С.Л. Василенко

Цифровые корни и счастливые числа

Зри в корень

Не корнями едины.

Выразительное изречение "зри в корень" принадлежит писателю-литературоведу А. Шишкову, а благодаря коллективному псевдониму Козьмы Пруткова стало ярким крылатым выражением, афоризмом.

Каков корешок, таков и вершок.

Смысл простой. Обращая внимание на детали (великое начинается с малого), концентрируй внимание на главном, вникай и познай суть вещей.

Вверху лишь древесная листва симптомов проблемы, а не она сама. Подобно корню слова в лингвистике, который вскрывает его существенные и глубинные признаки.

"Корень один, ветви разные" (А. Шишков).

Только части растений (листья, ветки, колючки …) растут по законам филлотаксиса, с неизменным присутствием чисел Фибоначчи и золотой пропорции. Не затеняя, не подавляя друг друга.

В социально-историческом развитии единство корней не укладывает ретроспективу генеалогического древа в прокрустово ложе на все времена.

Арабы и евреи имели общего предка Авраама, но потом кардинально разошлись. Общий корень-происхождение не гарантирует культурную и/или религиозную близость. При общем генезисе народы могут во многом отличаться.

Это касается и сплоченности, единства, солидарности народа с общим культурно-этническим кодом. Как идеологические клише власть имущих, с целью манипуляции сознанием, пропаганды и лигимитизации своего господства.

Достаточно вспомнить фашистский лозунг: «Один народ, одна страна, один фюрер».

Общество согласия перерождается в общество принуждения.

Числа от этого освобождены.

Любопытно, что словосочетание «крылатое выражение» само по себе стало крылатым выражением. То есть оно рекурсивно, и представляется частью самого себя.

Подобные отображения объектов и процессов внутри себя нашли широкое применения в математике и информатике: числовые последовательности, непрерывные дроби, методы решения уравнений, геометрические фракталы, программно-рекурсивные обращения и др.

Цифровой корень.

В математике известен цифровой корень (*digital root*) натурального числа x – однозначное повторяющееся число, получаемое в результате итерационного процесса суммирования цифр, на каждой итерации которого для подсчета суммы цифр берется результат предшествующей итерации.

Итерации раскрывают-показывают механизм формирования цифрового корня.

Такой подсчет – дело хлопотное, особенно для больших чисел, поэтому используется аналитическая (явная) форма его представления

$$\mathrm{dr}_b(n) = 1 + (n-1) \bmod (b-1),$$

где b – база числа (основание системы счисления).

Единственно возможными цифровыми корнями являются натуральные числа $0 \le m < b$.

Кроме этих фиксированных точек нет никаких циклов.

В 10-десятичной системе цифровой корень равен остатку от деления на 9: $\mathrm{dr}_{10}(n) = n \bmod 9$ и ввиду бесхитростного расчета широко используется в нумерологии.

Объяснение простое: не нужно морочиться со степенями цифр и/или другими базами.

Счастливые числа.

Если вы чувствуете себя немного подавленным, возможно, счастливые числа смогут поднять вам настроение. Поэкспериментируйте на калькуляторе. Не исключено, что у вас окажется удачливым номер квартиры, телефона, машины, банковского счета и др.

Счастливыми называют натуральные числа (*happy number*), для которых сумма квадратов входящих цифр с повторением процедуры приводит к единице.

Почему именно счастливые? – Термин затерялся в глубине веков.

Многие люди, а математики особенно, испытывают панегирическое отношение к 1.

Единица – наименьшее натуральное число, единственное положительное число, которое равно своему обратному. Своего рода детерминант и определяющий остов остального числового материала.

И. Ньютон в "Универсальной арифметике" отмечал: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу».

Например, число 5 само по себе реально не существует. То, что изображается значком "5", на самом деле не число, а только символ, его обозначающий. Как нарисованная пятерня пальцев. Число само по себе не существует. Это лишь понятие и весьма полезное человеческое изобретение, отражающее количественное отношение между вещами.

Единица и ноль, на особом счету. Их отличительный признак-атрибут не количество. На первый план выходит философская категория качества. Да – нет, правда – ложь, бытие – небытие. Порядок – хаос, добро – зло, двоичная система счисления и даже метафорическая формула бога [1] с взаимным отождествлением "0 ≡ 1".

Рассматривая натуральные числа, люди с математическим мышлением обрели внутреннюю гармонию, удовлетворенность и «деятельность души в полноте добродетели» (счастье по Аристотелю) от того, что путем несложных цифровых сложений часть чисел сводится к 1. – Этакая арифметическая "формула счастья". Let it be.

Зачем складывать квадраты целых чисел?

В огромном разнообразии математической проблематики, задача о сумме квадратов в высшей степени удостоилась особого внимания. Интерес к ней проявляли величайшие ученые всех времен: Пифагор, Диофант, Ферма, Эйлер, Лагранж, Гаусс и др.

Наиболее важные утверждения соотносятся с суммой двух, трех и четырех квадратов.

Теорема Ферма. Любое простое число вида $p = 4k + 1$ является суммой квадратов двух натуральных чисел. Наиболее короткое доказательство в одно предложение приведено в работе [2].

Теорема Лагранжа. Натуральное число n может быть представлено суммой трех квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда n не представимо в виде $n = 4a{\cdot}(8b + 7)$, где a и b – целые. Например, нельзя представить суммой трех квадратов числа 7, 15, 23, 28, 31, 39, 47, 55 ... [3, A004215].

Теорема Лагранжа. Всякое натуральное число можно представить суммой четырех квадратов целых чисел. Примечательно, что отдельные примеры теоремы появились ещё в 3 веке н.э. в Арифметике Диофанта. В своем доказательстве Лагранж использовал тождество Эйлера о четырех квадратах – разложение произведения сумм четырех квадратов в сумму четырех квадратов.

Из теоремы Ферма выводится общее утверждение: натуральное число представимо суммой квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда в его разложении на простые множители отсутствуют простые числа вида $p = 4k + 3 = 3 \pmod 4$ в нечетной степени.

> *Ремарка*. Первый раз открыли новую энциклопедию [4] и на стр. 53 с удивлением читаем: «Натуральное число представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел **тогда и только тогда**, когда в его разложении на простые множители любой простой множитель вида $4k + 3$ входит в четной степени». – Логическая некорректность данной формулировки

приводит к путанице: наличие отсутствия или отсутствие наличия. То есть указанный простой множитель должен входить в разложение. А как же быть с очевидными равенствами $2 = 1^2 + 1^2$, $5 = 2^2 + 1^2$ и др.? – Поэтому главным является не наличие-вхождение простого множителя вида $4k + 3$ в четной степени, а его отсутствие в нечетной степени.

Как говорят в Одессе, это две большие разницы, ну и три–четыре маленькие.

Зато известная на всех языках мира *теорема Ферма* о сумме двух квадратов для простых чисел переиначена на *теорему Ферма–Эйлера* [5]. Конечно, Эйлер – великий математик. Его именем названо число $e \approx 2{,}718$, константа $\gamma \approx 0{,}577$, знаменитое тождество для пяти фундаментальных констант $e^{i\pi} + 1 = 0$, многие теоремы, уравнения, функции, интегралы. Но упомянутая "косметика" больше походит на мнимый патриотизм.

Квадратно-цифровой корень.

Оператор перехода или "функция счастья" натурального числа x, состоящего из r цифр a_i, $a_{r-1} \neq 0$, определяется равенством $S(n) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i^2$,

Очевидно, $S(0) = 0$, $S(1) = 1$.

Оператор нелинейный: $S(x+y) \neq S(x) + S(y)$.

Встроенные в число нулевые цифры a_i не влияют на расчет.

В отличие от цифрового корня, итерационные суммы квадратов цифр натурального числа в привычной 10-ричной системе счисления могут сходиться к 1, но большинство из них попадают в орбиту 8-шагового цикла, из которого далее не выходят.

Уже первым таким числом является двойка:

$$2 \rightarrow (\, 4 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \,)$$

Точкой захода в околдованный круг может быть любое из восьми чисел цикла.

Данную особенность впервые описал A.Porges [6].

Наибольшее число в цикле 145 – четвертое число, представимое в виде суммы двух квадратов натуральных чисел двумя способами: $145 = 1^2 + 12^2 = 8^2 + 9^2$.

Квадратно-цифровой корень sdr (n) натурального числа n – наименьшее число последовательности, в которой каждое последующее число, начиная с n, равно сумме квадратов цифр предыдущего числа, sdr $(n) = 1$ для счастливых чисел или 4 для остальных.

Расчеты показывают (табл. 1), что в процессе итераций некоторая часть чисел сходится к сочетанию пар цифр (1, 3) или (6, 8) с их свойством суммы квадратов:

$$1^2 + 3^2 = 10; \qquad 6^2 + 8^2 = 100,$$

для которых квадратный цифровой корень равен 1.

Таблица 1

Примерные выходы на квадратно-цифровой корень sdr (*n*) = 1

7	899			356				379	469								
6	226	7	236	70	239	367		139	133	368							
5	44	49	49	49	94	94	566	91	19	109	338		188	478	888		
4	32	97	97	97	97	97	97	82	82	82	82	446	129	129	192	167	556
3	**13**	**130**	**130**	**130**	**130**	**130**	**130**	**68**	**68**	**68**	**68**	**68**	**86**	**86**	**86**	**86**	**86**
2	10	10	10	10	10	10	10	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Вкрапление нулей роли не играет. Дописывая нули, мы только увеличиваем число, но не изменяем его корень sdr.

Сходимость к корню хорошая. Например, число 999999999999 из двенадцати девяток уже после первой операции сворачивается до трехзначного числа $12 \cdot 9^2 = 972$. Чтобы проверить его на сходимость к 1 достаточно 6 шагов.

В десятичной системе число $n \ge 10^{r-1}$, а оператор $S(n)$ наибольший, если все r цифры равны 9, то есть $S(n) \le 9^2 r$. Поэтому для любого натурального числа n с количеством цифр $r \ge 4$ справедливо неравенство $S(n) < r$ (рис. 1).

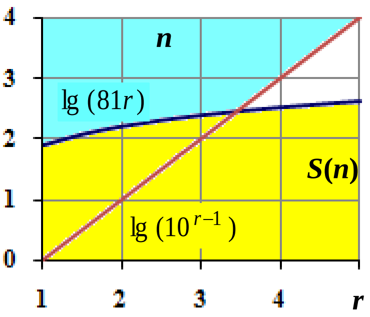

Рис.1. Сопоставление значений числа n и квадратично-цифрового оператора $S(n)$

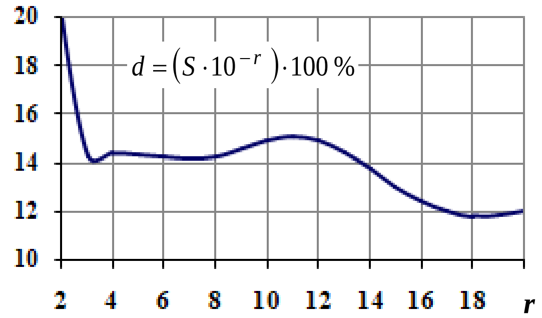

Рис.2. Плотность натуральных чисел (%), сходящихся к sdr = 1

Можно показать, что для любого числа n существует такое натуральное m, что $S^m(n) \le 2 \cdot 9^2 = 162$. Действительно:

$S(n)_{/r=4} \le 4 \cdot 9^2 = 324$; $\quad S(n)_{/r<4} \le 3 \cdot 9^2 = 243$;

$S^2(n)_{/r<4} \le S(199) = 163$, где $S(199) \ge S(u)$ для любого $u \le 243$;

$S^3(n)_{/r<4} \le S(099) = 162$, где $S(099) \ge S(v)$ для любого $v \le 163$.

Формальное определение.

Пусть целое положительное число $n \in \mathrm{Z}^+$ равно $n = \sum_{i=0}^{r-1} a_i b^i$ с цифрами $0 \le a_i \le b-1$ для всех i.

Суммирующая "функция счастья" определяется формулой:

$$S_{e,b}(n) = S_{e,b}\left(\sum_{i=0}^{r-1} a_i b^i\right) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i^e,$$

где $e \ge 1$ – целый показатель степени (*exponent*), $e = 1$ устанавливает цифровой корень, $e = 2$ определяет счастливые числа с суммой квадратов цифр;

$b \ge 2$ – база (*base*) чисел или основание системы счисления;

$a_i = \left(n \bmod b^{i+1} - n \bmod b^i\right) / b^i$ – значение i-той цифры числа;

$r = \lfloor \lg_b n \rfloor + 1$ – количество цифр числа в базе b;

$\lfloor x \rfloor$ – функция "пола" – наибольшее целое число, не превосходящее x, или floor(x).

Как видно, функция счастья переводит натуральное число в сумму степеней его цифр.

Запись $S^m(n)$ означает m-кратное применение функции или число итераций, начиная с числа n. То есть

$$S^0(n) = n,\ S^m(n) = S(S^{m-1}(n)),\ m \ge 1.$$

Если для целых степеней $e \ge 2$ последовательность $S^m_{e,b}(n)$ сходится к "неподвижной точке" 1, то n называется (e, b)-счастливым числом.

Такая себе обобщенная "формула счастья".

Перманентное развитие.

По мере изучения-развития концепция счастливых чисел была обобщена на различные базы b – основания позиционной системы счисления и показатели степени e [7, 8].

Возможные циклы для $e = \{2, 3\}$ и $2 \le b \le 10$ изучены в работе [7]. Разработанные методы могут быть использованы и для нахождения циклов по другим вариантам e, b.

В статье [9] рассмотрены вопросы обобщения счастливых чисел на дробные основания. Такое допустимо, поскольку для целых чисел $p > q > 0$, gcd $(p, q) = 1$ каждое натуральное число n имеет единственное представление в базе p/q.

В частности, определены [10] циклы и высоты счастливых чисел для параметров $1 \le e \le 12$, $p/q = 3/2$, а также $e = \{2,3,4\}$, $p/q = \{5/2, 5/3, 5/4, 7/2\}$.

Другое обобщение [11] касается отрицательных баз $b < 0$. Оказывается, натуральному числу n соответствует уникальный набор цифр $0 \le a_i \le |b| - 1$ такой, что $n = \sum_{i=0}^{r-1} a_i b^i$. Авторы находят циклы для параметров: $e = 2$, $-10 \le b \le -2$.

Ряд исследований посвящен вопросам определения длинных строк последовательных счастливых чисел (СЧ), оценки плотности СЧ в натуральном ряде, наименьших СЧ заданной высоты – количества шагов-итераций и др. Рассмотрим их несколько подробнее.

Строки счастья.

Известен феномен "писем счастья". Его история уходит в Средние века. С развитием электронных коммуникаций распространение подобных сообщений приобрело массовый характер. К слову, "письмами счастья" иронически называют уведомления о штрафах за нарушение ПДД и др. Не обошел данную тему и математик Daniel W. VanArsdale, который классифицировал письма по мотивационных категориям [12].

Числовые письма больше свойственны криптографии. А вот числовая строка (*string*), состоящая из счастливых чисел с определенными свойствами, представляет интерес.

По всей видимости, к наиболее счастливым числам можно отнести те, которые имеют дружественных соседей. Сродни отношениям между государствами.

Таковых не так уж много.

Можно выделить первое из последовательных счастливых чисел строкой длины l:

$l = 2$ [3, A035502]: 31, 129, 192, 262, 301, 319, 367, 391, ...

$l = 3$ [3, A072494]: 1 880, 4 780, 4 870, 7 480, 7 839, 7 840, 8 180, 8 470, ...

$l = 4$ [3, A194352]: 7 839, 8 739, 11 248, 12 148, 21 148, 44 488, 44 489, 44 939, ...

$l = 5$ [3, A194355]: 44 488, 222 688, 226 288, 258 598, 262 288, 285 598, 404 488, ...

В работе [13] представлены наименьшие числа N, с которых начинаются строки из l последовательных счастливых чисел (табл. 1). Причем данные для количества цифр $n \ge 6$ получены её автором.

Таблица 1

Наименьшие числа N, с которых начинаются строки из l последовательных счастливых чисел

Длина строки l последовательных чисел	Первое число, N	Количество цифр, n
2	31	2
3	1880	4
4	7839	4
5	44488	5
6	$789_{12}59_{9}6$	25
7	$789_{12}59_{9}6$	25
8	$589_{11}69_{144}5$	159
9	$269_{137}79_{74}5$	215
10	$389_{560}09_{87}5$	651
11	$279_{280}09_{1287}4$	1571
12	$3889_{158021}89_{136}4$	158162
13	$2889_{218491}39_{385203}3$	603699

Примечание: нижний индекс означает число повторений данной цифры

Бывают ли строки последовательных счастливых чисел произвольной длины?

В статье [14] получен утвердительный ответ. В работе [15] доказано, что существуют сколь угодно длинные строки последовательных (e, b)-счастливых чисел при условии, что $e-1$ не делится на $p-1$ ни для какого простого делителя p числа $b-1$.

Вообразить такие фантастически большие числа за гранью здравого смысла. Но они существуют и благоденствуют "во веки веков".

Плотность счастья.

Счастливых чисел бесконечно много. Как минимум, счастливы все степени 10.

Есть три счастливых числа 1, 7, 10 в интервале (1÷10), 20 – (1÷100), 143 – (1÷1000), 1442 – (1÷10000) и так далее [3, A068571].

Самое большое известное счастливое число (2010 г.) равно простому числу Мерсенна $2^{42\,643\,801}-1$, состоящему из $12\,837\,064$ десятичных цифр.

Какая же доля целых чисел является счастливой? – Несмотря на неравномерное распределение счастливых чисел, поначалу сдается, что их плотность, тем не менее, имеет некую асимптотику, где-то на уровне 12 % (рис. 2). Но, увы...

Доказано [16], что не существует асимптотической плотности не только для обычных счастливых чисел (рис. 3), но и нескольких их обобщений.

Вопрос установления и доказательства четких границ плотности остается открытым. Можно только оценить. На основе вероятностных методов показано, что среди натуральных чисел счастливые числа имеют относительную плотность $0{,}1138 < d < 0{,}1858$, то есть их количество варьирует в интервале 11÷18 %.

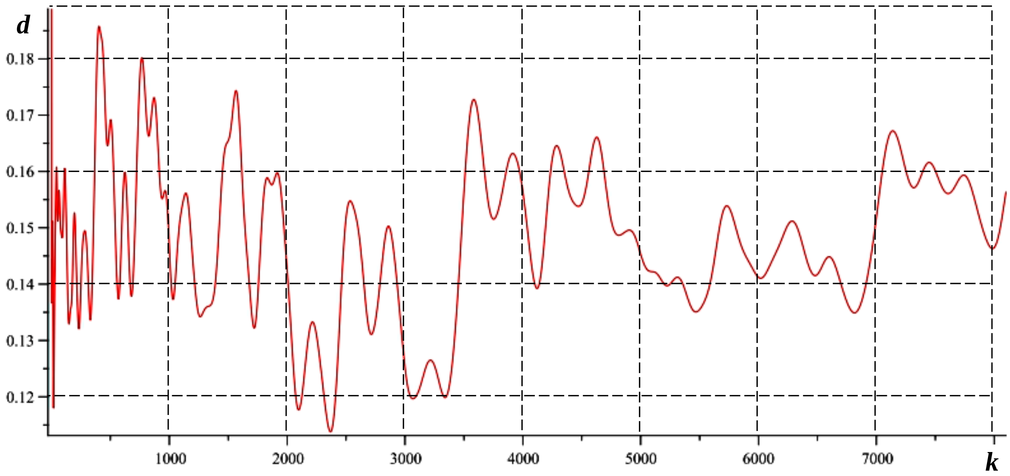

Рис. 3. Относительная плотность счастливых чисел, меньших 10^k

Тот факт, что счастливые числа не имеют определенной асимптотической плотности, означает, что допустимы области числовой прямой, в которых сосредоточено больше счастья, чем в других.

Одни области "пируют" от счастья, другие "голодают".

В работе [17] исследуется «расширенная обобщенная функция счастья» $S_{c,b}$, отображающая натуральное число в сумму квадратов его цифр в базе b плюс аддитивная целая константа $c > 0$.

Определяется набор последовательных чисел c, для каждого из которых $S_{c,b}$ не имеет неподвижные точки (пустынная область) либо наоборот имеет фиксированную точку (оазисная область).

У счастья нет предела...

Высоко летают, но низко садятся.

Число итераций-шагов, за которое число счастливое число приводится к 1, называется его высотой h (*height*). Одинаковую высоту имеют многие числа. Среди них представляют интерес наименьшие из них.

Известны первые наименьшие счастливые числа ω_h высотой $h = \overline{0, 7}$:

$$\omega_h = 1,\ 10,\ 13,\ 23,\ 19,\ 7,\ 356 = \omega_6,\quad 78999 = \omega_7 = 79 \cdot 10^{(\omega_6 - 113)/81} - 1.$$

Числа как числа. Вполне осязаемые. Но далее они начинают стремительно увеличиваться с космическим ускорением [18] в виде возрастающей лесенки степеней:

$$\omega_8 = 3789 \cdot 10^{(\omega_7 - 186)/81} = 3789 \cdot 10^{973} - 1 = 3788\,9_{973} = 7888846\,7_{972}4;$$

$$\omega_9 = 78889 \cdot 10^{(\omega_8 - 305)/81} - 1 = 78889 \cdot 10^{\left(3789 \cdot 10^{973} - 306\right)/81} - 1 = 78889 \cdot 10^{7268} - 1;$$

$$\omega_{10} = 259 \cdot 10^{(\omega_9 - 93)/81} - 1.$$

В статье [19] предложен общий метод определения наименьших счастливых чисел ω_h любой заданной высоты h, в том числе:

$$\omega_{11} = 179 \cdot 10^{(\omega_{10} - 33)/81 - 1} - 1;$$

$$\omega_{12} = 47 \cdot 10^{(\omega_{11} - 52)/81} - 1;$$

и так далее до ω_{80}.

В работе [20] установлено рекурсивное отношение между величинами ω_h и h с начальной высотой $h_0 = f(b)$ и на его основе строится алгоритм, который находит ω_h для неизвестных высот. С помощью модульной арифметики определено уравнение, которое вычисляет величину ω_h по известной высоте h для $b = \{2, 3\}$.

Вместо заключения.

Как видим, счастливые числа живут и развиваются.

Обобщаются, для них устанавливаются главные закономерности.

Одновременно они оттачивают логическое мышление авторов, повышают мастерство аргументации. Приумножают умение рассуждать и анализировать, устанавливать причинно-следственные связи, делать выводы. Хорошее поле для тренировки молодых дарований.

В русскоязычных публикациях счастливые числа не прижились.

Видимо, математики и без них счастливы. Поживем, увидим... Счастье – на стороне того, кто доволен (Аристотель), а счастливых людей видно по глазам.

Остается вспомнить незабвенного Эйлера, который часто "игрался с числами" и даже придумал свои счастливые числа n, для которых полином $x^2 - x + n$ дает последовательность простых чисел для всех целых значений $1 \le x \le n-1$.

Только 6 чисел n имеют такое "счастливое" свойство: 2, 3, 5, 11, 17, 41.

«Изучение всех работ Эйлера останется навсегда лучшей, ничем не заменимой, школой в различных областях математики» (К. Гаусс).

Quaerite et invenietis...

Литература:

1. Василенко С.Л. Неортодоксальная метафорическая формула Бога и парадоксы веры // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 26837, 17.12.2020. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00164571.htm.

2. D. Zagier, A one-sentence proof that every prime p ≡ 1(mod 4) is a sum of two squares, *The American Math. Monthly*, 97 (2), (1990), p. 144. – http://homepages.math.uic.edu/~acamer4/math300/Zagier.pdf.

3. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – https://oeis.org/.

4. Математика. Полная энциклопедия. – М.: Росмен-Пресс, 2020. – 256 с.

5. Сендеров В.А., Спивак А.В. Суммы квадратов и целые гауссовы числа // Квант. – № 3 (1999), с. 14–22.

6. A. Porges, A set of eight numbers, *Amer. Math. Monthly*, 52 (1945), 379–382.
7. R. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1994.
8. H.G. Grundman and E.A. Teeple, Generalized happy numbers, *Fibonacci Quart.*, 39 (5), (2001), 462–466. – https://www.fq.math.ca/Scanned/39-5/grundman.pdf.
9. A. Bland, Z. Cramer, P. Castro, D. Domini, T. Edgar, D. Johnson, S. Klee, J. Koblitz and R. Sundaresan, Happiness is integral but not rational, *Math. Horiz.*, 25 (1), (2017), 8–11. – https://community.plu.edu/~edgartj/happiness.pdf.
10. E. Trevino and M. Zhylinski, On generalizing happy numbers to fractional base number systems, *Involve. J. of Math.*, 12 (7), (2019), 1143–1151. – http://campus.lakeforest.edu/trevino/HappyArticle.pdf.
11. H.G. Grundman and P.E. Harris, Sequences of consecutive happy numbers in negative bases, *Fibonacci Quart.*, 56 (3) (2018), 221–228. – https://www.fq.math.ca/56-3.html.
12. Daniel W. VanArsdale, Chain letter evolution, 1998–2016. – http://www.silcom.com/~barnowl/chain-letter/evolution.html.
13. R. Styer, Smallest examples of strings of consecutive happy numbers, *J. of Integer Sequences*, 13 (2010), article 10.6.3. – https://www.researchgate.net/publication/228564231.
14. E. El-sedy and S. Siksek, On happy numbers, *Rocky Mountain J. Math.*, 30 (2000), 565–570.
15. Hao Pan, On consecutive happy numbers, *J. of Number Theory*, 128 (2008), 1646–1654. – https://pdf.sciencedirectassets.com/272482/.
16. J. Gilmer, On the density of happy numbers, *Cornel University*, arXiv:1110.3836v4 [math.NT], 2015. – https://arxiv.org/pdf/1110.3836.pdf.
17. B.B. Swart, S. Crook, H.G. Grundman, L. Hall-Seelig, M. Mei, and L. Zack, Fixed points of augmented generalized happy functions II: oases and mirages, *Cornel University*, arXiv:1908.02194v1 [math.NT], 2019. – https://arxiv.org/abs/1908.02194.
18. H.G. Grundman and E.A. Teeple, Heights of happy numbers and cubic happy numbers, *Fibonacci Quart.*, 41 (4), (2003), 301–306. – https://www.fq.math.ca/Scanned/41-4/grundman.pdf.
19. Tianxin Cai and Xia Zhou, On the heights of happy numbers, *Rocky Mountain J. Math.*, 38 (6), (2008), 1921–1926.
20. G. Lapointe, On finding the smallest happy numbers of any heights, *Cornel University*, arXiv:1904.12032 [math.NT], 2019. – https://arxiv.org/abs/1904.12032.
21. H.G. Grundman and E.A. Teeple, Sequences of consecutive happy numbers, *Rocky Mountain J. Math.* 37 (6), (2007), 1905–1916.

© ВаСиЛенко, 2022
Украина, Харьков