Грант Аракелян

С чего начинаются числа

Содержание

Об истоках числовой математики

Известно, что понятие числа, возникшее из потребностей счёта ещё в доисторические времена, относится к категории важнейших понятий математики и всей науки. Более того, оно играет важнейшую роль практически во всех сферах человеческой деятельности и одинаково значимо в таких далёких друг от друга областях, как наука и философия, мифология и религия, магия и оккультизм, повседневная жизнь и деловые расчёты. Однако ниже речь не о значимости, а первичности понятия в структуре той части математики, которую с некоторой долей условности можно назвать числовой.

Уточним, что под этим будем понимать бóльшую часть математики, в которой число является либо основным, либо одним из основных понятий. Учениями о числах являются арифметика, теория чисел, а в какой-то степени и теории функций вещественной и комплексной переменной. Число, наряду с функцией и пределом, является основным понятием в обширных разделах математики, обычно объединяемых под общим названием *анализ*. Сюда входят дифференциальное и интегральное исчисление, теория дифференциальных и интегральных уравнений, функциональный анализ, вариационное исчисление, гармонический анализ и некоторые другие разделы математики. Вместе с тем, в другой части сильно разросшегося за последние столетия древа математики число является лишь вспомогательным понятием среди таких понятий, как множество, группа, величина …

Очертив, по крайней мере приблизительно, рамки числовой математики, можно приступить к рассмотрению её истоков. Изначально ясно, что это метатеоретическая проблема, относящаяся к сфере философии математики и её оснований, резонно поэтому обсудить вначале место математики в общей структуре научного знания. Всё дальнейшее изложение будет вестись преимущественно в философско-методологическом ключе, прибегая по необходимости и к логико-математическим конструкциям.

В достаточно популярной схеме иерархическая структура научного знания состоит из пяти основных отраслей, каждая из которых составлена (в порядке старшинства слева направо) из двух больших научных областей.

I	**Формальные науки**	Логика	Математика
II	**Физические науки**	Физика	Химия
III	**Науки о жизни**	Клеточная биология	Функциональная биология
IV	**Науки об обществе**	Психология	Социология
V	**Земля и космос**	Астрономия	Науки о Земле

Общая структура научного знания

Как видим, в данной схеме формальные науки предшествуют остальным научным отраслям, а логика лежит в основе всей науки, включая математику. Это, разумеется, не единственное понимание структуры научного знания, есть и другие, среди них и радикальные, согласно которым научными являются только эмпирические науки, а логика и математика — вообще не наука в силу их независимости от эмпирического опыта. В любом случае, логика и математика неразрывно связаны и в научной литературе, особенно англоязычной, нередко можно встретить такие выражения: «логика предшествует математике» (logic precedes mathematics), «математика сводится к логике» (mathematics reduces to logic), «математика — расширенная логика» (mathematics is an extension of logic), «логика — язык математики» (logic is the language of mathematics).

Примат логики над математикой можно понимать двояко. Любое высказывание, включая, конечно, и предложения математики, должно соответствовать законам логики и в этом смысле нельзя заниматься математикой без логики. Это вполне тривиально и здесь не возникает вопросов. Другое дело — сводимость математики к логике, понимание математики как дополнения к логике. Впервые мысль о подобной редукции высказана ещё Лейбницем в конце XVII века, но попытка конкретной реализация идеи в рамках философии математики с целью её обоснования была предпринята спустя лишь два столетия.

Принято считать, что у истоков программы логицизма — дедукции математики из символической логики — стоит Г. Фреге, который пытался свести натуральные числа к логическим понятиям. Редукционизм Фреге оказал определённое влияние на Б. Рассела и А. Уайтхеда, Р. Дедекинда, Д. Пеано, Л. Витгенштейна и других известных логиков, математиков и философов науки, занимавшихся проблемами оснований математики. Однако логицистская программа обоснования математики, во всяком случае в её максималистском варианте, успехом не увенчалась, как, впрочем и программы формализма (Д. Гильберт, П. Бернайс, А. Тарский, Р. Карнап и др.) и интуиционизма (Я. Брауэр, А. Гейтинг и др.). С обнаружением парадоксов в теории множеств, прежде всего парадоксов Бурали-Форти, Кантора, Рассела, и доказательством двух знаменитых теорем К. Гёделя был нанесён серьёзный удар по логицистской и формалистской программам обоснования математики. Стало ясно, что идея редукции математики к логике, как и концепция формализации (аксиоматизации) математики не могут быть реализованы с той степенью завершённости и полноты, которая была задумана авторами программ и их адептами.

Тем не менее, трансформировавшись в нео-логицизм и нео-формализм, модифицированные программы столетней давности, наряду с теоретико-множественной программой обоснования математики, по-прежнему высоко ценятся в науке и продолжают привлекать внимание современных исследователей. Заметный рост интереса к проблемам логического обоснования и формализации математики в немалой степени обусловлен развитием вычислительной техники и возможностью автоматического доказательства теорем на основе математической логики.

Последняя фактически представляет собой гибрид логики и математики, «логика, развиваемая с помощью математических методов» (С. Клини), сочетающая в себе характерные особенности концепций логицизма и формализма. По отношению к формальной числовой математике математическая логика выполняет роль метатеории, что означает её тесную связь с метаматематикой и основаниями математики. Путём отказа от фундаментализма Фреге, Гильберта, их последователей и с учётом налагаемых теоремами Гёделя ограничений, классическое исчисление предикатов (логика первого порядка), включающее исчисление высказываний, широко используется в качестве фундамента для различных систем чистой математики, а также в лингвистике и информатике.

Даже самое беглое знакомство со страницами истории науки, связанными с попытками преодоления кризиса в основаниях математики, достаточно для понимания некоторых реалий прошлого и настоящего.

Во-первых, выдвижение различных программ обоснования математики стало, по сути, реакцией выдающихся научных умов того времени на обнаружение парадоксов в канторовской теории множеств, мыслимой как надёжный и окончательный базис всей математики.

Во-вторых, это был кризис оснований математики, в самой же математике, в таких её разделах, как арифметика, геометрия, анализ, никто и никогда никаких парадоксов и противоречий не обнаруживал.

В-третьих, несмотря на относительную неудачу программ логицизма и формализма в их первоначальной редакции, концепции строгой формализации математических теорий и построения формальной математики на основе логики широко используются в современной науке.

В-четвёртых, основой формальной математики является не классическая, а математическая логика, которая считается разделом не столько логики, сколько математики. Логико-дедуктивный формализм математической логики является достаточно надёжным аксиоматическим фундаментом для построения различных систем формальной математики.

Отсюда следует, что корни формальной математики, в частности числовой, растут из математической логики, точнее исчисления предикатов, которое является формальной основой для множества математических систем, причём не обязательно даже числовой природы. Это наиболее строгий и корректный способ введения понятия числа и реальная альтернатива тысячелетнему догмату первичности натуральных чисел, который завёл идею обоснования математики в тупик.

Исторические причины, по которым натуральные числа всегда признавались первичными по отношению к остальным числам, вполне очевидны: натуральные числа — необходимый элемент счёта, используемый ещё в доисторические времена, понятие натурального числа всегда казалось настолько привычным, простым, изначальным и незаменимым, что долгое время не возникало потребности в его определении посредством других понятий. В приписываемых древним пифагорейцам изречениях типа «Все вещи суть числа», «Мир создан в подражание числам», «Бог положил числа в основу мирового порядка», см., например, [1, с. 54; 2, с. 129−130], имеются в виду исключительно целые положительные числа, поскольку и тогда и долгое время спустя только они и считались настоящими, *натуральными*, в противовес числам *отрицательным*, *иррациональным*, *трансцендентным*, *мнимым*. С позицией пифагорейцев через два с лишним тысячелетия перекликается восторженное заявление: «Целые числа сотворил господь бог, а всё прочее — дело людских рук», см. [3, с. 222], принадлежащее математику Л. Кронекеру, не внявшему, как впрочем и многие другие, предостережению служителя бога и философа Дж. Беркли: «Число есть всецело создание духа. ... Число настолько очевидно относительно и зависимо от человеческого познания, что странно было бы подумать, чтобы кто-нибудь мог приписать ему абсолютное существование вне духа» [4, с. 176].

Без покрова мистики и священного трепета, но вполне в духе пифагорейской традиции исключительности и первичности натуральных чисел предлагались и различные программы обоснования математики. Не случайно, что именно к формальной арифметике натуральных чисел пытались свести с целью её окончательного обоснования всю математику Гильберт и его последователи; не случайно появление и широкое распространение формальных систем натуральных чисел; не случайно, что именно на понятии натурального числа пытался строить свою математику интуиционизм. Однако попытки построить математику посредством постулата о существовании бесконечного ряда 1, 2, 3 …, либо служащих средством материального представления натуральных чисел точками или палочками интуиционистов, ведёт к серьёзным трудностям, связанным с введением уже отрицательных чисел, не говоря уже о других, ещё более неодолимых проблемах [5. с. 38−43]. Неудача всех редукционистских попыток подобного рода, свидетельствует о несостоятельности догмата первичности натуральных чисел и решение вопроса переносится в область логики первого порядка и построенной на ней аксиоматики числовой математики.

Логика первого порядка

Исчисление предикатов, она же логика первого порядка, изложенная во многих капитальных трудах, например, [6−10], содержит полный набор исходных понятий, принципов и конструктов, которые перечислим, не вникая в детали (подробнее см. [11], Гл. 1).

Логическая пропозициональная функция, или предикат, предельный случай которого есть единичное высказывание.

Математические (числовые) функции:

а) простые функции, являющиеся в частности постоянными величинами, или просто постоянными (константами)

б) *сложные функции*, образуемые посредством *суперпозиции*

в) функционалы

г) операторы

Им соответствуют четыре потенциально бесконечных множества переменных:

1) предметные (индивидные) переменные
2) предикатные логические переменные
3) *числовые переменные*
4) операторные функции-аргументы математики

Первичные операции.

Пропозициональные связки: ~ (эквивалентность), ⊃ (импликация), & (конъюнкция), ∨ (дизъюнкция), ¬ (отрицание.

Кванторы всеобщности ∀ и существования ∃ (перевернутые заглавные буквы английских слов **A**ll и **E**xist).

Математические операции = (равенство), + (сложение), − (вычитание).

Этим определяется нуждающийся ещё в уточнении алфавит формальной системы

~ ⊃ & ∨ ¬ ∀ ∃ = + −

в котором все десять операторов снабжены убывающим слева направо рангом (ранги операторов + и — могут считаться одинаковыми). При этом, чем ниже ранг оператора, тем сильнее он связывает переменную, что позволяет обходиться минимальным количеством скобок при написании логико-математических выражений.

Посредством алфавита определяются правильно построенные последовательности логических и математических символов формальной системы, называемые **термами** и **формулами**. Аналогами терма в грамматике естественного языка являются «слово», «подлежащее», «дополнение», аналогами формулы — «предложение», а также «суждение. Формулами являются предикаты и предикатные переменные; они образуются также посредством операции равенства для термов p и q, и с помощью пропозициональных связок и кванторов для формул A и B. Любая формула, простая или составная, может принимает лишь одно из двух истинностных значений: И (истина) и Л (ложь).

Здесь важно отметить, что в логике первого порядка, наряду с логическими элементами, определяются такие фундаментальные понятия математики, как **числовая переменная**, **числовая функция**, включая образуемую посредством бесконечной суперпозиции **сложную функцию**, **операторные функции-аргументы** математики, **бесконечный предел** (посредством кванторов), **формула** и **основные математические операции** равенства, сложения и вычитания.

Особый интерес представляют формулы являющиеся истинными при любых истинностных значений их подформул A, B, C, соединённых посредством пропозициональных связок и кванторов. Это по существу тавтологии; такие формулы называют тождественно истинными, или общезначимыми. Именно из множества тождественно истинных формул выбираются логические аксиомы, точнее схемы аксиом, которые конкретными аксиомами становятся тогда, когда вместо произвольных A, B, C подставляются конкретные формулы.

В работе [7, с. 467] аксиоматику исчислению предикатов образуют четырнадцать, содержащих пропозициональные связки постулатов исчисления высказываний, дополненных четырьмя постулатами, содержащими кванторы. Есть и другие системы исчисления предикатов — с меньшим числом пропозициональных связок и постулатов, но все эти аксиоматики формально эквивалентны и в принципе равноправны. Можно брать любую из них, а тот или иной выбор диктуется главным образом прагматическими соображениями. Не останавливаясь на этом, заметим лишь, что общезначимость всех аксиомных схем доказывается методами теории моделей или более тонкими методами теории доказательств.

Формальная числовая математика

Логика первого порядка является надёжной основой для формальных систем различной природы. Её логико-математический инструментарий содержит все те первичные элементы, которые необходимы и достаточны для построения остальных объектов числовой математики. Среди множества математических аксиоматик, основанных на исчислении предикатов, есть и такая, которая имеет интерпретацию на континууме всех чисел без каких-либо упущений и лакун. Универсальная в этом смысле система представлена в работе [7, с. 259−263] и обозначена там как **AG**. Её алфавит содержит следующие формальные символы:

~ ⊃ & ∨ ¬ ∀ ∃ = + − 0 a b c ... x y z α β γ ... χ ψ ω ( ) $_{|}$

Это семь логических и три математические операции, расположенные, как и раньше, в порядке убывающего слева направо ранга, индивидуальный объект 0 (нуль), 26 курсивных букв латинского и 24 строчные буквы греческого алфавита, левая и правая скобки, наконец символ $_{|}$, снабжая которым переменные a, b, c, ..., можно получить потенциально бесконечное множество новых переменных типа $a_{|}$ $a_{||}$ $a_{|||}$ ... $b_{|}$ $b_{||}$ $b_{|||}$ ... Таким образом, язык-объект (предметный язык) системы **AG** содержит в общей сложности 64 формальных символа, составляющих весь его алфавит. Любая другая символика, включая сокращения, знаки препинания и слова естественного языка, относится к метаязыку, посредством которого исследуется предметный язык.

Заметим, что мы впервые имеем дело с конкретным числом — нулем, следовательно в системе универсальной, в указанном смысле, формальной системе 0 должен считаться первенцем, начальным числом множества всех действительных и комплексных чисел. Кстати, в геометрической интерпретации, где каждому числу соответствует точка на комплексной плоскости, нуль является точкой пересечения действительной и мнимой осей прямоугольной системы координат, что характеризует его как естественное начало всех чисел.

Других чисел пока нет, но есть понятие терма (напомним, «слова» формальной системы) и если под переменными a, b, c, ..., x, y, z понимать числа (неважно пока какие), то термами являются нуль, все переменные и постоянные числа, числовые функции, включая сложные функции, функционалы, операторные выражения, а также любые последовательности перечисленных термов, образованные с помощью операций + и – по правилам $-p$, $p + q$, $p - q$. Формулами («предложениями») являются равенства типа $p = q$ для термов p и q, а также выражения для формул, образованные посредством пропозициональных связок и кванторов.

Система **AG**, посредством которой осуществляется переход к формальной математике, содержит следующие семь аксиом:

$\mathbf{M}_1$ $a = b \supset (a = c \supset b = c)$

$\mathbf{M}_2$ $a = b \supset a + c = b + c$

$\mathbf{M}_3$ $a = b \supset c + a = c + b$

$\mathbf{M}_4$ $(a + b) + c = a + (b + c)$

$\mathbf{M}_5$ $a + 0 = a$

$\mathbf{M}_6$ $a - a = 0$

$\mathbf{M}_7$ $a + b = b + a$

Содержательный смысл аксиом достаточно ясен. Аксиомы $\mathbf{M}_1$—$\mathbf{M}_4$ фиксируют свойства равенства и сложения, включая сочетательный закон сложения. $\mathbf{M}_5$ — уникальное свойство нуля, состоящее в том, что прибавление нуля к любому a не меняет a, $\mathbf{M}_6$ вводит операцию «–» и объект $-a$, противоположный a в смысле равенства их суммы нулю, $\mathbf{M}_7$ вводит коммутативный закон сложения.

Таким образом, постулаты исчисления предикатов вместе с семью математическими аксиомами для операций равенства, сложения, вычитания объектов a, b, c и нуля образуют логико-математическую аксиоматику системы **AG**. В отличие от систем типа **N**, имеющих единственную интерпретацию на множестве натуральных чисел, формальная система **AG** допускает большое количество интерпретаций как числовой, так и нечисловой, теоретико-групповой (отсюда, кстати, и само обозначение системы — от слова **G**roup) природы. Но главное, что она имеет интерпретацию на множестве всех комплексных чисел.

Если под числами понимать объекты, обладающие вполне определенной совокупностью обычных свойств, включая коммутативность умножения и операцию деления, то универсум отвечающих этим требованиям объектов целиком формируется и заполняется комплексными числами. В этом смысле можно утверждать, что других чисел нет, а все остальные «числа» — объекты другого рода, то есть с существенно другим набором основных свойств. Иногда это положение, известное благодаря исследованиям Вейерштрасса, Фробениуса, Пирса и других, облекается в сходную форму: невозможно какое-либо расширение понятия комплексного числа за пределами системы комплексных чисел без отказа от каких-то фундаментальных свойств числа.

Следует особо отметить, что интерпретация системы аксиом $\mathbf{M}_1$—$\mathbf{M}_7$ (обобщённо **M**) на множестве *всех* чисел возможна только при понимании +, –, и 0 как сложения, вычитания и нуля. Если в аксиомах **M** символы +, –, 0 заменить соответственно через символы $\cdot$, $^{-1}$, 1 или, что в принципе то же самое, толковать + как умножение, $-a$ как обозначение обратного a элемента, то есть деления единицы на a, 0 как единицу, то бесконечным множеством объектов системы **AG** может быть множество всех чисел, но уже *без нуля*. А строить формальную математику без нуля просто несерьезно, поскольку это совершенно уникальная и незаменимая математическая величина, фундаментальная математическая константа. Потребность в ней настолько велика, что даже в системе аксиом Пеано и других формальных системах типа **N** нуль добавляется к натуральному ряду, причем довольно искусственно, обычно в качестве некоего генератора натуральных чисел, и кроме того 0 всегда фигурирует в аксиомной схеме полной индукции. Поэтому, если иметь ввиду, что формальная система должна охватывать всё без исключения множество чисел, то выбор однозначно падает на операции +, – и 0, а не $\cdot$, $^{-1}$ и 1

Понятно, что умножение, деление и единица так или иначе должны быть введены в рамках формальной системы, но имеет смысл перед этим осмыслить изложенное и обозначить вектор дальнейшего рассмотрения.

О появлении выделенных чисел в математике

Следует прежде всего признать, что, вынесенный в заголовок статьи вопрос далеко не так прост, как могло казаться вначале. Все, когда-либо предпринимавшиеся попытки обоснования математики на арифметике натуральных чисел, как исходном начале числового континуума, успехом не увенчались. При достаточно строгом подходе числовая математика, как это не звучит парадоксально, не может начинаться с постулата о существовании конкретного множества чисел. Несмотря на налагаемые теоремами Гёделя ограничения, формальный метод является фактически единственным удовлетворяющим существующим стандартам строгости способом корректного введения чисел. Логико-математическим базисом многих формальных систем числовой и нечисловой, теоретико-групповой, например, природы, является исчисление предикатов, в котором даётся определение фундаментальным понятиям терма, формулы, логической и математической функций и предела. Это и есть основание числовой формальной математики, с алфавитом, в состав которого входят как логические операции — пропозициональные связки и кванторы, так и математические операции равенства, сложения и вычитания. В конечном виде исчисление предикатов, составной частью которой является исчисление высказываний, представлено в виде системы логических постулатов.

Логика первого порядка, как уже отмечалось, содержит в себе весь тот инструментарий, который необходим и достаточен для конструирования различных математических объектов. Построение в рамках языка-объекта математических аксиом **M** приводит к логико-математической системе **AG**, а интерпретация аксиом **M** на множестве всех чисел и пониманием символов +, – и 0 как сложения, вычитания и нуля означает построение пока ещё незавершённой системы формальной числовой математики. Незавершённость аксиоматики **AG** заключается в том, что нет ещё важнейших математических операций умножения, деления и единицы, как и нет конкретных чисел, кроме аксиоматически заданного нуля, хотя есть интерпретация термов a, b, c как «чисел».

Но здесь возникает вопрос: что такое *число в математике* с точки зрения высших стандартов логической строгости? Следует, прежде всего, отличать число как сущность, как некую данность от его численного значения. Возьмём для примера всем хорошо известное число π. Бесконечная дробь $3{,}1415926\ldots$ со сколь угодно большим количеством знаков после запятой не есть число π как таковое, а всего лишь запись его численного значения посредством бесконечной десятичной дроби, которая будет выглядеть совершенно иначе в другой системе счисления.

Определения числа π типа «отношение длины окружности к её диаметру» или «площадь круга единичного радиуса» может и хороши в геометрии, а понимание числа π как значения определённых интегралов, пределов бесконечных рядов, произведений и тому подобное важны для математического анализа, но неприемлемы с позиций логической строгости. Такими определениями и формулами устанавливаются связи между различными математическими числами, например, между геометрическими понятиями «длина окружности» и «диаметр», а в известной формуле Виета между числами π, 2 и $\sqrt{2}$, в не менее известных формулах Валлиса и Лейбница — между π, натуральным рядом и нечётными целыми положительными числами соответственно. Во всех подобных примерах выделенные математические конструкты, вроде числа π, попросту выражаются посредством других чисел.

Между тем, в сущностном понимании выделенное число, как некая данность, математическая константа, — нечто большее, чем простая или сложная конструкция каких-то других чисел. Поясним на примере константы золотого сечения ϕ. В элементарной теории рядов Фибоначчи это предельное отношение двух соседних членов ряда 1, 1, 2, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …, построенного по принципу «каждый член последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих». При этом заданы первые два члена ряда, тем самым «принцип третьего члена» фактически дополнен начальным условием, а точнее «опущен» до уровня конкретных чисел. Но стоит снять такое искусственное ограничение полагая, что рекуррентное правило третьего члена относится к любым начальным числам, в самом общем случае комплексным числам $u_1 = a + ib$ и $u_2 = c + id$ (a, b, c, d —

действительные числа, хотя бы одно из которых не нуль, i — мнимая единица), получим для каждого из коэффициентов a, b, c, d свой классический ряд Фибоначчи, сводящийся к константе ϕ [11, с. 281–283]. Этот весьма частный пример показателен в том отношении, что для получения последовательности Фибоначчи и константы золотого сечения нет надобности вводить какие-то условия в дополнение к основному принципу.

Возвращаясь в свете сказанного к системе **AG**, напомним, что из «букв» её алфавита можно составить потенциально бесконечное множество объектов

$$a_{|}\ a_{||}\ \ldots\ b_{|}\ b_{||}\ \ldots\ z_{|}\ z_{||}\ z_{|||}\ \ldots$$

интерпретируемых как числа — со свойствами, задаваемыми аксиомами **M**, но нет ещё ни одного конкретного числа как такового, за исключением аксиоматически заданного нуля. Добавим, что нет также ни одной конкретной функции, хотя понятие математической (числовой) функции изначально определено. Необходимо, следовательно, от понятия числа, числового множества, задаваемого совокупностью свойств, и от понятия числовой функции перейти к конкретным, реальным числам и функциям, оставаясь в рамках исходного формального базиса системы **AG**.

Из предыдущего следует, что **числа** при этом должны **не постулироваться**, **а появиться в результате развёртывания формальной системы**. Образно говоря, не думая о числах, формулируется принцип (закон, рекуррентное правило, уравнение и т.п.), реализация которого и приводит к каким-то числам, как выделенным математическим реалиям. Очевидно также, что чем выше уровень общности принципа, тем выше научный статус выделенных чисел. На уровне логико-математической системы **AG** числа, полученные в рамках его формализма путём расширения системы, должны считаться, наряду с нулем, первичными числовыми конструктами математики — фундаментальными математическими константами (ФМК).

Недостающие компоненты системы AG

Имеет смысл ещё раз подчеркнуть, что глубинная суть логико-математической системы **AG** состоит в том, что она содержит полный набор исходных объектов, первичных логических и математических операций и прочих элементов, необходимых и достаточных для всех дальнейших построений, для развёртывания системы. Другими словами, в рамках формальной математики любая конструкция, какой бы сложной она ни была, может быть записана посредством алфавита системы **AG**. Конечно, запись целиком на предметном языке, то есть без использования метаязыка, может быть чересчур громоздкой, крайне «неудобоваримой», но важна сама принципиальная возможность подобного представления.

В любом случае использование метаязыка, включая слова естественного языка, неизбежно при описании конструкций предметного языка, хотя бы для сокращения записи и лучшего понимания. В дальнейшем нам удобно пользоваться понятием *закон сохранения*, которое известно больше из физики с её законами сохранения таких физических величин, как энергия, импульс, момент импульса, электрический заряд, связанных соответственно с однородностью времени, однородностью и изотропностью пространства, калибровочной инвариантностью. Понятие *закон сохранения* не характерно для математики, но при желании законом сохранения можно считать любое равенство, поскольку в равенстве двух частей математической формулы содержится идея постоянства математического закона, неизменяемости аналитических связей, а в некоторых случаях идея сохранения каких-то математических *величин*, или термов — на языке логики. Равенство, содержащее только постоянные величины, назовём *соотношением*, равенство с переменными — *уравнением*, а равенство, где в качестве искомой величины выступает функция, — *функциональным уравнением*.

Развёртывание системы означает наполнение формальной схемы «живой» математической «субстанцией», нарастание математического дерева из её логико-математических корней. Мыслимы три дополняющих друг друга направления требуемого расширения системы. Одно из них связано с тем, что компоненты, важность и необходимость которых известна из содержательной математики, вводятся посредством исходных элементов логико-математического формализма. Другое направление это обобщение аксиоматически заданного свойства на общий случай. Наконец, последнее направление означает трансформацию некоторых понятий логики первого порядка в конкретную математическую реалию.

Уточним, о чём идёт речь. Вспомним, что интерпретация символов +, – и 0 системы аксиом **M** как сложения, вычитания и нуля, а не умножения, обратного элемента и единицы, была обусловлена необходимостью построения системы формальной математики охватывающей всё множество чисел без каких-либо исключений. Однако не прошедшие по конкурсу элементы относятся к числу важнейших в математике, и так или иначе должны быть как-то выражены через исходные понятия. Это прежде всего касается **операции умножения**, которая вводится в систему формальной математики посредством операции сложения.

Далее речь о **периоде** — числовой величине, добавление (сложение или вычитание) которой к другой величине не меняет последнюю. В аксиомах $\mathbf{M}_5$ и $\mathbf{M}_6$ системы **AG** роль периода играет константа 0. Фактически нуль может считаться простейшим периодом из всех возможный. Но периодичность может относиться не только к «голым» числам, но также к числам под знаком функции, то есть к аргументам функции. Функциональное обобщение свойства нуля, с использованием понятия бесконечного предела и есть второе направление развёртывания системы формальной математики.

Последнее направление связано с зафиксированным в исчислении предикатов (см. выше *Математические функции, пункт б*) понятием сложной функции, образуемой посредством **суперпозиции функций**. При этом используется понятие бесконечного предела и один из четырёх основных типов закона сохранения в математике. Помимо а) инвариантности аналитической формы связи между величинами, б) инвариантности самой величины по отношению к преобразованию, в) наличия в преобразовании числовых констант, возможна и такая, связанная с суперпозицией форма сохранения, как г) *независимость числового решения от выбора переменных преобразования*.

Таким образом, для развёртывания системы **AG** необходимо введения операции умножения, периодичности и суперпозиции функций, с использованием понятий бесконечного предела и математического закона сохранения, включая и тип г).

Функциональные уравнения

Указав основные направления развёртывания системы **AG**, следует записать всё это на языке формальной математики. Универсальным методом подобной записи являются функциональные уравнения, в которых, наряду с числовыми переменными вроде периода, неизвестной величиной является сама функция. Неявно определяя новые элементы и обобщая задаваемые аксиомами **M** свойства чисел, функциональные уравнениями тем самым раскрывают изначально заложенный в системе **AG** потенциал.

Система функциональных уравнений **E**, записанная посредством алфавита предметного языка, с использованием сокращений и символов метаязыка, состоит из следующих пяти уравнений,

$\mathbf{E}_1$ $\psi(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) = \psi(x_1)\cdot\psi(x_2) \ldots \cdot\psi(x_k)$

$\mathbf{E}_2$ $\alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \ldots + \alpha(x_k) = \alpha(x_1\cdot x_2 \ldots \cdot x_k)$

$\mathbf{E}_3$ $\psi(x + \lambda + \ldots + \lambda) = \psi(x)$

$\mathbf{E}_4$ $\psi(x - \lambda - \ldots - \lambda) = \psi(x)$

$\mathbf{E}_5$ $\lim\limits_{n\to\infty} S(S(\ldots S(x)\ldots) = \mathrm{const}$

Здесь вводимая посредством сложения операция умножения обозначена, как обычно, точкой $\cdot$, которую иногда можно опускать, период обозначен символом λ, а неизвестные пока функции — символами ψ, α, S [5, Глава 1]. Уравнения $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ редуцируют умножение к сложению двумя возможными вариантами. В $\mathbf{E}_1$ сложение бесконечного в общем случае множества чисел под знаком функции ψ выражается через произведение функций ψ, а в $\mathbf{E}_2$ сложение функций α с аргументами x_1, $x_2\ldots$ выражается через функцию α от произведения этих аргументов. Уравнения $\mathbf{E}_3$ и $\mathbf{E}_4$ периодом λ обобщают свойство 0 на функциональный случай. Бесконечная суперпозиция функций S в уравнения $\mathbf{E}_5$ выражает независимость результата от выбора аргументов функции, то есть математический закон сохранения в форме г).

Решение системы функциональных уравнений, причём без права использовать какие-либо принципы и конструкты кроме постулированных и полученных к данному моменту, — работа достаточно долгая и кропотливая. Эксплицитно искомыми неизвестными системы **E** являются функции ψ, α, S, период λ и константы уравнения $\mathbf{E}_5$. Но в действительности система функциональных уравнений даёт нечто большее. Она, как скоро увидим, имплицитно определяет числа, являющиеся первичными по отношению ко всем остальным.

Подробный рассмотрение и решение уравнений **E** в рамках формализма системы **AG**, в работах [11; 12] однозначно определяет основные свойства функций ψ, α, S и выявляет шестёрку чисел, через которые выражается и период λ. Всё это, отметим, исключительно в рамках предметного языка, с использованием ресурсов формальной системы. Все полученные в результате решения системы **E** компоненты представляют собой определённые наборы формальных свойств, характеризующих каждый из них в отдельности. Содержательно, то есть на языке метатеории, конкретно математического анализа, функция ψ тождественна комплексной экспоненте, α — обратному ей логарифму, а функция S имеет два связанных с экспонентой решения. В принятых обозначениях, обозначая комплексную переменную через z, а мнимую или действительную через x, имеем следующие четыре тождества:

$$\psi(z) \equiv e^z,\ \alpha(z) \equiv \mathrm{Ln}\, z,\ S_1(x) \equiv e^{-x},\ S_2(x) \equiv \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \equiv \cos x$$

Отсюда ясно, что исходными («материнскими») функциями формальной математики, которая вместе с функциональными уравнениями теперь уже представлена системой **AGE**, являются функции экспоненты e^z и логарифма $\mathrm{Ln}\, z$.

Что касается числовых решений системы уравнений **E**, то это шесть констант которые, с учётом их формальных свойств, нетрудно отождествить с хорошо известными, за единственным исключением, константами e, π, i, 2, ш, Ω, простой комбинацией которых является обобщающий свойство нуля период $\lambda = 2\pi i$. К шестёрке констант, помимо исходного терма 0 системы **AG**, следует добавить отношение материнских функций в виде бесконечной суммы с началом в нуле, то есть, на языке метатеории, несобственный интеграл для константы

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-u} \ln u\, du \equiv -\int_0^\infty \frac{\alpha(u)}{\psi(u)} du$$

известной как постоянная Эйлера — Маскерони. Она целиком составлена из компонентов системы **AG** и, насколько известно, даже сложной комбинацией других констант не является. Не было поэтому необходимости вводить её посредством ещё одного функционального уравнения.

Таким образом, функциональные уравнения, в которых числовые величины фигурируют в виде бесконечного множества переменных x_1, x_2 … и периода λ, дополняют вынесенный в заголовок статьи вопрос о формальных началах понятия числа вопросом о первичных числах континуума. Согласно изложенному, в истоках понятия математического числа, как некой данности, логического терма, конструкта формальной системы, лежит логика первого порядка, а первичными числами континуума следует считать, наряду с нулём и константой Эйлера — Маскерони, числа, полученные в результате решения системы уравнений **E**. Эти восемь величин и есть естественное начало, *проточисла* множества действительных и комплексных чисел, фундаментальные математические константы (ФМК).

Принятые названия и обозначения, а также численные значения ФМК (понятно, кроме 0, 2 и i) в десятичной системе счисления с точностью до двадцати знаков после запятой приведены в таблице.

Название	**Символ**	**Десятичное значение**
Нуль	0	
Мнимая единица	i	
Двойка	2	
Число пи	π	3,14159 26535 89793 23846 …
Число *e*	e	2,71828 18284 59045 23536 …
Константа Эйлера–Маскерони	γ	0,57721 56649 01532 86060…
Омега константа	Ω	0,56714 32904 09783 87299 …
Константа суперпозиции	ш	0,73908 51332 15160 64165 …

Первые шесть констант в представлении не нуждаются, к двум последним мы ещё вернёмся, а пока поговорим о константах, как выделенных числах математики. Константы имеются едва ли не в каждом разделе математики: в теории чисел, геометрии, комплексном анализе, теориях фракталов, дискретных структур, есть константы, связанные с аналитическими неравенствами, аппроксимацией функций, функциональной итерацией… Всего насчитывается несколько сотен математических констант [13], и данный реестр постоянно пополняется всё новыми членами, постепенно приближаясь к тысяче. Но в этом конгломерате выделенных чисел нет и не может быть полного равенства, поскольку статус констант общенаучной значимости неизмеримо выше, чем у констант частного типа.

В отдельную категорию, обычно не превышающую два-три десятка членов, выделяется группа т.н. «избранных», см. [14; 15] констант. Но и среди избранных есть элитные группы, которые по-разному характеризуются, например, в трёх наиболее популярных и авторитетных источниках по константам. В уже упомянутой капитальной монографии справочно-энциклопедического типа [13] список **общеизвестных** (well-known) констант включает двенадцать величин. На одну единицу больше в списке **общих** (common) констант в популярной математической интернет-энциклопедии MathWorld [16]. А в английской версии Википедии утверждается, что это в конечном счёте дело вкуса считать константу «интересной», примечательность же той или иной константы обусловлена скорее историческими причинами, чем математической значимостью. Для «интересных» констант здесь устанавливается двухступенчатая иерархия. Высший дивизион **основных базовых** (basic) констант состоит из четырёх величин, а во вторую группу **часто встречающихся в высшей математике** (encountered frequently in higher mathematics) констант входят семь величин.

Неудивительно, что все три списка особо избранных констант общим числом восемнадцать различных величин заметно разнятся, точнее совпадают частично. Семь констант — число π, число e, константы Пифагора $\sqrt{2}$, золотого сечения ϕ, Эйлера-Маскерони γ, Апери $\zeta(3)$ и Хинчина K присутствуют во всех трёх работах. Четыре константы: две Фейгенбаума α и δ, Каталана G и Глейшера — Кинкелина A находим в двух источниках. Семь констант — мнимая единица i и $\ln 2$, константы Маделунга M, Хайтина Ω, Делиана $\sqrt[3]{2}$, Солднера μ и Конвея λ встречаются по разу. Интересно, что 0 ни в одном источнике в список элитный констант не включён, что является непонятным упущением.

Налицо высокая степень произвола в выборе наиболее значимых констант и говорить об общепринятой точке зрения не приходится. Характерно, что в этих и других источниках элитные группы особо избранных констант отделяются от остального массива констант под такими, совершенно чуждыми точности математики эпитетами, как *общие, базовые, общеизвестные, часто встречающиеся*. А ко многому обязывающее в науке понятие *фундаментальные* ни разу не встречается.

Можно, следовательно, констатировать, что выбор некоторых констант в качестве «особо избранных» производится интуитивно, «на глаз. Понятно, что это обусловлено отсутствием чётких критериев отбора, строгих формальных признаков принадлежности к узкому кругу особо выделенных величин. И тогда волей-неволей приходится опираться на свою интуицию и субъективные предпочтения.

В рамках формализма логико-математики системой функциональных уравнений совершается переход от общего понятий к конкретным функциям и числам. В результате решения системы **E** ими оказываются функции экспоненты и логарифма, наряду с восьмеркой констант, которые тем самым являются истинно фундаментальными математическими константами. Это уже не «общие», «базисные» и прочее величины, а естественный и однозначный продукт развёртывания формальной системы. Тем самым утверждается статус функций e^z и $\mathrm{Ln}\, z$ как исходных математических функций и понимание 0, e, π, i, 2, γ, ɯ, Ω, как первичных чисел, проточисел математики, через которые выражаются все остальные числа континуума.

Построение континуума

Известно, что для построения числового множества определённой природы достаточно иметь в своём распоряжении начальные элементы, принцип построения и необходимые математические операции.

Так для получения классической последовательности Фибоначчи первичными элементами являются 0 и 1 (или 1 и 1), принципом построения — закон, по которому каждый член ряда, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих членов, а для реализации этого принципа требуется операция сложения. В общем случае последовательности Фибоначчи, при том же принципе построения и математической операции, начальными элементами последовательности Фибоначчи, напомним, могут быть любые комплексные числа, не равные оба тождественно нулю.

Натуральный ряд, то есть множество всех целых положительных чисел, строится путём последовательного прибавления 1 к исходной единице. При таком принципе построения единица достаточна лишь для получения натурального ряда. Для построения множества всех рациональных чисел к имеющемуся добавляется операция деления (умножения на обратное число) для любых двух натуральных чисел. С помощью бесконечной суммы рациональных чисел можно выразить любое положительное действительное число, формой записи которой является бесконечная n-ичная, в частности десятичная или двоичная, дробь.

Для получения множества отрицательных действительных чисел в качестве первичным элементом берётся отрицательная единица -1 и далее производятся те же действия, что и в первом случае, уже с учётом правила знаков, согласно которому результат деления двух отрицательных чисел является числом положительным. С добавлением нуля два указанных множества образуют в совокупности континуум всех действительных чисел.

Вполне аналогично также получение множеств мнимо-положительных и мнимо-отрицательных чисел, с исходными элементами i и $-i$ соответственно, и с теми же правилами построения. Вместе с нулём они суммарно образуют множество всех мнимых чисел. Из действительных и мнимых чисел по известной формуле $x + iy$, где x и y — действительные числа, составляется множестве всех тех конструктов, которые в математике называются числами.

Если под числами понимать объекты, обладающие определённой совокупностью обычных свойств, включая коммутативность сложения, умножения и сводимую к умножению операцию деления, то универсум отвечающих этим требованиям объектов целиком формируется и заполняется комплексными числами. А любая попытка обобщения, расширения, дополнения и т. п. множества комплексных чисел возможна, как было сказано выше, лишь ценой отказа от тех или иных исходных положений.

Можно констатировать, что если для построения указанных множеств, помимо математических операций и понятия предела, в каждом случае в качестве начального элемента требуется одна из единиц $1, -1, i, -i$, то для построения всего множества чисел необходимы сразу все четыре единицы вместе с нулём. Вопрос в том, располагает ли система **AGE** всем необходимым для построения континуума всех чисел, другими словами, действительно ли могут полученные в рамках этой системы ФМК считаться исходным началом всего множества чисел — *проточислами*.

Вспомним, что понятие предела является одним из основных в логике первого порядка, операция сложения и нуль представлены в аксиомах **M**, а сводимая к умножению операция деления неявно определена системой функциональных уравнений **E**. Следовательно, вопрос лишь в наличии четырёх единиц, необходимых для построения множества всех чисел. В логико-математической системе **AGE** исходной единицей является только константа i, через которую выражаются три остальные. Вместе с тем, имеет место приписываемая Л. Эйлеру удивительная связь между константами e, π, i, 2:

$$i = e^{\pi i/2}, \quad i^2 = e^{\pi i} \equiv -1, \quad i^2 \cdot i = e^{3\pi i/2} = -i, \quad i^2 \cdot i^2 = e^{\pm 2\pi i} \equiv 1$$

Таким образом, все четыре единицы это попросту степени константы i, а с другой стороны, согласно тождествам Эйлера, они являются комбинациями ФМК e, π, i, 2, которые составляют замкнутую группу взаимосвязанных величин. Следовательно, ФМК действительно с полным правом могут считаться первичными элементами, кирпичиками, необходимыми и достаточными для построения остальных чисел. Это, конечно, далеко не единственная их предназначение, но крайне важное, само по себе оправдывающее их понимание как проточисел.

На основе сказанного можно сказать, что множество всех чисел начинается с нуля, а исходной единицей служит константа i, или экспонента $e^{\pi i/2}$, через степени которых выражаются остальные три единицы, причём экспонента, как и обратный ей логарифм, имеет полученный как результат решения функциональных уравнений универсальный период $\lambda = 2\pi i$. Можно также сказать, что в системе формальной математики нуль может считаться фундаментальной константой высшего, нулевого, ранга (невольно получился каламбур), а семь остальных ФМК — константами первого ранга.

Константы суперпозиции

Среди ФМК первого ранга константы ш и Ω известны менее других. Начнём обсуждение с константы ш, см. также [11; 12; 17–20]. Из уравнения бесконечной суперпозиции косинуса

$$\mathbf{E}_5 \quad \lim_{n\to\infty} \cos(\cos \ldots \cos(z) \ldots) = \text{ш}$$

непосредственно следуют два более простых уравнения

$\mathbf{E}_{51}$ $\cos z = \arccos z = z$

удобные для вычисления численного значения трансцендентного, по принятой в математике терминологии, числа ɯ. С точностью в 6,4 млн десятичных знаков, наряду со статистическим анализом частоты их распределения, константа ɯ вычислена в [21], а с точностью уже в 12,8 млн знаков в работе [22].

Уравнение $\mathbf{E}_{51}$, является прямым следствие не только уравнения $\mathbf{E}_5$, но и всей системы функциональных уравнений **E**, задающей связь константы ɯ с материнской функцией $\psi \equiv e^x$ в виде косинуса. Включённость константы ɯ в систему фундаментальных констант, близость по природе, сходство аналитических форм вполне очевидно, если простейшее соотношение для проточисел сравнить с соотношением $\mathbf{E}_{51}$:

$$[\psi(i\pi) + \psi(-i\pi)]/2 = i^2$$

$$[\psi(i\text{ɯ}) + \psi(-i\text{ɯ})]/2 = \text{ɯ}$$

В обоих соотношениях полусумма функциональных слагаемых $\psi(x)$ и $\psi(-x)$ даёт константы, другими словами e-2-i-π-преобразование приводит к i^2, а e-2-i-ɯ-преобразование, с заменой π на ɯ, приводит к ɯ. В обоих случаях содержатся одни только ФМК, составляющие таким образом семейство взаимосогласованных величин.

Выделенные математические числа многогранны, имеют много различных проявлений, аналитических связей с другими величинами и могут появляться в самых неожиданных местах. Это прежде всего относится как раз к ФМК, областью применимости которых, в отличие от констант частного типа, является фактически вся математика и её приложения. Двойное уравнение $\mathbf{E}_{51}$ означает равенство функции, её аргумента и обратной функции для любой действительной или мнимой переменной z. Отсюда следует, что в геометрической интерпретации число ɯ есть точка пересечения трёх означенных кривых, а значит является универсальным числовым аттрактором. Уникальность такого свойства очевидна, поскольку кроме констант ɯ и Ω других таких чисел нет. Роль константы ɯ, как тройной точки пересечения, универсального числового аттрактора, наглядно видна из рисунка.

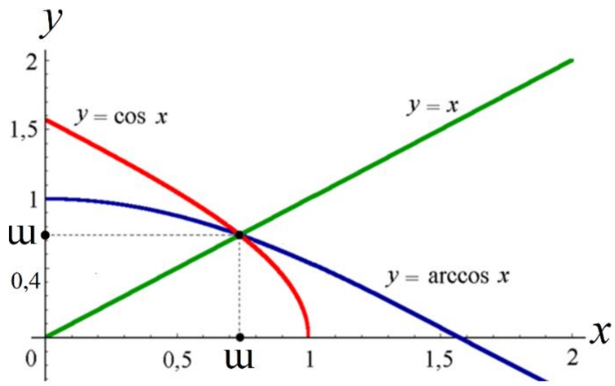

Рис. 1
Константа ɯ как тройная точка
пересечения кривых $y = \cos x$, $y = \arccos x$ и $y = x$

Нельзя, хотя бы вкратце, не остановиться на истории константы суперпозиции косинуса. Число ɯ, как константа и универсальный аттрактор, а также «скрытый параметр», необходимый для решения некоторых числовых проблем физической теории, впервые подробно рассмотрена в 1981 году в работе [23, 135, 136], а позже и во многих наших указанных выше работах. Немногие тогда обратили на это внимание, но вот, спустя четверть века она под другим именем появилась в небольшой статье в авторитетном американском журнале Mathematics *Magazine* [24], что вызвало ажиотаж в научных и любительских кругах. В этой статье число 0,739085… появилось как аттрактор, численное значение которого может быть получено простым нажатием кнопки «cos» (в радианах) калькулятора, на что ранее указывалось и в наших работах. Энергичные протесты автора и Академии наук Армении оказались бессильными перед «правом сильного», подробнее см. [18; 20], а также [25; 26]. Грубо нарушая авторское права и элементарные нормы научной этики, бесцеремонно украденная константа суперпозиции косинуса ɯ, уже под новым названием и в другом статусе, стала предметом повышенного внимания и широкого, порой восторженного, обсуждения в западной научной и околонаучной печати.

Возвращаясь к обсуждению константы суперпозиции косинуса, следует заметить, что уравнение $\cos x = x$, получаемое при решении системы функциональных уравнений **E**, относится к числу простейших трансцендентных уравнений, решаемых приближёнными методами, вроде метода касательных Ньютона. Кстати, применением в основном именно этого метода были получены вначале 6,4 млн, затем 12,8 млн десятичных знаком числа ɯ [21; 22]. Это уравнение часто приводится в качестве примера при анализе итерационных процессов и изложении методов численного решения трансцендентных уравнений, а также при исследовании формальных свойств косинуса, в частности его особых точек. И лишь глубокий анализ в рамках логико-математической системы **AGE** позволяет постичь истинную природу указанного числа ɯ, как ФМК одного ранга со знаменитыми π и e.

Одной из наиболее характерных особенностей ФМК является неожиданное появление в различных разделах чистой и прикладной математики, в самых непредусмотренных и непредвиденных обстоятельствах. История математики полна таких сюрпризов, притом в отношении всех фундаментальных констант, не исключая и константу суперпозиции ɯ. И вот уже всесторонне исследуются связи константы суперпозиции косинуса с другими математическими реалиями и число 0,739085… вместе с уравнением для косинуса появляется при анализе процессов перехода от хаоса к упорядоченности, при рассмотрении фракталов, см., например, [27], а также [28], при решении уравнения Кеплера для предельного случая, когда эксцентриситет эллиптической орбиты равен единице [29**]**.

Исходное уравнение $\mathbf{E}_5$ геометрически может интерпретироваться как отображение мнимой и действительной осей координат в одну точку, а содержательно — как переход от произвольной множественности к вполне определённой количественно иной особенности. С позиций синергетики, принципа самоорганизации систем, это можно понимать и как стремление системы к фиксированному конечному состоянию, независящему от её начального состояния. Можно предположить, что новые появления константы ɯ в различных научных дисциплинах, в особенности в области физических явлений, мыслимы при исследовании колебательных процессов, динамических систем, энтропийных процессов, теории хаоса, процессов упорядочивания и самоорганизации физических систем, фазовых переходов, фракталов, турбулентности …

Займёмся теперь константой Ω. Суперпозиция функции e^{-ix} приводит к бесконечному упорядоченному множеству типа

$$x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2,\ x_3 + iy_3,\ \ldots, x_n + iy_n,\ \ldots$$

С увеличением n варианта y_n стремится к нулю, переменная же x_n, а вместе с ней и вся последовательность $x_n + iy_n$, сходится к пределу Ω, совершая при этом колебания уменьшающейся амплитуды возле точки сходимости. Как и константа ɯ, число Ω является, как показано на рисунке, точкой пересечения функции, её аргумента и обратной функции.

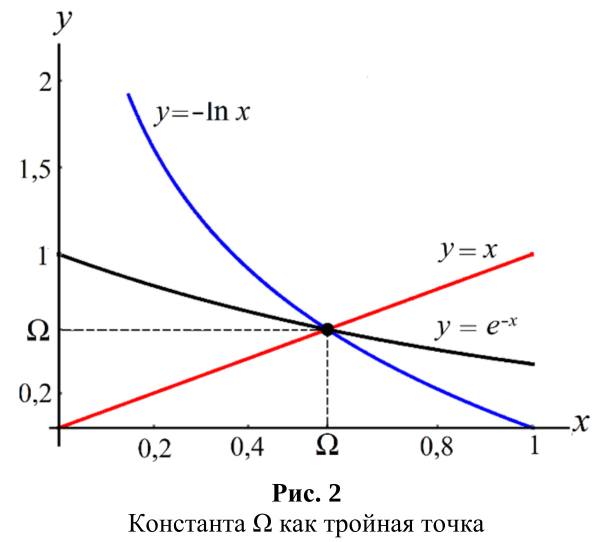

Рис. 2
Константа Ω как тройная точка
пересечения кривых $y = e^{-x}$, $y = -\ln x$ и $y = x$

Константа Ω известна в математике как минимальное значении функции Ламберта W(z), или омега-функции, см. [30], обычно задаваемой функциональным уравнением

$$z = W(z)e^{W(z)}, \text{ или } W(z) = ze^{-W(z)}$$

Функция $W(z)$, определённая для множества всех чисел z, включая 0, и используемая при решении различных трансцендентных уравнений, нашла достаточно широкое применение в математике и за её пределами — в физике и биологии, в механике жидких сред, при анализе динамических систем, в теории алгоритмов и т. д., см. [31].

Если $z = 1$, получаем уравнение

$$W(1) = e^{-W(1)} \equiv e^{-\Omega}$$

являющееся следствием системы уравнений **E**. Таким образом, одно из двух решений уравнения $\mathbf{E}_5$ для действительной и мнимой переменных совпадает с выделенным значением функции $W(z)$, соответствующим простейшему случаю отсутствия множителя z в указанном уравнении. В этом смысле число $W(1)$ может считаться первенцем бесконечного семейства чисел $W(z)$.

Следует также отметить, что пути, ведущие к омега-константе, весьма различны. В то время как в последнем уравнении экспонента задана с самого начала и задача сводится лишь к нахождению различных значений $W(z)$ в зависимости от значений переменной z, в общем случае функционального уравнения $\mathbf{E}_5$ неизвестными «величинами» наряду с ɯ и Ω являются функции cos z и e^{-z}, причём значения констант суперпозиции от конкретных значений z никак не зависят. Остаётся добавить, что получение приближённого десятичного значения константы Ω на калькуляторе ненамного сложнее чем в случае константы ɯ. Взяв произвольное число, надо производить над ним одну за другой операции e^x и $1/x$ до тех пор, пока число 0,56714 32904… не появится на дисплее с максимальной для данного калькулятора точностью.

Заключение

Подведём итоги в форме расширенного резюме. Понятие числа, возникшее ещё в первобытном обществе, относится к числу основных в математике и науке. Отличая математическое число, как определяемую совокупностью основных свойств некую сущность, от его численного значения, то есть формы записи числа в различных системах счисления, ставится вопрос об истоках понятия числа и о первичных числах. Проблема исходных чисел, предшествующих в числовой иерархии всем остальным, совсем не так проста, как это казалось на протяжении тысячелетий — со времён пифагорейцев до второй половины XIX века, когда настоящими признавались только натуральныв числа. Однако все попытки метатеоретического обоснования математики на основе доктрины первичности натурального ряда 1, 2, 3,... столкнулись с непреодолимыми трудностями, побудившими искать другие основания для числового множества.

В результате синтеза двух фундаментальных областей научного знания родился логико-математичесий гибрид под названием «логика первого порядка», или «исчисление предикатов», в рамках которого строго определяются основные понятия числовой математики, включая понятия числа, функции и предела. Язык-объект (предметный язык) логики первого порядка содержит в общей сложности 64 формальных символа, составляющих его алфавит: семь логических и три математические операции, нуль, буквы латинского и греческого алфавита, левую и правую скобки, символ |, используемый для получения множества новых переменных. Это те первичные элементы, которые необходимы и достаточны для построения любой аксиоматики, основанной на исчислении предикатов, а всякая другая символика, появление которой неизбежно, хотя бы для сокращения записи и лучшего понимания, относится к метаязыку.

Среди множества аксиоматик числовой и нечисловой природы, которые могут быть построены на основе логики первого порядка, есть обозначаемая через **AG** система аксиом, имеющая интерпретацию на множестве всех комплексных чисел. Поскольку расширение понятия комплексных чисел без отказа от каких-то фундаментальных свойств числа невозможно, других чисел нет, а все остальные «числа» являются объектами другой природы. Следовательно системой **AG** универсальна в том смысле, что охватывается весь числовой континуум. Она содержит семь записанных на языке-объекте аксиом и фиксирует свойства равенства и сложения, сочетательный закон сложения, свойство нуля, вводит коммутативный закон сложения и объект $-a$, противоположный a.

Это и есть основание числовой формальной математики, дальнейшее развёртывание которой связано с необходимостью введения важнейших математических операций умножения, деления и переходом от общего понятия числа к конкретных числам, не выходя за рамки системы **AG**. Числа при этом не могут постулироваться, а должны появиться в результате расширения формальной системы посредством введения недостающих компонентов, необходимых для полного построения базиса формальной математики. Сюда относятся операция умножения, к которой сводится операция деления, период, являющийся функциональным обобщением свойства нуля, и сложная функция, образуемая посредством суперпозиции.

Универсальным методом решения такой задачи, раскрывающим изначально заложенный в системе **AG** потенциал, является система из пяти функциональных уравнений **E**, в которых неизвестными переменными эксплицитно являются функции, а имплицитно — фундаментальные константы. Этими уравнениями, записанными посредством алфавита предметного языка, с использованием сокращений и символов метаязыка, умножение редуцируется к сложению, свойство нуля обобщается на функциональный случай, а суперпозиция функций выражает независимость предельного результата от начального выбора аргументов функции. Решением системы уравнений, без права использовать какие-либо принципы и конструкты кроме имеющихся в системе **AG**, являются комплексные функции экспоненты и логарифма с их производными и шесть констант, к которым добавляется аксиоматически заданный нуль и константа Эйлера, являющаяся отношением логарифма к экспоненте в виде бесконечной суммы с началом в нуле. Что касается обобщающей свойство нуля периода λ, то он является простой комбинацией трёх констант: $\lambda = 2\pi i$.

Комплексные функции e^z и $\mathrm{Ln}\ z$ следует считать исходными, материнскими функциями, а восьмёрку чисел 0, e, π, i, 2, ɯ, Ω, γ — первичными элементами, фундаментальными константами, числовой математики. Следует также отметить, что все ФМК имеют самое широкое применение в математике и за её пределами

Таким образом, не выходя за рамки математической логики и формальной математики, в пределах строгой аксиоматики посредством функциональных уравнений получены «материнские» функции и набор истинных, а не «избранных», «часто встречающиеся» и тому подобное ФМК. При этом, использованы основные ресурсы логико-математического формализма, включая исходные для числовой математики понятия числа, функции и предела.

Пятёрка ФМК 0, e, π, i, 2 вправе считаться исходным началом, *проточислами* числового множества, из которых легко конструировать континуум всех чисел. Что же касается констант γ, ɯ, Ω это как бы мостик между единичным (число) и актуальной математической бесконечностью (интеграл, бесконечная суперпозиция). В широком содержательном, онтологическом смысле константы суперпозиции косинуса ɯ и суперпозиции обратной экспоненты Ω можно понимать как независимость конечного состояния системы от её начальных условий.

Литература

[1] **Рассел Б.** *История западной философии*. Ростов-на-Дону: Феникс, 1998.

[2] **Ван дер Варден Б.Л.** *Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции.* М.: Физматгиз, 1959.

[3] **Стройк Д.Я.** *Краткий очерк истории математики*. М.: Наука, 1984.

[4] **Беркли Дж.** *Трактат о принципах человеческого знания*. В кн.: Дж. Беркли. Сочинения. М.: Мысль, 1976, с. 149−247.

[5] **Грант Аракелян.** *От логических атомов к физическим законам*. Ереван: Лусабац, 2007. ISBN 978-9939-824-03-1. http://www.hrantara.com/Book.pdf

[6] **Гильберт Д., Бернайс П.** *Основания математики*. *Логические исчисления и формализация арифметики*. М.: Наука, 1982.

[7] **Клини С.** *Математическая логика*. М.: Мир, 1973.

[8] **Чёрч А.** *Введение в математическую логику, т. I.* М.: Изд. иностранной литературы, 1960.

[9] **Мендельсон Э.** *Введение в математическую логику*. М.: Наука, 1976.

[10] **Smullyan, R. M.** *First-order Logic.* New York: Dover Publications, 1968.

[11] **Грант Аракелян.** *Фундаментальная теория ЛМФ*. Ереван: Лусабац, 2007
http://www.hrantara.com/Monograph.pdf

[12] **Hrant Arakelian.** *LMP Fundamental Theory.* Yerevan, Sarvard Hrat. LTD, 2010. ISBN 978-99941-31-67-1.
314159 ru/arakelian/arakelian1.pdf

[13] **Steven R. Finch,** *Mathematical Constants*. Cambridge, 2003. ISBN 0-521-81805-2.

[14] *Mathematical constant* // Wikipedia
https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_constant

[15] *Математическая константа* // Академик
https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/3122

[16] **Weisstein, Eric W.** *Constant. From MathWorld* – A Wolfram Web Resource
http://mathworld.wolfram.com/Constant.htm

[17] **Hrant Arakelian.** *The New Fundamental Constant of Mathematics*. Pan-Armenian Scientific Rev., vol. 3, London 1995, p. 18−21.

[18] **Грант Аракелян.** *Фундаментальные математические константы как начало всех чисел и новая ФМК*. «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ. 16330, 03.02.2011.

[19] **Hrant Arakelian.** *New Fundamental Mathematical Constant: History, Present State and Prospects*. Nonlinear Sci. Lett. **B**,1(4) (2011), p.183–193 http://www.nonlinearscience.com/paper.php?pid=0000000113

[20] **Hrant Arakelian.** *How Many Fundamental Constants and Initial Functions are there in Mathematics?* Science and world. 2017, № 12 (52). Vol. I, p, 14–21. ISBN 2308-4804
http://scienceph.ru/d/413259/d/science_and_world_no_12_52_december_vol_i.pdf

[21] **Грант Аракелян.** *Новая фундаментальная математическая константа (с точностью до 6 400 000 знаков после запятой)*. Клуб КОНСТАНТА — CONSTANTA Club —*Математика*
http://www.hrantara.com/NewConstant2.pdf

[22] **Грант Аракелян.** *12,8 млн десятичных знаков константы суперпозиции косинуса*. Клуб КОНСТАНТА — CONSTANTA Club —Математика http://314159.ru/arakelian/arakelian3.pdf

[23] **Аракелян Г.Б.** *Фундаментальные безразмерные величины (Их роль и значение для методологии науки)*. Ереван: Изд. АН, 1981.

[24] **Kaplan S.R.** *The Dottie Number*, Math. Mag. **80**, (2007), 73−74.

[25] **Salov V.**, *Inevitable Dottie Number. Iterals of cosine and sine*, arXiv preprint arXiv:1212.1027 [math.HO], 2012.

[26] *Soluzione di cos(x)=x?* Yahoo answers
https://it.answers.yahoo.com/question/index?qid=20151223135449AA7Pj2B

[27] **Bojar Ondřej.** *Chaos přehledně*
http://chaospace.hyperlinx.cz/index.php?pgid=230

[28] **Weisstein E. W.** *Fixed Point. From MathWorld*
http://mathworld.wolfram.com/FixedPoint.html

[29] *AKiTi Kepler's Equation of Elliptical Motion*, 2004
http://www.akiti.ca/KeplerEquation.html

[30] **Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J.,** and **Knuth D.E.** *On the Lambert W Function*. Advances in Computational Mathematics **5**, 329−359 (1996).

[31] *Omega constant*. Wikipedia
https://en.wikipedia.org/wiki/Omega_constant