.	371	1380	1429	756	2867	2965	3,719676549865229	3,792328042328042
20.	385	1488	1537	784	3087	3185	3,864935064935065	
21.	399	1600	1649	812	3315	3413	4,010025062656642	4,082512315270936

Таблица 8 – Значения сторон примитивных пифагоровых треугольников (цвет) и их котангенсов ($\Delta \text{ctg} \approx 0,166\dots(1/6)$)

№ п/п	+24	$\Sigma+8$ (-0)	$\Sigma+8$ (-0)	ctg Разница 72 $\Delta \text{ctg} \approx 0,166\dots(1/6)$
		Разница 72 $\Delta \text{ctg} \approx 0,166\dots(1/6)$		
1.	204	253	325	1,240196078431373
2.	228	325	397	1,425438596491228
3.	252	405	477	1,607142857142857
4.	276	493	565	1,786231884057971
5.	300	589	661	1,9633333333333333
6.	324	693	765	2,138888888888889
7.	348	805	877	2,313218390804598
8.	372	925	997	2,486559139784946
9.	396	1053	1125	2,659090909090909
10.	420	1189	1261	2,830952380952381
11.	444	1333	1405	3,002252252252252
12.	468	1485	1557	3,173076923076923
13.	492	1645	1717	3,34349593495935
14.	516	1813	1885	3,513565891472868
15.	540	1989	2061	3,683333333333333
16.	564	2173	2245	3,852836879432624
17.	588	2365	2437	4,022108843537415
18.	612	2565	2637	4,191176470588235
19.	636	2773	2845	4,360062893081761
20.	660	2989	3061	4,528787878787879
21.	684	3213	3285	4,697368421052632

Таблица 9 – Значения сторон примитивных пифагоровых треугольников (цвет) и их котангенсов ($\Delta \text{ctg} \approx 0,111\dots(1/9)$)

№ п/п	+18	$\Sigma+4$ (-0)	$\Sigma+4$ (-0)	+36	$\Sigma+8$ (-1)	$\Sigma+8$ (-1)	ctg Разница 81 $\Delta \text{ctg} \approx 0,111\dots(1/9)$	ctg Разница 162 $\Delta \text{ctg} \approx 0,111\dots$
		Разница 81 $\Delta \text{ctg} \approx 0,111\dots(1/9)$			Разница 162 $\Delta \text{ctg} \approx 0,111\dots$			
1.	207	224	305	432	495	657	1,082125603864734	1,145833333333333
2.	225	272	353	468	595	757	1,208888888888889	1,271367521367521
3.	243	324	405	504	703	865		1,39484126984127
4.	261	380	461	540	819	981	1,455938697318008	1,516666666666667
5.	279	440	521	576	943	1105	1,577060931899642	1,637152777777778
6.	297	504	585	612	1075	1237	1,696969696969697	1,756535947712418
7.	315	572	653	648	1215	1377	1,815873015873016	
8.	333	644	725	684	1363	1525	1,933933933933934	1,992690058479532
9.	351	720	801	720	1519	1681	2,051282051282051	2,109722222222222
10.	369	800	881	756	1683	1845	2,168021680216802	2,226190476190476
11.	387	884	965	792	1855	2017	2,284237726098191	2,342171717171717
12.	405	972	1053	828	2035	2197		2,457729468599034
13.	423	1064	1145	864	2223	2385	2,515366430260047	2,572916666666667
14.	441	1160	1241	900	2419	2581	2,630385487528345	2,687777777777778
15.	459	1260	1341	936	2623	2785	2,745098039215686	2,802350427350427
16.	477	1364	1445	972	2835	2997	2,859538784067086	
17.	495	1472	1553	1008	3055	3217	2,973737373737374	3,030753968253968
18.	513	1584	1665	1044	3283	3445	3,087719298245614	3,14463601532567
19.	531	1700	1781	1080	3519	3681	3,2015065913371	3,258333333333333
20.	549	1820	1901	1116	3763	3925	3,31511839708561	3,371863799283154
21.	567	1944	2025	1152	4015	4177		3,485243055555556

Заключение.

1. Найден не формульный способ получения значений сторон «производного» эйлера параллелепипеда на основе значений «родительского» эйлера параллелепипеда. Для этого в фигуре выделяется три треугольника с целочисленными значениями сторон. Далее – из полученных треугольников посредством подбора значения их котангенса – определяются пифагоровы тройки. Эти тройки заносятся в таблицу. Приемом перекрестной расстановки в таблице двух значений (из трех) пифагоровых троек (посредством описанного алгоритма математических операций) вычисляются значения трех сторон «производного» эйлера параллелепипеда.

2. Выявлено условие для создания эйлера параллелепипеда: произведение двух меньших значений котангенса двух пифагоровых треугольников эйлера параллелепипеда равно значению котангенса третьего пифагорова треугольника данного параллелепипеда.

Список литературы:

1. Стюарт, И. Величайшие математические задачи. – М.: Альпина нон-фикшн, 2016. – С. 407.
2. Ворон, А.В. Классификация пифагоровых троек на основе различий котангенса их треугольников // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77–6567, публ.25256, 11.03.2019.