Ерохов И.В.

Принципиально важные этапы в развитии теории электрических цепей

Теория «гальванического» электричества началась в 1786 году, когда было открыто явление возникновения разности потенциалов на контакте разных металлов. В 1800 году Алессандро Вольта, проверяя опыты Луиджи Гальвани, пришел к созданию гальванического элемента, что в скором времени закончилось конструированием вольтова столба. Появление более-менее надежного источника электричества привело к развитию экспериментальных работ, которые, чаще всего, повторяли опыты Гальвани по обнаружению «животного электричества». Все казалось простым и доступным, у общества не было запроса на серьезный, научный анализ «гальванических» процессов.

С учетом сказанного выше, можно в полной мере оценить смелость Георга Ома, который назвал свою монографию буквально вызывающе: **«Гальваническая цепь, описанная математически»** [1]. Книга была издана в 1827 году и стала первой научной публикацией, которая определила роль математики при изучении «гальванического» электричества. Надо отметить, что Г. Ом изучал простейшую электрическую цепь, состоящую из одного контура, в котором источник **«гальванического»** электричества подключался к одному или нескольким **«предметам»,** способным проводить ток.

Выбор измерительных приборов для экспериментов был небольшой, так как в начале девятнадцатого века электроскоп был, пожалуй, единственным «серийным» прибором, которым можно было фиксировать наличие потенциала или заряда. Каждое измерение продолжалось довольно долго, в течение этого времени параметры источника изменялись. Это создавало немалые трудности, преодолению которых посвящена значительная часть его книги [1]. Ом не знал, что еще в 1802 году русский академик В.В. Петров изменил положение столба, положил его, и работа источника стала стабильной [2].

Заметим, что, преодолев все трудности экспериментов, Георг Ом, прежде всего, ввел новые понятия. **Разность потенциалов** (зарядов) на концах «проводящего тела» Ом **назвал напряжением**, которое считал причиной **«движения электричества».** Другую величину, силовую характеристику потока носителей заряда, он называл по-разному, в том числе, **«силой электричества».** В результате скрупулёзных и подробных исследований ученый убедился в том, что движение зарядов в любом проводящем предмете, которые он менял, можно описать простой формулой:

$$S = \frac{A}{L}. \qquad (1)$$

где S – величина, характеризующая поток;

A – суммарная величина напряжений;

L – длина «проводящего тела».

Формулу (1) Г. Ом словами описал следующим образом:

«Величина тока в произвольной гальванической цепи прямо пропорциональна сумме всех напряжений и обратно пропорциональна всем редуцированным длинам цепи»,

И далее

«при этом необходимо напомнить, что под редуцированной длиной понимается сумма всех соотношений, принадлежащих однородным частям цепи и состоящих из реальных длин и произведений удельной проводимости на площадь поперечного сечения».

Приведенный текст легко записать в виде формулы:

$$L' = \sum_{i=1,..,n} \frac{L_i}{\gamma_i \cdot s_i}, \qquad (2)$$

где L_i – длина одного из «проводящих тел» контура, [м];

γ_i – удельная проводимость одного из «проводящих тел» контура, [Ом$^{-1}$/м];

s_i – площадь поперечного сечения «проводящих тел» контура, [м^2].

Размерность величины «редуцированная длина» вычисляется ниже:

$$\left[L'\right] = \frac{м}{\left[Ом^{-1}/м\right]\cdot м^2} = Ом .$$

Результаты измерений Г. Ом представлял графически, т.к. считал, что язык геометрии, который успешно использовался в теории статического электричества, поможет ему при создании теории «гальванического» движения, рис.1.

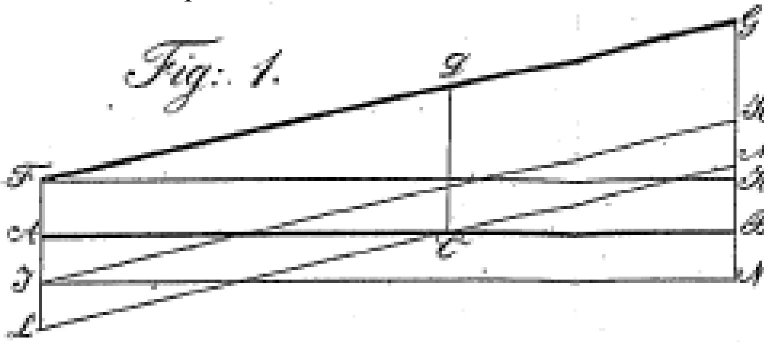

Рис. 1. Потенциальная диаграмма для одного «проводящего тела».

Допустим, что отрезок HF, параллельный отрезку AB, т.е. оси абсцисс, соответствует редуцированной длине L' «проводящего тела» (R), а отрезок GH, параллельный оси ординат, соответствует разности потенциалов, измеренной на «проводящем теле» (U). Отрезок AF, вероятно, представляет контактную разность потенциалов (проводящее тело – проводник). Запишем соотношение отрезков GH, HF как это требуется в формуле (1):

$$S = \frac{A}{L'} = \frac{GH}{HF} = \frac{U}{R} = I . \qquad (3)$$

Подчеркнем, что при осмыслении явлений, вызванных прохождением гальванического электричества, Ом опирался на введенные **понятия**, которые позволили ему записать математическое **выражение** (1). В его работе эксперимент и теория не только дополняли друг друга, они были жестко связаны между собой. Измеренных данных было много, так как изменялись как количество «проводящих тел», так и их электрические свойства. И в этих комплектах данных ученый искал общую закономерность, так как считал, что механизм прохождения электричества должен быть одинаковым для любого из составленных им контуров.

Итак, физик Г. Ом считал важным этапом своей работы анализ явления на уровне понятий, а математику применял как необходимый аппарат для фиксации экспериментально найденной закономерности.

После публикации книги знание закона Ома стало признаком успешного ученого. Закон начали применять для проверки известных схем и зависимостей. Так, например, Чарльз Уитстон решил проверить все известные методы измерения электрического сопротивления, в том числе, и схему «баланса Кристи» [3]. Подобное желание было и у студента Кирхгофа, который решил проверить известное соотношение между величинами сопротивлений схемы Кристи [4].

Уравнения, описывающие контур или узел, различные ученые использовали в своих исследованиях намного раньше Кирхгофа. По этой причине Максвелл не признавал его заслуг, считая уравнение первого закона принципом непрерывности потока, а уравнение второго закона теории электрических цепей балансом напряжений в контуре, открытым Георгом Омом. Однако только Кирхгоф решил определить эти уравнения как понятия. В статье [4] каждое из них он ввел в теорию через доказательство теоремы. Кирхгоф не отрицал результатов Г. Ома, цитировал его в статье, т.е. можно сказать, что содержание работы [1] он знал.

В следующей статье [5] Кирхгоф впервые приводит систему уравнений электрической цепи:

«Поскольку теоремы 1 и 2 должны дать необходимое число уравнений для определения величин $I_1, I_2, \ldots, I_n$, эти уравнения, как было доказано выше, должны иметь следующий вид:

$$
\begin{array}{llllllll}
\alpha_1^1 w_1 I_1 + & \alpha_2^1 w_2 I_2 + & \ldots & +\alpha_n^1 w_n I_n = & \alpha_1^1 E_1 + & \alpha_2^1 E_2 + & \ldots & +\alpha_n^1 E_n \\
\alpha_1^2 w_1 I_1 + & \alpha_2^2 w_2 I_2 + & \ldots & +\alpha_n^2 w_n I_n = & \alpha_1^2 E_1 + & \alpha_2^2 E_2 + & \ldots & +\alpha_n^2 E_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_1^\mu w_1 I_1 + & \alpha_2^\mu w_2 I_2 + & \ldots & +\alpha_n^\mu w_n I_n = & \alpha_1^\mu E_1 + & \alpha_2^\mu E_2 + & \ldots & +\alpha_n^\mu E_n \\
\alpha_1^{\mu+1} I_1 + & \alpha_2^{\mu+1} I_2 + & \ldots & +\alpha_n^{\mu+1} I_n = & 0 & & & \\
\alpha_1^{\mu+2} I_1 + & \alpha_2^{\mu+2} I_2 + & \ldots & +\alpha_n^{\mu+2} I_n = & 0 & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\
\alpha_1^n I_1 + & \alpha_2^n I_2 + & \ldots & +\alpha_n^n I_n = & 0 & & &
\end{array}
\qquad (4)
$$

где часть коэффициентов α равна +1, часть -1 и 0, а μ означает то же, что и раньше».

Удивительно, что понятие матрицы инциденций Кирхгоф практически ввел в теорию электрических цепей в 1847 году, благодаря упорядоченной форме записи уравнений и коэффициентам α. Следует заметить, что к тому времени это понятие еще не было введено в математику.

Современная теория рассматривает каждую подматрицу системы уравнений как самостоятельную часть математической модели схемы (4). Интересно, что полную систему уравнений Кирхгофа большинство учебников по теории электрических цепей даже не упоминают, поэтому приведем простой пример.

Пример. То, что плохо видно в записи уравнений системы (4), можно сделать наглядным при рассмотрении простого примера.

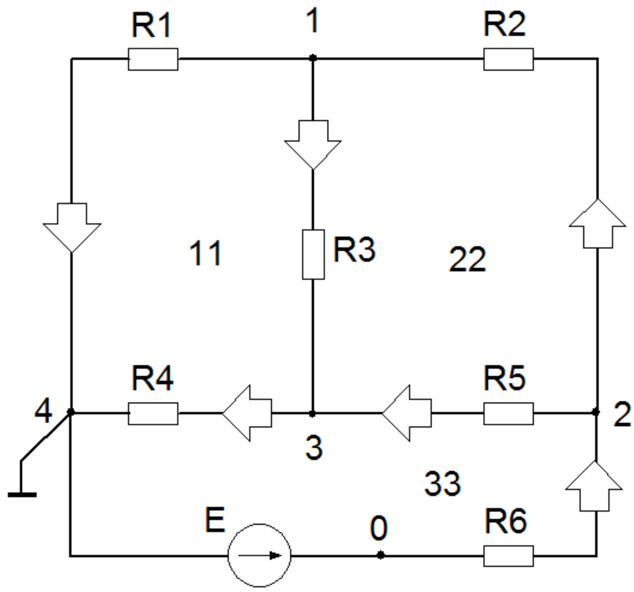

Рис. 2. Схема моста Уитстона.

Уравнения (4) схемы рис.2, составленные в соответствие с принципами, изложенными в работе [5], будут иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & -R_3 & -R_4 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & R_6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^b \\ I_2^b \\ I_3^b \\ I_4^b \\ I_5^b \\ I_6^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Зададим параметры резисторов и источника схемы рис.2:

$R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 15$ Ом; $R_3 = 20$ Ом; $R_4 = 25$ Ом; $R_5 = 30$ Ом; $R_6 = 35$. $E = 20$ В.

Подставим эти данные в систему уравнений (5):

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & -20 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 20 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 30 & 35 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Применяя метод Крамера, получим решение системы уравнений (6):

$I_1 = \dfrac{44500}{165625} = 0,268679$ А; $I_2 = \dfrac{43000}{165625} = 0,259623$ А; $I_3 = \dfrac{-1500}{165625} = -0,00906$ А;

$$I_4=\frac{19000}{165625}=0{,}114717\text{ А};\ I_5=\frac{20500}{165625}=0{,}123774\text{ А};\ I_6=\frac{63500}{165625}=0{,}383396\text{ А}.$$

Обычно, матрицей сопротивлений называют ту, которая входит в систему уравнений, составленную по методу контурных токов. Приведем эту систему уравнений (в численном виде), составленную для схемы рис.2:

$$\begin{bmatrix}55 & -20 & -25\\ -20 & 65 & -30\\ -25 & -30 & 90\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{11}\\ I_{22}\\ I_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 20\end{bmatrix} \qquad (7)$$

В процессе решения системы уравнений (7) получены численные значения переменных, которые называют контурными токами:

$$I_{11}=0.248479A,\quad I_{22}=0.259623A,\quad I_{33}=0.383396A.$$

Действительно, если считать ветви 3, 4, 5 деревом, а ветви 1, 2. 6 – связями, то, добавляя к дереву ветвь 6, мы получаем контур 33, в котором потечет ток. Значения тока ветви 6 и тока контура 33 будут одинаковыми. Таким образом, токи ветвей 1, 2, 6 совпадают с токами контуров 11, 22, 33:

$$I_1=I_{11},\ \ I_2=I_{22},\ \ I_6=I_{33}.$$

Сравнивая значения токов, которые получены разными методами, можем заключить, что они равны. Остальные токи ветвей получаются следующим образом:

$$I_3=I_{22}-I_{11},\ \ I_4=I_{33}-I_{11},\ \ I_5=I_{33}-I_{22}.$$

Несмотря на то, что перед статьей [5] была поставлена практическая задача, автор вводит несколько теоретических новаций. Во-первых, схема измерительного моста изображается с помощью ненаправленного графа, а также производятся графические построения, элементами которых являются узловые схемные множества [6]. Во-вторых, без доказательства формулируется принцип взаимности.

Итак, относительно уравнений электрической цепи Г. Кирхгоф сформулировал теоремы, которые придали им надежный статус. Одно из них рассматривается как баланс токов в узле, а второе – как баланс напряжений в контуре. В достижении теоретического результата значительную роль играла математика.

Из матрицы системы уравнений (6) легко выделить:

- матрицу соответствий контур / ветвь

$$B=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ 11\\ 22\\ 33\end{array}. \qquad (8)$$

- матрицу соответствий узел / ветвь

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ 3\end{array}. \qquad (9)$$

Столбцы матриц соответствуют номерам ветвей, а строки – номерам контуров или узлов. Появление матриц инциденций привело к тому, что математика стала играть главную роль в развитии теории электрических цепей.

Приведем показательный пример, когда формальная процедура дает результат, к которому в прошлом приходили со значительно большей затратой сил:

$$\left[Z\right]=\left[B\right]\cdot\left[Z_0\right]\cdot\left[B\right]^t, \qquad (10)$$

где $\left[Z\right]$ – матрица системы уравнений метода контурных токов;

$\left[Z_0\right]$ – диагональная матрица сопротивлений элементов цепи.

Отметим, что **уравнения Ома и Кирхгофа**, а также **формула мощности** были главным багажом теории электрических цепей не один десяток лет.

В пятидесятых годах двадцатого века был получен принципиально новый теоретический результат. Сначала было сформулировано понятие мгновенной мощности [7]:

«Мгновенной мощностью **называют произведение значений напряжения на ток».**

Откуда следовало:

«сумма мгновенных мощностей, доставляемых действующими в схеме источниками, равна сумме мгновенных мощностей, потребляемых или запасаемых остальными элементами схемы».

Казалось, что ничего нового в приведенной трактовке закона сохранения энергии нет. Но это мнение моментально изменялось после того, как читатель обнаруживал некоторую особенность текста. В нем намеренно не уточнялось, что перемножаемые напряжения и токи должны (не должны) соответствовать одному моменту времени.

Приведенная выше формулировка закона сохранения мощности представлена в формальном виде следующими выражениями:

$$\left[\overline{I}^b\right]^t\left[\overline{E}\right]=\left[\overline{I}^b\right]^t\left[\overline{U}\right], \qquad (11)$$

$$\left[\overline{U}^b\right]^t\left[\overline{J}\right]=\left[\overline{U}^b\right]^t\left[\overline{I}\right], \qquad (12)$$

где $\overline{I}^b$, $\overline{U}^b$ – вектора тока и напряжения ветвей;

$\overline{I}$, $\overline{U}$ – вектора тока и напряжения элементов цепи;

$\overline{J}$, $\overline{E}$ – вектора источников тока и напряжения.

Напомним, что равенства (11), (12) получены только с помощью законов Кирхгофа.

Конечно, для цепей постоянного тока понятие мгновенной мощности можно считать лишним, но для цепей переменного тока оно было абсолютно необходимым. Экспериментально получить мгновенные значения напряжения и тока для любого момента времени даже сегодня является сложной задачей, т.к. надо на протяжении времени работы схемы одновременно измерять и фиксировать как токи, так и напряжения на всех элементах схемы. Но даже, если это удалось бы сделать, то будет очень трудно доказать соответствие пар значений одному и тому же моменту времени, т.к. каждый измерительный прибор имеет свою, индивидуальную инерционность.

Через год в Нидерландах публикуется статья [8], содержание которой сходно с работой [7]. Различие лишь в том, что скрытый смысл пионерской работы оформлен в виде теоремы:

«В *цепи произвольной конфигурации предположим существование токов ветвей* i *таких, что для каждого узла выполняется равенство* $\sum i=0$, *предположим существование напряжений ветвей* v *таких, что для каждого контура выполняется равенство* $\sum v=0$ *и для каждой ветви определим положительное направление тока от + к – обозначенной полярности, рис. 5.2.* ***Тогда выполняется уравнение*** $\sum i\cdot v=0$, ***где суммирование проведено по всем ветвям цепи».***

Запишем результат в принятых нами обозначениях:

$$\bar{I}_b^t \cdot \bar{U}_b^* = 0, \qquad (13)$$

где $\bar{I}_b^t$ – транспонированный вектор токов ветвей;

$\bar{U}_b^*$ – вектор напряжений ветвей, элементы которого не согласованы по времени с измерением токов ветвей.

Уравнение (13) является балансом, псевдо- мощностей, только при единственном наборе значений, соответствующих закону Ома, оно будет представлять баланс реальных мощностей элементов цепи. Особо отметим, что **определение мгновенной мощности** в публикации Теллегена **отсутствует.** Оно «возникает» стихийно при рассмотрении схемы с источником переменного тока. Особенностью статьи является то, что ученый старается показать связь своей теоремы с принципом взаимности.

Суть теоремы (13) наиболее понятно изложена в публикации [9], в которой для измерений токов и напряжений ветвей было предложено использовать две разные схемы, но с одинаковым графом. Кроме этой новации, в работе были введены понятия операторов Кирхгофа:

«Пусть Λ'- оператор Кирхгофа по току, действие которого по отношению к множеству токов i_α ветвей, принадлежащих цепи из b ветвей, заключается в создании нового множества «токов $\Lambda' i_\alpha$» для b ветвей, которое подчиняется первому закону Кирхгофа. Пусть также Λ''- оператор Кирхгофа по напряжению, который может произвести действие над множеством напряжений u_α ветвей, превращая его в новое множество «напряжений $\Lambda'' u_\alpha$» для b ветвей, подчиняющихся второму закону Кирхгофа».

Используя введенные понятия, записывается равенство:

$$\sum_\alpha \Lambda' i_\alpha \Lambda'' u_\alpha = \sum_p \Lambda' i_p \Lambda'' u_p, \qquad (14)$$

где $i_\alpha\, u_\alpha$ – мгновенная мощность, поступающая в ветви схемы;

$i_p u_p$ – мгновенная мощность, поступающая от источников;

Λ', Λ'' – операторы Кирхгофа, изменяющие значения переменных.

Операторы Кирхгофа по току, изменяя значения токов в каждой ветви, не нарушают первого закона для узлов цепи. Операторы Кирхгофа по напряжению, изменяя значения напряжений каждой ветви, не нарушают выполнение второго закона в контурах цепи. Выражение (14) получило название обобщенной формы теоремы Теллегена. Структурно, без операторов Кирхгофа, оно полностью соответствует источнику [7].

Подчеркнем, что в статье [9] понятие мгновенной мощности используется в тексте уже при описании уже первой формулы, но ссылки на источник нет. Конечно, авторы статьи могли сослаться на то, что в их странах книга Зеляха не продавалась. Но тогда возникает сомнение в качестве специалистов цитируемой статьи, которые за восемнадцать лет, прошедших после публикации, не смогли ничего узнать о монографии Зеляха [7]. В конце концов, в библиотеке MIT (Массачусетский технологический институт), по месту работы Пенфильда, есть большой раздел книг на русском языке.

Напомним, что у научных результатов нет «национальности» и было бы справедливо признать заслуги советского ученого, который раньше Теллегена обнаружил то, что потом было названо теоремой. Мне кажется, что следует включить его имя в название теоремы, которая создана двумя учеными. Теорема должна носить имена ее создателей Зеляха и Теллегена.

Итак, новый результат теории электрических цепей получен только благодаря введенному понятию мгновенной мощности и представлению значений токов и напряжений ветвей в виде множеств.

Отметим, что теорема Зеляха-Теллегена пока существует в качестве интересного феномена, хотя касается основ теории электрических цепей. Трудно объяснить такое положение дел сегодня, когда теория цепей успешно развивается в связи с созданием комплексов программ машинного анализа схем. Был, например, разработан метод переменных состояния, к которому мы и обратимся.

Метод переменных состояния использует следующую систему уравнений [10]:

$$\begin{cases} \left[\bar{X}'\right]=\left[A\right]\left[\bar{X}\right]+\left[B\right]\left[\bar{u}\right] \\ \left[\bar{Y}\right]=\left[C\right]\left[\bar{X}\right]+\left[D\right]\left[\bar{u}\right] \end{cases}, \qquad (15)$$

где $\bar{X}$ – вектор переменных состояния: $i(L),\ u(C)$;

$\bar{X}'$ – вектор производных (по времени) переменных состояния;

$\bar{u}$ – вектор источников;

$\bar{Y}$ – вектор переменных схемы, за исключением переменных состояния;

$\left[A\right]$, $\left[B\right]$, $\left[C\right]$, $\left[D\right]$ – матрицы, составленные по графу схемы.

Составление системы уравнений (15) начинается с выбора графа схемы замещения. Основные требования к выбору графа состоят в том, чтобы индуктивности располагались в ветвях связи, а емкости – в ветвях дерева. Таким образом, токи индуктивностей становятся контурными токами, а напряжения емкостей участвуют в формировании напряжений (потенциалов) узлов электрической цепи. Из этого следует, что переменные состояния наследуют свойства контурных токов и узловых напряжений.

Контурный ток, как **вспомогательную величину**, ввел еще Максвелл, чтобы облегчить расчет переменных электрической цепи. Известно, что значения контурных токов связаны с величинами токов ветвей следующим образом:

$$\bar{I}^b = B^t \bar{I}_{kk}\,. \qquad (16)$$

В источнике [10], этот ток был определен как **независимая переменная**, а в учебнике [11] – как ток **главных ветвей** схемы. Другими словами, авторы этих книг считали, что значения контурных токов могут быть независимыми от определенных обстоятельств.

В статье [12] было показано, что значения элементов вектора контурных токов можно **назначать произвольно**. Несмотря на такой выбор, при расчете токов ветвей по формуле (16) получаются величины, отвечающие первому закону Кирхгофа. Чтобы избежать ошибок при вычислениях этих значений следует использовать фундаментальную матрицу контурных инциденций.

Фундаментальную контурную матрицу получаем из матрицы (8) с помощью простой перестановки столбцов 3 и 6:

$$B_f = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{matrix} \end{array}$$

Матрица соответствий контур/ветвь становится блочной

$$B_f = \left[E \quad K\right],$$

где первый блок есть диагональная, единичная матрица E.

Назначим произвольные значения контурным токам и произведем вычисления по формуле (16):

$$\bar{I}_b = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Напряжения ветвей связаны с величинами напряжений (потенциалов) узлов следующим образом:

$$U^b = A^t \bar{\varphi}_n. \qquad (17)$$

Отметим, что фундаментальная матрица узловых инциденций также состоит из двух блоков:

$$A_f = \begin{bmatrix} F & E \end{bmatrix}.$$

Неединичный блок фундаментальной узловой матрицы получается из аналогичного блока контурной матрицы по следующей формуле [13]:

$$F = -K^t.$$

Фундаментальная матрица соответствий узел/ветвь для схемы рис.2 будет иметь следующий вид:

$$A_f = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{array}.$$

Назначим произвольные значения напряжениям узлов и произведем вычисления по формуле (17):

$$\bar{U}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ -13 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Произведем проверку полученных значений токов ветвей. Система уравнений для токов узлов следует из матрицы A_f:

$$\begin{cases} I_1 + I_4 - I_6 = 0 \Rightarrow 5 - 2 - 3 = 0 \\ I_2 + I_5 - I_6 = 0 \Rightarrow 4 - 1 - 3 = 0 \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow 5 - 4 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Произведем проверку полученных значений напряжений ветвей. Система уравнений для напряжений контуров следует из матрицы B_f:

$$\begin{cases} U_1 - U_3 - U_4 = 0 \Rightarrow 14 - 6 - 8 = 0 \\ U_2 + U_3 - U_5 = 0 \Rightarrow -1 + 8 - 7 = 0 \\ U_4 + U_5 + U_6 = 0 \Rightarrow 6 + 7 - 13 = 0 \end{cases}.$$

Проверим баланс мощностей ветвей схемы рис.2:

$$\bar{I}_b^t \cdot \bar{U}_b = \times \begin{matrix} 5 & 4 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ 14 & -1 & -13 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} = 70 - 4 - 39 - 12 - 7 - 8 = 70 - 70 = 0 .$$

Узловые напряжения (потенциалы) являются такими же независимыми переменными, как и контурные токи.

Запишем выражение теоремы Зеляха – Теллегена (13), используя эти переменные:

$$\bar{I}_b^t \cdot \bar{U}_b^* = \bar{I}_{kk}^t B_f \cdot A_f^t \bar{\varphi}_{nn} = 0, \qquad (18)$$

где $\bar{\varphi}_{nn}$ – вектор напряжений (потенциалов) узлов.

Интересно, что произведение матриц из формулы (18) равно нулевой матрице, что легко проверить.

Первое уравнение системы (15) является дифференциальным и его решение производится с помощью численных методов интегрирования. Известно, что до начала интегрирования необходимо оценить запас энергии в реактивных элементах схемы, т.е. определить начальные токи индуктивностей и начальные напряжения емкостей. На практике установить точные значения начальных условий не всегда удается. Определенное количество начальных условий назначается случайно, т.е. по интуиции специалиста, ведущего расчет на ЭВМ. Другими словами, значения начальных условий безусловно обладают погрешностью, которая становится погрешностью переменных состояния электрической цепи.

Эта погрешность является неустранимой, а факт ее наличия скрытным, т.к. значения токов и напряжений ветвей, получаемых с помощью второго уравнения системы (15), будут всегда соответствовать законам Кирхгофа (16), (17). Кроме того, уравнение баланса мощностей элементов схемы в данном случае не может служить целям проверки результатов расчета, т.к. оно совпадает с формулой теоремы Зеляха – Теллегена (18), а, следовательно, всегда будет равно нулю.

Итак, на протяжении двух веков теория электрических цепей постоянно развивалась, откликаясь на вызовы «технической революции». В статье рассматриваются три этапа развития основ математического моделирования схем. На первом этапе, который назовем именем **Ома**, изучалась простейшая схема – контур. На втором этапе, который назовем именем **Кирхгофа**, модель схемы усложнилась, была предложена система уравнений электрической цепи. Систему уравнений можно было записать для цепи любого размера, но отметим другой аспект процесса моделирования – на обоих этапах схема изучалась как феноменальный объект.

На третьем этапе, который назовем именем **Зеляха**, было введено понятие мгновенной мощности, с которым в теорию вошел принцип дискретности. Удивительно, но о численном интегрировании тогда даже речи не было. Скажем больше, даже матричное исчисление было освоено далеко не всеми специалистами теории электрических цепей. В этих условиях представление значений переменных числами, объединенными в упорядоченные множества, было очень смелым поступком.

Теорема Зеляха была доказана с помощью матричного исчисления. Как и в определении мгновенной мощности, результат не был заявлен открыто. О нем надо было догадаться, развивая мысль автора. Единственная подсказка состояла в том, что в процессе доказательства закон Ома не использовался.

Остается подвести итог. Метод переменных состояния, на который возлагали большие надежды, их не оправдал. Оказалось, что для составления системы дифференциальных уравнений необходимо в схеме иметь определенное количество реактивных элементов. Никто не старался определить их число, но, вероятно, на практике такие случаи встречались, когда электрическая схема не содержала необходимого числа реактивных элементов. Достаточно внимательно прочитать цитату из книги [10], чтобы понять это:

«**В любой схеме** с сосредоточенными параметрами имеют место три основных типа уравнений: … для **каждого узла**, … **каждого контура** и уравнения вольт-амперной характеристики для **каждого из элементов** … . Если с их помощью **удается получить** систему линейно независимых дифференциальных уравнений первого порядка, то говорят, что для данной схемы **существует** ***уравнение переменных состояния в нормальной форме***:

$$x' = f\left(x,t\right), \qquad (19)$$

где x – набор из n независимых **вспомогательных** переменных**».**

Но даже, если удалось составить систему уравнений и решить ее, то трудно было установить величину погрешности этих вычислений. Уравнения Кирхгофа и баланса мощностей не в состоянии определить присутствие погрешности в результатах расчета.

История распорядилась так, что замечательное уравнение Георга Ома оказалось ненужным для вывода теоремы Зеляха-Теллегена. Только уравнения Кирхгофа сохранили свою актуальность. Однако благодаря операторам Кирхгофа система уравнений электрической цепи перестала представлять единственную схему, т.к. возникло множество схем одного графа. Понятие мощности было расширено термином псевдо-мощность, а уравнение баланса потеряло свое традиционное значение.

Верификация результатов оказалась возможной только по чисто резистивным ветвям, токи и напряжения которых определяются в процессе расчета. Применяя закон Ома, мы можем определить сопротивление резистора и сравнить полученное значение с его номиналом в схеме замещения. Максвелл был бы очень рад тому, что именно уравнение Ома позволяет произвести проверку результатов расчета, т.к. считал это соотношение фундаментальным.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Ohm G.S. Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. – T.H. Riemann: Berlin, 1827. – 247s.
2. Петров В.В. Известие о Гальвани-Вольтовских опытах (1803). // В кн. Избранные труды по электричеству. – М.: Гос. Изд. Технико-теоретической лит., 1956. – 11 – 94 стр.
3. Wheatston Ch. Beschreibung verschiedener neuen Instrumente und Methoden zur Bestimmung der Constanten einer Voltaschen Kette. / Ann. Phys. und Chem. 1844, Band 62, 4-te St., s. 499-543.
4. Kirchhoff G. Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige./ Ann. Phys. und Chem. 1845, Band 64, 4-te St., s. 497-514.
5. Kirchhoff G. Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. / Ann. Phys. und Chem. 1847, Band 72, 2-te St., s. 497-508.
6. Максимович Н.Г. Методы топологического анализа электрических цепей. – Львов: Изд. Львов. Универ., 1970. – 258с.
7. Зелях Э.В. Основы общей теории линейных электрических схем. – М.: Изд. АН СССР, 1951. – 334с.
8. Tellegen B.D.H. A general network theorem, with applications. // Philips Res. Rept., vol.7, pp. 259 – 269, August 1952.
9. P. Penfield, R. Spence, S. Duinker A Generalized Form of Tellegen`s Theorem. // IEEE Transact. on circuit Theory, v. CT-17, №3, 1970, p.302-305.
10. Чуа Л.О., Лин П.М. Машинный анализ электронных схем. – М.: Энергия, 1980. – 640с.
11. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высш. шк., 2000. – 575 с.

12. Ерохов И.В. Об операторах Кирхгофа, введенных Пенфилдом./ Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Междунар.сб.науч. тр.- Вып.14 / Под ред.В.В.Филаретова.- Ульяновск: УлГТУ, 2017. – с.6-13.
13. Stern T.E. On the equation of Nonlinear Networks/ T.E. Stern// IEEE Transaction on Circuit Theory. – 1966. – vol. CT-13, №1, pp. 74 – 81.