Международный союз общественных объединений
«ВСЕМИРНЫЙ ФОНД ПЛАНЕТЫ ЗЕМЛЯ»

Л. Е. Чулков

НЕЕВКЛИДОВЫ КОНЦЕПЦИИ В ГЕОМЕТРИИ И АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ИМ ТЕОРЕМА ПРОКЛА-ДАЛАМБЕРА

МОСКВА 2002

Международный союз общественных объединений
«ВСЕМИРНЫЙ ФОНД ПЛАНЕТЫ ЗЕМЛЯ»

Л. Е. Чулков

НЕЕВКЛИДОВЫ КОНЦЕПЦИИ В ГЕОМЕТРИИ И АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ИМ ТЕОРЕМА ПРОКЛА-ДАЛАМБЕРА

МОСКВА 2002

УДК 514
ББК 22.151.1
Ч89

Чулков Л.Е. НЕЕВКЛИДОВЫ КОНЦЕПЦИИ В ГЕОМЕТРИИ И АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ИМ ТЕОРЕМА ПРОКЛА-ДАЛАМБЕРА. — М.: Издательство «Всемирный фонд планеты Земля», 2002. — 25 с.
ISBN 5-93897-009-1

Фрагментарно изложена история двухтысячелетних дискуссий, доказательств и "опровержений", касающихся пятого постулата Евклида.

Перечислены основные концепции неевклидовой геометрии Лобачевского, вступающие в непримиримое противоречие с геометрией Евклида, несовместимые с элементарной геометрической логикой и многовековой Человеческой практикой. На исторических примерах показана неубедительность, декларативность аргументов, выдвигаемых представителями неевклидового мышления против математиков, доказывавших пятый "постулат" Евклида средствами "абсолютной геометрии".

Доказана классическая теорема Прокла-Даламбера, свидетельствующая о том, что лишь геометрия Евклида адекватно количественно и качественно характеризует объекты материального макромира.

УДК 514
ББК 22.151.1

ISBN 5-93897-009-1

Солнечной спутнице моей жизни,
моей жене Галине Алексеевне
посвящаю. *Л. Чулков*

Неевклидовы концепции в геометрии и альтернативная им теорема Прокла-Даламбера

Беседы со многими образованными людьми на данную тему убедили меня в том, что подавляющее большинство инженеров, педагогов и даже научных работников имеют очень слабое и, как правило, искаженное представление о неевклидовой геометрии Лобачевского, не говоря уже про геометрию Римана. Поэтому для начала считаю целесообразным дать хотя бы самый минимум общедоступной информации по данному предмету.

Как известно, родоначальником той геометрии, которую каждый житель планеты Земля изучает в школе, был величайший геометр Древней Греции Евклид (330-275 до н.э.). В своих "Началах" он сформулировал основные определения, постулаты и аксиомы, на которых и было затем воздвигнуто всё здание элементарной геометрии. Примерно с середины XIX века математики формально отринули евклидовы определения геометрической точки, прямой и плоскости и оставили эти основополагающие понятия "без определения". Кроме того, были подвергнуты лёгкой критике, а затем дополнены евклидовы постулаты и аксиомы, между которыми математики давно уже не делают различия, называя те и другие "аксиомами".

Но основную неудовлетворенность почти со времён Евклида вызвал постулат, который в "Началах" значился под номером 5 — "постулат параллельности". Всевозможные доказательства истинности этого "постулата" и дискуссии об их строгости со значительными перерывами продолжались до середины XIX века, пока задающие тон математики не пришли к выводу, что доказать его, якобы, невозможно.

Евклид этот "постулат" сформулировал так: "Если какая-нибудь прямая пересекает две другие прямые, образуя с последними по одну и ту же сторону такие внутренние углы, что сумма их меньше двух прямых углов, то обе прямые, при продолжении в ту же сторону, пересекутся".

В соответствии с этим Евклид называл "две прямые, лежащие в одной плоскости, параллельными, если они, будучи продолжены сколь угодно далеко, друг с другом не встречаются". Пятый "постулат" Евклида равносилен следующему утверждению: "Через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой". Последнее утверждение легко доказывается (как теорема) на основе пятого "постулата", принимаемого в качестве аксиомы. Таким образом, эти два утверждения взаимно обратимы: любое из них может служить достаточным основанием для доказательства другого.

Как уже отмечалось, начиная с первых математиков древности и заканчивая Лобачевским (включительно), предпринимались неоднократные и, на мой взгляд, не всегда безуспешные попытки доказать пятый "постулат" Евклида на основе остальных его постулатов и аксиом. Вот перечень тех из наиболее известных математиков, которые были убеждены, что безукоризненно доказали пятый "постулат", опираясь на непререкаемые объективные, самодостаточные истины, именуемые аксиомами:

Прокл (410 — 485), Аганис (VI век н.э.), Насир-Эддин (1201 — 1274), Коммандин (1509 — 1575), Клавий (1537 — 1612), Катальди (XVII век), Борелли (1608 — 1679), Джордано Витале (1633 — 1711), Валлис (1616 — 1703), Саккери (1667 — 1733), Лежандр (1752 — 1833), Вольфганг Болиаи (1775 — 1856).

Ряд других крупных математиков, не считавших известные им доказательства в полной мере удовлетворительными, тем не менее, были убеждены в априорной "божественной истинности" пятого "постулата", а посему не исключали возможность его строгого доказательства, хотя при этом могли не знать некоторых старинных доказательств. К названной категории математиков принадлежали Ламберт (1728 — 1777), Даламбер (1717 — 1783), Лагранж (1736 — 1813), Карно (1753 — 1823), Лаплас (1749 — 1827), Фурье (1768 — 1830), Тауринус (1791 — 1887).

До 1823 года Лобачевский также находил почти оригинальные доказательства пятого "постулата".

Эти доказательства, судя по архивным документам, конспектам лекций, читанных студентам Казанского

Университета, не казались тогда Лобачевскому недостаточно логичными. Но в 1823 году в рукописи раскритикованного академиком Фуссом и потому не изданного учебника геометрии Лобачевский становится на другую точку зрения [1, с. 15]: "Строгого доказательства сей истины, — говорит Лобачевский о пятом "постулате" Евклида, — до сих пор не могли сыскать; какие были даны, могут называться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле математическими доказательствами". На чём же основано было столь резкое изменение мнения Лобачевским в отношении (как он правильно обронил) истины, впервые высказанной Евклидом? Почему Лобачевский поставил себя в положение судии тех многих выдающихся математических умов, которые не сомневались в логической безупречности сделанных ими доказательств? Быть может Лобачевский доказал ложность евклидовой истины, а следовательно, и всей его геометрии? Ничуть не бывало. Просто аналитические выкладки, проделанные Лобачевским в 20-ых 30-ых годах, вступили в непримиримое противоречие с элементарной геометрической логикой и графикой, наблюдаемой в повседневной практике, на чем Евклид и строил свою общепринятую геометрию.

И Лобачевский в споре повседневной практики с его рафинированными математическими "находками" после 1826 года окончательно и бесповоротно встал на сторону "чистой теории". Он, очевидно, не мог даже допустить мысли о том, что предельная математическая абстракция может завести исследователя в ложные, вздорные лабиринты, из которых уже нет выхода в реальный мир, в особенности, если математик оперирует с мнимыми параметрами, на что впервые обратил внимание Павел Флоренский в своем труде МНИМОСТИ В ГЕОМЕТРИИ.

Заняв названную позицию, Лобачевский заменяет пятый "постулат" Евклида следующим постулатом: "Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести в плоскости, определяемой этой точкой и прямой, более одной прямой, не пересекающей данную прямую".

Отсюда непосредственно вытекает "существование" бесконечного множества прямых, проходящих через одну и ту же точку и не пересекающих данную прямую. Опираясь на этот тезис и оставив без изменения остальную аксиоматику Евклида, Лобачевский аналитически разработал свою, как считают, "непротиворечивую", неевклидову геометрию, не поддающуюся графической иллюстрации.

Вот главные из вопиющих выводов этой геометрии [1 —4]:

1. "Два перпендикуляра к одной и той же прямой, по мере удаления от этой прямой, расходятся неограниченно".
2. "Сумма углов прямолинейного треугольника меньше 180° (в неевклидовой геометрии Римана эта сумма больше 180° - Л.Ч.), и эта сумма не есть величина постоянная для разных треугольников; чем больше площадъ треугольника, тем больше сумма его углов разница от 180° в сторону уменьшения".
3. "Если в выпуклом четырёхугольнике три угла прямые, то четвёртый угол острый" (т.е. "непротиворечивая" геометрия Лобачевского отвергает существование прямоугольников — Л.Ч.).
4. "Если углы одного прямолинейного треугольника соответственно равны углам другого аналогичного треугольника, то такие треугольники равны (следовательно, геометрия Лобачевского не признаёт подобия геометрических фигур — Л.Ч.).
5. "Геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от какой-нибудь прямой линии на этой плоскости, есть некоторая кривая линия".

Очевидно, озадаченный сам такими "диковинными находками", Лобачевский поначалу назвал свою геометрию "воображаемой", что полностью соответствовало действительности. Правда, он тут же и оговорился [3], что "Воображаемая Геометрия обнимает употребительную Геометрию (то бишь — евклидову), как частный случай...". Но при этом вынужден был добавить [3]: "Предположение, что сумма углов треугольника менее двух прямых, может быть допущено только в применении к Аналитике, потому что измерения в природе не открывают нам в этой сумме ни малейшего отклонения от половины окружности" (от 180° — Л.Ч.). Это было заявлено Лобачевским в его "Воображаемой Геометрии" в 1835 году [3]. При этом он, вероятно, запамятовал, что в "ОБОЗРЕНИИ

ПРЕПОДАВАНИЯ" 1824 года он говорил, что основанием математики «должны быть несомнительные для нас истины, первые понятия о природе вещей, которые, будучи раз приобретены, сохраняются навсегда...». В дальнейшем он уточняет этот тезис: "Первыми данными без сомнения будут всегда те понятия, которые мы приобретаем в природе посредством наших чувств".

В этой связи невольно напрашиваются вопросы ко всем последователям Лобачевского: "Где в природе посредством своих утонченных чувств вы, господа, приобрели понятие о четырёхугольнике с тремя прямыми и одним острым углом?", "Где в природе вы обнаружили основания для полного отказа от подобия треугольников, окружностей и т.п.?".

Лобачевский, разумеется, не был первооткрывателем неевклидовых аналитических концепций. До него в этой "игре ума", как выразился Пуанкаре, упражнялись Карл-Фридрих Гаусс (1777 — 1855), Фердинанд-Карл Швейкарт (1780 — 1859), Франц-Адольф Тауринус (1794 — 1874). Но все они до конца своих дней сомневались в правильности этого направления. Гаусс даже не решился опубликовать свои черновые наброски и выкладки по этой теме. И не удивительно, что неевклидова геометрия Лобачевского долго не находила признания в математических кругах России и других стран.

Карно, например, утверждал [1, 5], что теория параллельных линий связана с понятием о подобии, причем последнее понятие по степени очевидности практически соответствует понятию равенства, и что стоит только безоговорочно признать это понятие, как обсуждаемую теорию можно будет без труда обосновать.

Похожие мысли высказывал и Лаплас [5]: "Закон Всемирного тяготения Ньютона по своей простоте, своей всеобщности и превосходной соотнесенности с наблюдаемыми физическими явлениями должен считаться законом строгим; одним из важнейших свойств его является то свойство, в силу которого при уменьшении в одном и том же отношении размеров всех тел и их взаимных расстояний, небесные тела будут описывать траектории, совершенно сходные по форме с теми, которые они вычерчивают при своем теперешнем состоянии".

Следуя этому астрономическому восприятию подобия, Лаплас добавляет: "Попытки геометров доказать постулат Евклида о параллельных линиях до сих пор не увенчались полным успехом. Но в то же время никто не подвергает сомнению ни этот постулат, ни теоремы, выводимые из него Евклидом. Таким образом, восприятие пространства заключает в себе особенное свойство, которое само по себе очевидно и без которого нельзя строго обосновать свойств параллельных линий. Представление об ограниченном протяжении, например, о круге, не содержит в себе ничего, что зависело бы от его абсолютной величины (т.е. круг мы представляем, не привязываясь к его какому-либо определенному диаметру; то же можно сказать, например, в отношении квадрата, равностороннего треугольника и т.п. — Л.Ч.). Но если мы мысленно, — продолжает Лаплас, — уменьшим его (круга) радиус, то мы непременно должны будем уменьшить в том же отношении его окружность и стороны всех вписанных фигур. Эта пропорциональность представляется мне постулатом более естественным, нежели евклидов, и важно то, что с ним мы вновь встречаемся при рассмотрении следствий из Закона Всемирного тяготения".

К высказываниям Карно и Лапласа можно добавить, что аксиома подобия зримо реализуется при рассматривании любых, как плоских, так и объемных фигур, через выпуклые и вогнутые линзы, некоторой аналогией чего является получение фотографий с последующим количественным сопоставлением форм и характерных размеров отпечатков с соответствующими формами и размерами оригиналов. Помимо того, простым графическим способом можно строить сколь угодно большие ряды подобия любых геометрических фигур. Для этого достаточно увеличивать или уменьшать характерные (опорные) размеры исходной фигуры в К раз, где $0 < К < \infty$. Если последнее утверждение для кого-то не является практически реализуемой аксиомой, то, очевидно, для такого уникума никакое утверждение вообще не является аксиомой. Если же наглядный факт существования подобных фигур является общепринятым для всех людей, не страдающих умственной дистрофией, то прямым следствием этого факта является истинность евклидового "постулата" параллельности, а значит, — ложность альтернативных ему постулатов.

Опираясь на аксиому ("постулат") подобия треугольников. Валлис (1616 — 1703) доказал названное следствие с безупречной математической строгостью, о чем и доложил в своих выступлениях ученым Оксфордского Университета в 1651 и в 1663 годах. Судя по историческим документам, доказательство Валлиса не встретило возражений со стороны математиков того времени. Но в XIX веке, когда появились математики с "особым складом ума", доказательство Валлиса представляло для последних серьезную и неприятную помеху, как впрочем и другие строгие доказательства подобного рода. Вот как "устраняет" эту помеху, под одобрительные аплодисменты своих сторонников, один из самых фанатичных неевклидовцев [5, с. 14]: "Валлис пробует затем оправдать свой особый взгляд замечанием, что Евклид, ставя требование о существовании круга с данным центром и данным радиусом (постулат №3), в сущности настаивает на действительности принципа подобия для кругов. Но какие бы доводы в подкрепление этого взгляда ни давала интуиция, — продолжает цитируемый профессор математики, — все же понятие о форме фигуры, независимо от ее размеров, представляет предположение, ни в каком случае не более очевидное, чем рассматриваемый постулат Евклида".

Вот и все "научное опровержение" теоремы Валлиса. Где в этом "опровержении" научная логика? Где математика? Где опора на реальную "природу вещей", о которой, как о критерии истинности суждения, говорил Лобачевский? Нет в этой профессорской реплике ни того, ни другого, ни третьего, как и в цитированном выше заявлении Лобачевского о пятом постулате Евклида. В таком же стиле выдержаны практически все возражения ко всем строгим доказательствам пятого "постулата" Евклида.

В подкрепление сказанного приведу еще два характерных примера. Аганис (предположительно — VI век н.э.) доказал теорему, согласно которой две прямые линии, лежащие в одной плоскости и не равноотстоящие друг от друга, при продолжении обязательно пересекутся. При доказательстве этой теоремы, в сущности являющейся несколько иной формулировкой пятого постулата Евклида, Аганис в неявной форме использует так называемый "постулат Архимеда".

По прошествии семи веков арабский геометр Насир-Эддин дает оригинальное доказательство того, что перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой непременно встречаются. Его теорема по смыслу мало отличается от названной теоремы Аганиса и получила не менее изящное и строгое доказательство. Но, в отличие от Аганиса, Насир-Эддин уже в явной форме использует "постулат" Архимеда, как главный "рычаг" к выполнению поставленной задачи.

Верифицированное неевклидовцами "опровержение" доказательств пятого постулата, найденных Аганисом и Насир-Эддином, как раз и сводится к тому, что опровергатели на этот раз сомневаются в объективной истинности "постулата" Архимеда. Вот образчик их типовых "неубиенных аргументов" по этому поводу [1, с. 8]: "Не останавливаясь на подробном разборе интересного самого по себе доказательства Насир-Эддина, а также на множестве подобных же попыток ученых эпохи возрождения и нового времени, заметим только, что всем им родственна общая черта: доказывать постулат Евклида, принимая, как очевидное, некоторое новое допущение, равносильное самому постулату, причем иногда это новое допущение высказывается явно, иногда же входит в доказательство в скрытом виде".

Чтобы любой читатель мог составить свое непредвзятое мнение о степени соотнесенности "постулата" Архимеда с объективной реальностью, дам наиболее простую его формулировку: "Каков бы ни был отрезок [ab], его всегда можно повторить столько раз, чтобы получившийся в результате такого суммирования [ab] новый отрезок [$\sum$ ab] превзошел по длине любой данный отрезок [AB]." Что может быть очевиднее этого графо-аналитического факта?! На мой взгляд, это — одна из безукоризненных геометрических аксиом, к сожалению, не включенная Евклидом в его аксиоматический базис. С другой стороны, второй постулат Евклида ("Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой линии") предопределяет истинность рассматриваемого утверждения Архимеда. А коль скоро неевклидовцы сомневаются в истинности "постулата" Архимеда, им, по логике, надлежит также усомниться в истинности второго постулата Евклида, а значит, потребовать и его доказательства, и так далее..., хотя за этим "далее" уже ничего не стоит, что их вполне устраивает — отбрасывай любые аксиомы, любые универсальные закономерности и подменяй их своими "вымышленными". Вот как выразил это их конфессиональное настроение их идейный вдохновитель Гаусс [1, с. 12]: "Я все больше прихожу к убеждению, что необходимость нашей геометрии (имелась в виду геометрия Евклида — Л.Ч.) не может быть доказана, по крайней мере, человеческим умом для человеческого ума". Таким образом, их претензии, равно как и их критические аргументы, есть казуистика в самом откровенном, неприглядном ее виде.

Перефразируя Лобачевского, можно вполне резонно и справедливо утверждать: "Строгого опровержения сей <u>истины</u> (пятого "постулата" Евклида) до сих пор не могли сыскать; какие были даны, могут называться только субъективными мнениями, словесными выпадами, но не заслуживают быть почтены математическими опровержениями". Неопровержимую истину опровергнуть никому не дано. А вот что касается неевклидовских постулатов и соответствующих "геометрий", то их участь менее завидная.

Так, знаменитый математик Гильберт (1862 — 1943) доказал, что в пространстве трех измерений не существует поверхностей постоянной отрицательной кривизны, на которых осуществлялась бы геометрия Лобачевского. Другими словами, Гильберт обосновал практическую несостоятельность, графическую невоспроизводимость теоретических упражнений Лобачевского, а значит и подобных им выкладок австрийского офицера, венгра по происхождению, прирожденного математика Иоганна Болиаи. Но задолго до Гильберта это невольно обосновали своими ошеломляющими результатами сами названные авторы. Не случайно Гильберт дополнил и усовершенствовал именно аксиоматический базис геометрии Евклида, а не Лобачевского и не Римана, показав тем самым, какую геометрию он считает истинной.

Вместе с тем труды Лобачевского спровоцировали в среде молодых математиков того времени заманчивое стремление взойти на олимп математической славы, ухватившись за новую, эпатажную геометрию, привлекавшую молодежь именно тем вызовом, который бросила эта "самонадеянная самозванка" старой, классической геометрии. Надежда на быстрый успех на новом, "авантюрном" направлении подогревалась авторитетом Гаусса, который в то время был уже признанным гением математики и всячески поощрял новомодных неевклидовцев. Так, оторванная от объективной реальности, вымышленная и вымученная "геометрия" в конце концов завоевала себе звонкую славу.

А далее начал и до сего дня продолжает "работать" психологический фактор, суть которого состоит в следующем: пытаться подвергать сомнению, искать ошибки и изъяны в трудах "признанных во всем мире творцов неевклидовых геометрий" означает показать свое невежество и глупость. На это могли отважиться только такие ЛИЧНОСТИ, как Бертран Рассел (1872 — 1970) — выдающийся философ и один из создателей математической логики. Рассел не единственный человек, сумевший не поддаться стадной психологии и выступить с критикой антиевклидового творчества. Например, Р. Кар в журнале "*Philosophia Naturalis*" (1971 г.) констатирует: "Не существует никакой неевклидовой геометрии плоскости, ибо всякая такая геометрия относится к евклидовой плоскости в трехмерном пространстве". По его мнению, неевклидов мир логически невозможен, "так как попытка его логического доказательства всегда неизбежно возвращает нас к евклидовой геометрии". Но голоса таких смелых, не гипнабельных ученых потонули в оглушительной какофонии хвалебных гимнов во славу создателей "неевклидовых геометрий". А таковых "геометрий" уже придумано более дюжины и, надо полагать, — это еще не финиш... И практически каждая из них построена на аксиоматическом базисе, несовместимом с базисом других. Так, если Лобачевский предположил, что через точку можно провести сколько угодно прямых, не пересекающих данную прямую, находящуюся с ними в одной плоскости, то Риман принимает допущение [4 — 6], что "через точку, взятую вне прямой, нельзя провести ни одной параллельной этой прямой". Другими словами, все прямые на плоскости в геометрии Римана пересекаются.

Каждая "геометрия" в этом геометрическом хаосе претендует на роль абсолютной истины, наилучшим образом описывающей реальное ПРОСТРАНСТВО. Буквально так в первых же строчках своего сочинения и характеризовал свою "геометрию" уже упомянутый Иоганн Болиаи [3, с. 71]: "Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида, что *a priori* никогда решено быть не может...". Под XI аксиомой И. Болиаи здесь подразумевает пятый "постулат" Евклида и выносит этому "постулату" не подлежащий обжалованию приговор, что де истинность или ложность этого "постулата" никогда не может быть доказана. И на том спасибо!.. А то ведь некоторые не в меру ретивые поклонники Лобачевского (не важно, что знакомы с его трудами понаслышке) договорились уже до того, что их кумир доказал ошибочность пятого "постулата" Евклида.

Кроме того, утверждение И. Болиаи о независимости его "геометрии" от "аксиомы параллельности", мягко говоря, не вполне соответствует действительности. Геометризованная аналитика И. Болиаи, о которой идет речь, была им завершена и опубликована в 1832 году [3] под названием "Аппендикс" (весьма подходящее название для "абсолютной истины"). Он по существу получил во многом те же результаты, что и Лобачевский, независимо от последнего и почти одновременно с ним. Вот почему некоторые комментаторы неевклидовой "геометрии" (Я. Успенский, В. Каган) часто именуют ее "геометрией Лобачевского-Болиаи". Следовательно, выводы, полученные Лобачевским о сумме углов прямолинейного треугольника, о постепенном удалении друг от друга двух перпендикуляров к одной прямой и т.п., автоматически вытекают и из "Аппендикса" И. Болиаи. А это свидетельствует о замене "пятого постулата" иным, несовместимым с ним, но ни в коем случае не о свободе от такового вообще.

С трудами Лобачевского Иоганн Болиаи впервые ознакомился лишь в 1848 году и занимался ими, имея намерение подвергнуть их критике (примечательный штрих к безупречным математическим трудам), но так и не осуществил свой замысел. Завершая краткий экскурс в творческую биографию Иоганна Болиаи, необходимо отметить, что на закате своей недолгой жизни (1802 — 1860) он, предпринимая попытку окончательно "разделаться" с геометрией Евклида, прилагает свои неевклидовы формулы к системе из пяти совершенно независимых точек, между взаимными расстояниями которых он надеялся получить определенное соотношение. Однако результаты получились существенно отличные от ожидаемых. Будучи добросовестным исследователем, И.Болиаи отсюда сделал вывод, что Сам Господь указал ему на ложность неевклидовой гипотезы и абсолютную истинность "XI аксиомы Евклида". Иоганн отразил этот исторический факт в рукописи под названием: "Доказательство XI-ой евклидовой аксиомы, до сих пор на земле все время бывшей под сомнением, аксиомы всемирно известной и действительно чрезвычайно важной, так как она лежит в основе всего учения о пространстве и движении" — Болиаи-фон-Болиа, штабс-капитан в отставке [5].

На мой взгляд, именно эта, вероятно, умышленно скрытая в архивах рукопись Иоганна Болиаи является настоящим подвигом и главной заслугой честного и смелого исследователя.

По всей видимости, этому итоговому заключению Иоганна в немалой степени способствовало и оригинальное доказательство "XI аксиомы Евклида", сделанное в свое время его отцом — профессиональным математиком, Вольфгангом Болиаи.

Комментируя [5] исторический факт названной рукописи Иоганна Болиаи, "несгибаемый" профессор Бонола как бы мимоходом замечает, что впоследствии Иоганн, якобы, обнаружил ошибку в своих вычислениях, но по причине большой трудоемкости исправления этой ошибки не стал доводить начатое дело до конца. Эта лукавая и неумная версия, судя по публикациям, является клеветнической выдумкой некоего Штеккеля — ярого отрицателя евклидовой геометрии. Как же можно поверить тому, что прирожденный математик Иоганн Болиаи, с юности самозабвенно занимавшийся одной проблемой, вдруг, убоявшись трудностей, или же вследствие лености оставил дело всей своей жизни и, стало быть, не прояснил вопрос "чрезвычайной важности" ни для себя, ни для Человечества?!

Говоря о неевклидовых "геометриях", нельзя не упомянуть Анри Пуанкаре (1854 — 1912), математика, оставившего после себя богатейшее наследие по многим вопросам математики и физики. Вот его общая характеристика неевклидовых аналитик: "Все это суть свободные творения ума, не имеющие реальных референтов во внешнем мире". Это при том, что Пуанкаре был в числе продолжателей геометризованных исследований Лобачевского. В своей работе "Наука и гипотеза" (М., 1904) Пуанкаре так отвечает своим коллегам, претендующим на манипулирование с "ПРОСТРАНСТВОМ": «...опыты по "измерению пространства", на основе которых вводится соответствующая геометрия, относятся не к пространству, а к телам. Само же пространство, являясь чистой непрерывностью, не связанной с материальными телами, не имеет объективной геометрии». Тем самым Пуанкаре, вслед за Величайшими Мудрецами древности, сформулировал одну из действительных (а не прифантазированных), универсальных аксиом Мироздания. В свете этих высказываний Пуанкаре, во-первых, отдает предпочтение геометрии Евклида, как "наиболее простой", наглядной, а главное, — адекватно количественно и качественно характеризующей объекты материального макромира; во-вторых, признает, что, как он сам, так и многие его коллеги-математики определенную часть своей творческой жизни посвятили увлекательным теоретическим головоломкам, не имеющим практического выхода.

А теперь вернемся в глубокую древность. Прокл (410 — 485) в своем комментарии на геометрию Евклида указывает, что Посидоний (I век до н.э.) предложил называть параллельными две прямые линии, лежащие в одной плоскости и равноотстоящие друг от друга. В этой связи Прокл констатирует: "Если мы пожелаем согласовать определение Евклида с определением Посидония, то нам придется доказать, что две прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся, отстоят друг от друга на равном расстоянии, или что геометрическое место точек, равноотстоящих от данной прямой, представляет собой прямую линию" [5]. Евклид осуществил это доказательство, основываясь на своем пятом "постулате", как на безусловной истине. Но задача состоит именно в том, чтобы осуществить доказательство, не прибегая к какому-либо утверждению о параллельности. Прокл, следовательно, понимал — когда это будет сделано, то тем самым строго и однозначно будет доказана справедливость "пятого постулата", уже не как постулата, а как теоремы. Он категорически отказывался относить это евклидово утверждение к числу постулатов, в подкрепление такого своего мнения вполне резонно замечая, что обратное предложение ("Сумма двух углов треугольника меньше двух прямых углов") есть теорема, доказанная Евклидом. При этом он рассуждал (почти дословно) так:

"Логика отвергает ситуацию, когда нельзя было бы доказать предложения, если ему обратное предложение доказуемо". Сам Прокл доказал [5] (и, на мой взгляд, строго) несколько иную теорему: "Прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, непременно пересечет также другую".

Эта теорема наносит сокрушительный удар прежде всего по "геометрии" Лобачевского-Болиаи. Не располагаю сведениями о том, знали ли Лобачевский и Болиаи об этой теореме и вообще о трудах Прокла. Но факт, что некоторые из их позднейших последователей о ней знали и потому поспешили отнести названную теорему к категории неполноценных [1, 5] на том основании, что Прокл полагал <u>конечным</u> расстояние между двумя параллельными прямыми. Такая нелепая претензия оппонентов Прокла, по всей вероятности, имеет своей точкой опоры теорему Кантора (1845 — 1918) об "актуальной бесконечности", недавно раскритикованную, т.е. уличенную в ошибочности, нашими выдающимися математиками академиком Владимиром Арнольдом и доктором физико-математических наук Александром Зенкиным. В статье "Научная контрреволюция в математике" [7] последний, в частности, пишет: "Дело в том, что 10 строчек канторовского доказательства содержат 7 (семь!) очень нетривиальных логических ошибок".

К сожалению, не располагаю также историческими сведениями о том, знал ли Даламбер (1717 — 1783) о трудах и взглядах Прокла. Скорее всего не знал и потому почти слово в слово высказал соображения Прокла касательно параллельных линий, без ссылок на последнего. Так, в 1759 году в одной из своих статей по геометрии Даламбер отмечает: "Определение и свойства прямой линии и параллельных линий представляют подводный камень и, так сказать, скандал в области начал геометрии" [5]. Он полагал, что при помощи удачного определения прямой линии можно избегнуть обеих трудностей. Далее он (почти по Посидонию) предлагает "называть параллельной по отношению к некоторой данной прямой другую произвольную прямую в той же плоскости, проходящую через две точки, равноотстоящие от первой и расположенные по одну от нее сторону". При этом он предлагает доказать (без привлечения постулата о параллельности), что две прямые будут находиться друг от друга на равном расстоянии, или, что то же самое, доказать, что геометрическое место точек, равноотстоящих от данной прямой, есть прямая линия (см. выше рассуждения Прокла). Таким образом, эта теорема была по существу вторично (по истечении 1300 лет) предложена Даламбером, как своего рода вызов коллегам-математикам. Очевидно, безуспешные попытки доказательства названной теоремы предпринимались до времени восторжествования "геометрии" Лобачевского, т.е. приблизительно на протяжении столетия. А дальше теоремой Прокла-Даламбера едва ли кто рискнул заниматься, дабы не удостоиться звания ретрограда, шарлатана, невежды, авантюриста и т.п. Да и кому было заниматься "безнадежным делом", если практически все математики поверили в святую непогрешимость и бесспорную гениальность творения Лобачевского?!

Но мне больше по душе позиция людей, типа Бертрана Рассела, готовых отстаивать свои убеждения вопреки любому авторитету.

Вероятно поэтому судьбе было угодно, чтобы я всерьез увлекся рекордным по продолжительности спором между сторонниками Евклида и теми, кто пытался его опровергнуть или хотя бы принизить роль его действительно гениальной и потому простой для понимания, графически и объемно воспроизводимой геометрии. По всей видимости, мои старания не были напрасными — мне, как представляется, удалось доказать классическую теорему Прокла-Даламбера, не прибегая к какому-либо допущению о параллельности. Остается представить это доказателство на суд тех читателей, которые удостоят мой труд своим вниманием.

Но прежде чем приступить к доказательству, сформулирую определение прямой линии, которое я вынужден был найти, помня наказ, данный для этой цели Даламбером. Однако дать определение прямой линии невозможно, не дав определения исходному понятию "геометрическая точка". Евклидовы определения точки, линии и плоскости далеки от объективной реальности, а посему и были выведены из геометрического базиса, но выведены без замены на более удачные. В этом состояла роковая ошибка, способствовавшая геометрическому произволу.

Итак, несколько основополагающих определений натуральной геометрии, т.е. такой, которая количественно и качественно характеризует материальные объекты реального макромира.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТОЧКА ЕСТЬ УСЛОВНОЕ ЭТАЛОННОЕ МАТЕРИАЛЬНОЕ ТЕЛО, ИМЕЮЩЕЕ ОБЪЕМ, УСЛОВНО ПРИНЯТЫЙ ЗА МИНИМАЛЬНУЮ ЕДИНИЦУ ОБЪЕМА, И ПРАВИЛЬНУЮ ФОРМУ.

Можно дать и несколько иное определение:

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТОЧКА ЕСТЬ ПРОСТЕЙШИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ, ИМЕЮЩИЙ УСЛОВНО МИНИМАЛЬНЫЕ РАЗМЕРЫ, СКОЛЬ УГОДНО МАЛЫЕ, НО НЕ НУЛЕВЫЕ.

2. ЛИНИЯ ЕСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЭТАЛОННЫХ ТОЧЕК, НЕ ИМЕЮЩАЯ ПУСТОТ /РАЗРЫВОВ/. Следовательно:

2а. ГРАНИЦЫ ОГРАНИЧЕННОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ЛИНИИ СУТЬ ТОЧКИ.

2б. ДЛИНА ОГРАНИЧЕННОЙ ЛИНИИ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ КОЛИЧЕСТВОМ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЕЕ ЭТАЛОННЫХ ТОЧЕК.

2в. ШИРИНА ЛИНИИ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ СТЫКОВОЧНЫМ РАЗМЕРОМ ЭТАЛОННОЙ ТОЧКИ.

3. ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ НАЗЫВАЕТСЯ ТАКАЯ НЕЗАМКНУТАЯ ЛИНИЯ, У КОТОРОЙ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК МЕЖДУ ЛЮБЫМИ ЕЕ ДВУМЯ НЕ СМЕЖНЫМИ ТОЧКАМИ МИНИМАЛЬНОЕ ИЗ ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ.

Можно дать несколько отличное определение:

ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ НАЗЫВАЕТСЯ ТАКАЯ НЕЗАМКНУТАЯ ЛИНИЯ, ДВИЖЕНИЕ ПО КОТОРОЙ ОТ ОДНОЙ ЕЕ ТОЧКИ ДО ЛЮБОЙ ДРУГОЙ ЕЕ ТОЧКИ ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ ПО КРАТЧАЙШЕМУ ПУТИ.

4. ПОВЕРХНОСТЬ ЕСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЛИНИЙ, НЕ ИМЕЮЩАЯ ПУСТОТ.

5. ПЛОСКОСТЬ ЕСТЬ НЕЗАМКНУТАЯ ПОВЕРХНОСТЬ,

СОСТАВЛЕННАЯ ИЗ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ ПО ЛЮБОМУ НАПРАВЛЕНИЮ ЕЕ ОРИЕНТАЦИИ.

В сущности вся геометрия Евклида построена не на его определениях. а на подобных сформулированным. Многие его теоремы - наглядное тому свидетельство, в особенности в разделе "Стереометрия". Напомню только одну (из "Планиметрии"), которая пригодится для дальнейших рассуждений.

Т е о р е м а. Отрезок прямой, соединяющей две какие-нибудь точки, короче всякой ломаной, проведенной между этими точками.

А теперь сравните формулировку этого утверждения с данным выше определением прямой линии.

Таким образом, предыдущий текст дает общее представление об обсуждаемой теме и содержит все необходимое для завершающей части повествования.

Т е о р е м а Прокла-Даламбера:

"Если в одной плоскости имеется прямая линия и другая прямая линия, проходящая через две точки, равноотстоящие от первой и расположенные по одну от нее сторону, то эти прямые всюду находятся друг от друга на равном расстоянии, а следовательно, нигде не пересекаются, т.е. параллельны".

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дана неограниченная прямая a (рис.1). В плоскости ее расположения даны две точки C и D, расстояния которых от прямой a одинаковы, т.е. $CN = DM$, и $CN \perp a$, $DM \perp a$. Через C и D проведена другая прямая b, на длину которой так же не налагаются никакие ограничения. Требуется доказать, что расстояние между прямыми a и b всюду одинаково.

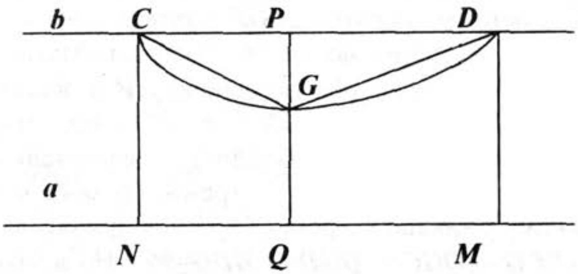

Рис. 1.

Предположим противное: геометрическое место точек, равноудаленных (на расстояние $NC = DM$) от отрезка NM прямой a, представляет собой некую вогнутую кривую $C...G...D$. Возьмем на этой кривой любую точку G и опустим из этой точки перпендикуляр GQ на a . По предположению: $GQ=CN=DM$. Продолжим GQ до пересечения с b в точке P и соединим точку G с точками C и D прямыми линиями. Получили два смежных треугольника CGP и DGP, образующих совместно один треугольник CGD. В соответствии с авторским определением прямой, как кратчайшего расстояния между любыми двумя ее несмежными точками, имеем $CD<CG+DG$, что полностью согласуется со свойствами любого треугольника (см. упомянутую выше теорему об отрезке и ломаной).

Лемма, доказанная Саккери (см. [5], с. 20-21), в нашем случае будет конкретизирована так:

"Если в четырехугольнике $NQGC$ с последовательными прямыми углами N и Q стороны NC и QG равны, то угол NCG также равен углу QGC ...". Значит, в соответствии с условиями доказываемой теоремы, то же можно утверждать в отношении четырехугольника $MQGD$, т.е. $\angle QGD = \angle MDG$. Далее, означенные углы гипотетически могут быть тупыми, острыми или прямыми. Выясним, какая же из этих гипотез верна. Гипотеза тупых углов сразу же отпадает, так как при этом получились бы два четырехугольника $NQGC$ и $MQGD$, у каждого из которых сумма внутренних углов превышает 4d, что исключает безупречная теорема Лобачевского [2, с. 10], которая формулируется так: "Сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых".

Если допустить, что названные углы острые, то имеем: $\angle QGC$ - острый, значит, $\angle CGP$ - тупой, так как $\angle CGP = 180°- \angle QGC$, а следовательно $\angle CPG$ - острый. Аналогично получаем, что $\angle DPG$, имеющий общую вершину P и общую сторону PG с углом CPG, - тоже острый, т.е. в сумме эти углы меньше развернутого ($\angle CPG+\angle DPG<180°$). Следовательно, CPD являет собой ломаную линию, а не отрезок прямой, что противоречит начальному условию теоремы. Остается принять гипотезу прямого угла: $\angle NCG=\angle QGC=\angle QGD=\angle MDG=90°$. Но в таком случае CGD будет не ломаная, а отрезок прямой линии. А это противоречит евклидовому постулату №1: через две точки ***C*** и ***D*** нельзя провести двух различных прямых линий. Следовательно, геометрическим местом точек, равноудаленных (на расстояние ***NC=DM***) от отрезка ***NQM*** является отрезок ***CPD.***

Предварительный вывод: расстояние между любыми по длине отрезками ***CD и NM*** прямых ***b*** и ***a*** всюду одинаково, а отрезки ***NC=...=PQ=...=DM,*** представляющие это расстояние, являются перпендикулярами не только для прямой ***a*** но и для прямой ***b*** .

Чтобы этот вывод был окончательным, необходимо рассмотреть еще один вариант — предположительно выпуклой кривой ***C...G...D*** (рис.2) геометрического места точек, равноудаленных от отрезка ***NM*** прямой ***a***. В остальном рисунок и вводные рассуждения остаются прежними.

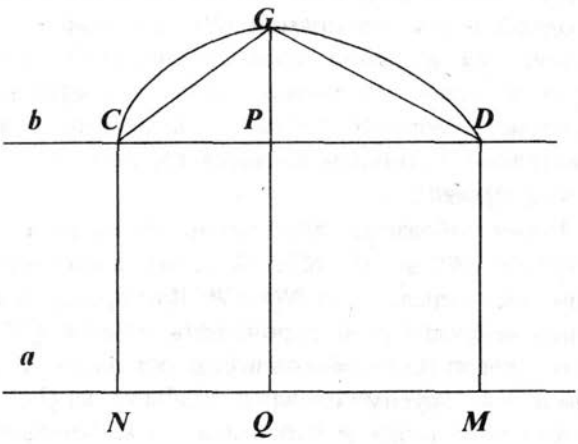

Рис. 2.

В полном соответствии с предыдущим и по тем же причинам имеем:

1. $\angle NCG = \angle QGC$, $\angle QGD = \angle MDG$;

2. Отмеченные углы гипотетически могут быть только острыми либо прямыми.

Предположим, что указанные углы – острые. Если угол ***NCG*** - острый, то угол ***NCP*** и подавно острый, так как составляет часть угла NCG. Теперь снова обратимся к лемме Саккери и сформулируем ее полностью [5, с. 20]: "Если в четырехугольнике $NQPC$ с последовательно прямыми углами N, Q стороны NC и QP равны, то угол C также равен углу P, если же стороны NC и QP не равны, то из двух углов C и P тот больше, который прилежит к меньшей стороне, и наоборот". Поскольку мы предположили, что $CN>QP$, в соответствии с леммой Саккери, имеем $\angle QPC>\angle NCP$. А так как угол NCP острый, угол QPC может быть: 1) острым; 2) прямым; или

3) тупым. В случае справедливости варианта 1) или 3) , CP являет собой наклонную, опущенную из точки C на QG.

Те же рассуждения и по тем же причинам приводят к выводу, что $\angle QPD$ может быть: 1) острым; 2) прямым; 3) тупым. В случае справедливости варианта 1) или 3) , DP являет собой наклонную, опущенную из точки D на QG. Но две наклонные CP и DP к одной и той же прямой QG, по разные стороны от нее, встречающиеся в одной точке P на этой прямой, образуют ломаную в точке P линию, что не соответствует условию доказываемой теоремы - CPD есть отрезок прямой линии b. Следовательно, истинным является вариант 2): $\angle QPC=\angle QPD=90°$.

Таким образом, для четырехугольника $NQPC$ имеем: $\angle N=\angle Q=\angle P=90°$, а $\angle C$ - острый. А это, в соответствии с леммой Саккери, дает неравенство $NQ<CP$. Для проверки справедливости этого неравенства будем перемещать отрезок QP с постоянной скоростью влево так, чтобы он всегда оставался перпендикулярен к прямым a и b, другими словами, чтобы точка Q скользила по a, и, соответственно, точка P скользила по b. Учитывая неравенство $NQ<CP$ и одинаковую скорость движения точек Q и P, следует ожидать, что в момент достижения точкой Q точки N (наложения точек) точка P будет находиться правее точки C. Последнее означает противоречие: из точки N к прямой a восстановлены два перпендикуляра NC и NP. Поэтому в действительности одновременно с совпадением точек Q и N совпадут точки P и C. Этот факт является указанием на ошибочность предположения, что $\angle C$ острый, в результате чего, якобы, отрезок NQ меньше отрезка CP. Остается признать, что в четырехугольнике $NQPC$ все углы прямые, т.е $NQPC$ суть прямоугольник. А раз это так, то не только

NQ=CP, но и ***NC=QP***.

Вполне очевидно, что все эти рассуждения справедливы и дают тот же результат в отношении четырехугольника ***MQPD***, который по доказанному, как и ***NQPC*** является прямоугольником.

Таким образом, проведенное доказательство показывает ошибочность второго исходного предположения о "выпуклости геометрического места точек..." и придает нашему предварительному выводу (см. выше) статус окончательного. Короче говоря, теорема Прокла-Даламбера полностью доказана.

Из доказанной теоремы, с учетом результатов, полученных Саккери, вытекают чрезвычайно важные следствия, первые пять из которых являются азбучными истинами в геометрии Евклида:

1. Два перпендикуляра к одной и той же прямой всюду находятся на одинаковом расстоянии друг от друга, как бы далеко мы их ни продолжали в обе стороны от прямой /сравните с соответствующим утверждением Лобачевского/.

2. Перпендикуляр к одной из двух и более параллельных прямых является перпендикуляром и ко всем остальным параллельным прямым этой группы.

3. Если три угла в выпуклом прямолинейном четырехугольнике прямые, то и четвертый угол обязательно является прямым, т.е. это - прямоугольник (сравните с соответствующим утверждением Лобачевского).

4. Если в выпуклом прямолинейном четырехугольнике два угла при основании прямые, а образующие их боковые стороны равны, то такой четырехугольник есть прямоугольник.

5. Сумма внутренних углов любого прямолинейного треугольника строго равна 180° (сравните с соответствующим утверждением Лобачевского).

6. Пятый "постулат" Евклида в действительности является теоремой, строго доказуемой на основе остальных его постулатов и аксиом, что и было продемонстрировано выше (в который уже раз на протяжении истории!).

7. Доказанная теорема свидетельствует о полной геометрической несостоятельности неевклидовой аналитики Лобачевского-Болиаи, да и любой другой антиевклидовой "геометрии" на евклидовой плоскости.

Заключительная справка. В уже упомянутой статье "НАУЧНАЯ КОНТРРЕВОЛЮЦИЯ В МАТЕМАТИКЕ" («Левополушарная преступность вот уже больше века правит бал во владениях королевы всех наук») [7] доктор физико-математических наук А. Зенкин приводит следующее высказывание академика В. Арнольда: "В середине XX столетия обладавшая большим влиянием МАФИЯ левополушарных математиков сумела исключить геометрию из математического образования..., заменив всю содержательную сторону этой дисциплины тренировкой в формальном манипулировании абстрактными понятиями... Подобное абстрактное описание математики непригодно ни для обучения, ни для каких-либо практических приложений и, более того, создает современное резко отрицательное отношение общества и правительств к математике".

И последнее. В работе [8] дано подробное обоснование того, что неевклидовы геометрии Лобачевского и Римана имеют сугубо теоретический, тот самый "абсолютно абстрактный" характер, о котором говорит В. Арнольд. В свете этого показана негативная роль неевклидовых геометрий в физике и астрономии. Эти выводы опираются на несколько независимых авторских теорем, в которых доказывается "постулат" параллельности в форме Плейфера.

Автор: Лев Евгеньевич Чулков,
ноябрь 2001 г.

Литература

1. Успенский Я. Введение в неевклидову геометрию Лобачевского-Болиаи. Издательство "Сеятель" Е.В.Высоцкого. Петроград. 1922.
2. Широков П.А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955.
3. "Об основаниях геометрии" - сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.
4. Киселев А.П. Элементарная геометрия. М.: "Просвещение", АО "Учебная литература", 1996.
5. Бонола Р. Неевклидова геометрия /критико-историческое исследование ее развития/, перевод с итальянского А.Р.Кулишер. С.-Петербург, типография товарищества "Общественная польза", 1910.
6. Богомолов С.А. Введение в неевклидову геометрию Римана. ОНТИ-ГТТИ, Ленинград - 1934 - Москва.
7. "НГ - НАУКА" №7. 19 июля 2000.
8. Чулков Л.Е. Геометрические аксиомы и геометрические казуистики. М.: издательство "Всемирный фонд планеты Земля", 2001.

Чулков Лев Евгеньевич

Неевклидовы концепции в геометрии и альтернативная им теорема Прокла—Даламбера

Изд. лиц. ИД № 00787 от 20 января 2001 г.
Подписано в печать 08.01.02. Формат $60\times88^1/_{16}$.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1.
Печ. л. 1,75. Тираж 1000 экз. Заказ 4002.

Международный Союз общественных объединений
"Всемирный Фонд Планеты Земля".
г. Москва, ул. Луганская, д. 7, корп. 1.
Тел. 554-43-57.

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ,
140010, г. Люберцы, Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.
Тел. 554-21-86.

ISBN 5-93897-009-1

9785938970090