С.Л. Василенко

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 8. Треугольные формы.

Если бы треугольники создали себе бога,
он бы был с тремя сторонами.
Шарль Луи Монтескье

Вместо вступления.

Вспоминается, как на страницах АТ ещё недавно велись дискуссии, можно сказать, вокруг околонаучных знаний, связанных с золотой пропорцией.

Заметим, что термин "околонаучный" вполне научный, в позитивном смысле слова. Никоим образом не пренебрежительный и/или деструктивный.

Например, в аристотелевской классификации собственно научные знания, часто называемые теоретическими, включают только познание ради самого познания. Остальные группы знания (практические, творческие, и др.) по мнению Аристотеля, не являются научными. – Не путать с лженаукой, паранаукой и т.п.

При этом «теоретическую науку пронизывает одно системообразующее основание – направленность на поиск истины ради самой истины» [1].

То есть, оставаясь главной целью научного познания, истина сама нуждается в проверке практикой, опытом и должна обеспечивать принципиальную возможность совпадать-сходиться с реальностью. В частности, с решениями базовых практических задач.

Однако, как ни печально и парадоксально звучит, провозглашаемые истины не вечны.

Как утверждает Андрей Никитин [2]: «Абсолютных истин не бывает. Истины возникают только в сравнении. Да у нас этих истин, по любому поводу, завались!.. Потом иногда разбираемся, и оказывается, что вот это уже и не истина вовсе, ... один "призрак" от истины остался… как привидение… идол времени».

Наш мир относителен, нет ничего постоянного и незыблемого...

Всё течет, всё меняется. Поэтому истина в последней инстанции – чистой воды блеф. Многое зависит от обычных договоренностей и соглашений.

Например, на поместном соборе (381 год) 150 человек сели и приняли (путем жарких споров, прений и голосования) догмат о триединстве христианского бога, и многие люди до сих пор считают это непогрешимой истиной. – На здоровье и во благо, ибо «вера без дел, мертва» (Иак. 2:20, 2:26). И хотя «вера ваша возвещается во всем мире» (Рим. 1:8), две трети населения планеты не разделяют данное вероучение.

Электрические заряды ведут себя по-разному. Но в природе они не бывают положительными или отрицательными. Просто физики договорились считать электрон условным носителем отрицательного заряда. – Исключительно для удобства и единообразия.

С таким же успехом могли назвать его женским или левым, а заряд с другими свойствами – мужским или правым: игра в дуальность. Экви- моно- едино- адекватно.

Математики определили кодировку: 0 – ложь, 1 – истина. По мне, так ноль больше претендует на значение истины. С него начинается всё и вся. А единица – так себе..., способна генерировать лишь натуральный ряд. Даже компьютер начинает считать с нуля или обнуленного счетчика.

Три лица (головы), плюс – минус, ноль – единица. Как часто говорят в народе: «Всё переживём, лишь бы не было войны». Ибо назад уже не отыграешь. – Alea jacta est...

Но «вернемся к нашим баранам»...

Предметом упомянутой вначале полемики стала несложная задача об экстремальных свойствах отдельных параметров в плоском равнобедренном треугольнике с вписанной окружностью и полуокружностью.

С легкой руки доктора физ.-мат. наук, профессора Анатолия Шелаева она сначала "обросла" египетской пирамидой Хеопса, затем временем спуска тел вдоль апофем плоских и неплоских (?) граней пирамид в однородном гравитационном поле (?) с ускорением g = 1 м/с^2 (даже на Луне больше – 1,62), «физической интерпретацией треугольников» (?), которых нет в природе, брахистохроной и другими иллюзорными представлениями.

Он привел "вереницу" очевидных равенств, графиков, но так и не доказал исходное утверждение о том, что отношение боковой стороны треугольника к фиксированному радиусу вписанной полуокружности достигает экстремума, если косинус угла при основании равен константе золотого сечения: cos β = ϕ = (√5 – 1) / 2. Зато не обошлось без нареканий в адрес коллег по творческому цеху – Виктора Соловьёва и др.

Хотя уже тогда мы обосновали и правильную физическую формулу для времени скатывания тела вдоль апофемы пирамиды [3], и простое аналитическое решение экстремальной задачи [4].

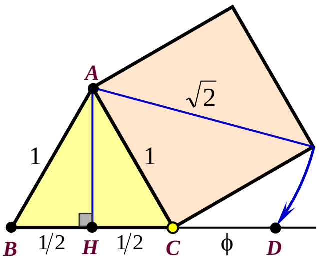
Предложенную нами формулу профессор сразу же "встроил" в свою очередную работу [5, с. 5], как обычно, в привычном стиле без ссылок и/или каких-либо упоминаний.

Это к проблеме профессиональной этики, а молодым авторам на заметку.

Что касается геометрической составляющей вопроса, то расширенный вариант задачи вписывается в контекст общего замысла настоящей статьи, и ему уделено внимание в подразделе «Равнобедренный треугольник – IV».

Правильный треугольник с "тенью".

"Тень" – квадрат. Построение включает переход от правильного треугольника с единичной стороной к квадрату, и далее поворотом его диагонали $\sqrt{2}$ к золотому сечению отрезка AB [6, 7].

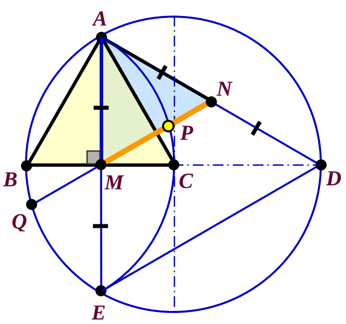


По теореме Пифагора $HD = a = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}/2\right)^2} = \sqrt{5}/2$;

$$BD = a + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi, \quad CB = a - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi .$$

То есть, C – точка золотого сечения отрезка BD такая, что выполняется золотая пропорция $\dfrac{BC+CD}{BC} = \dfrac{BC}{CD}$, или $C = g(BD)$.

"Тень" – треугольник. ΔABC и ΔAMN – два равносторонних треугольника.



Дуга с центром в B, которая проходит через вершины A, C, делит сторону MN золотым сечением.

Построим:

E и D – симметрия точке A относительно M и N;

Q – симметрия точке P относительно M.

MN – средняя линия равностороннего треугольника ΔAED, продленная до точки пересечения Q с описанной окружностью.

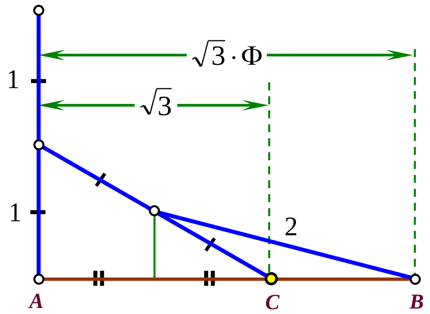
Следовательно $M = g(QN)$ – согласно работе G.Odom [8].

Поскольку, $MP = MQ$, то $P = g(MN)$.

Три сегмента.

Сравнительно недавно предложен изящный способ исполнения золотой пропорции с тремя равными сегментами, их серединами и парой перпендикулярных линий [9; 10, № 15].

Без потери общности длины исходных отрезков примем равными 2.



Один конец второго сегмента движется по первому вертикальному сегменту до его середины, а второй край – по горизонтали.

Затем точно также один конец третьего сегмента движется по второму сегменту до его середины.

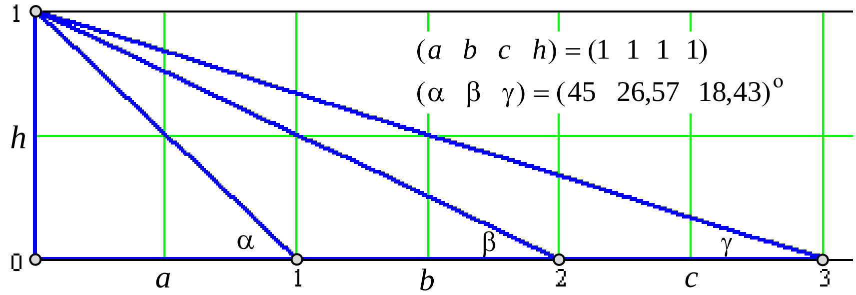
В итоге нижние концы сегментов образуют на горизонтали золотое сечение $C = g(AB)$. Построения и расчеты наглядно представлены на чертеже.

Расположение-соединение отрезков формирует треугольники, деление пополам налицо.

Чевианы треугольника.

Две чевианы прямоугольного треугольника делят катет на три отрезка $(a,\ b,\ c)$.

Сумма углов наклона чевиан и гипотенузы составляет $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2=90\,^\circ$.



Справедливы следующие соотношения.

Тангенсы углов равны: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{h}{a}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{h}{a+b}$, $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{h}{a+b+c}$.

Кроме того, $\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\left(90\,^\circ-\alpha-\beta\right)=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1/\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$.

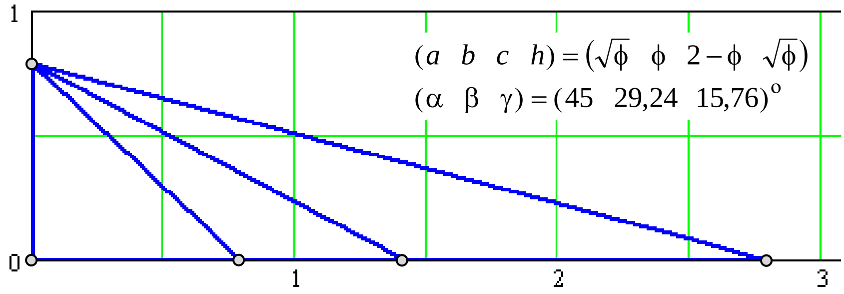
Объединим два равенства для $\operatorname{tg}\gamma$:

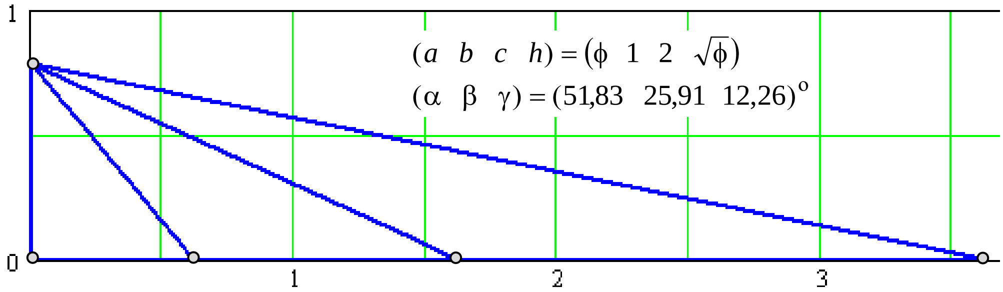
$$\frac{h}{a+b+c}=\left(1-\frac{h}{a}\cdot\frac{h}{a+b}\right)\Big/\left(\frac{h}{a}+\frac{h}{a+b}\right)=\frac{a(a+b)-h^2}{(2a+b)h}.$$

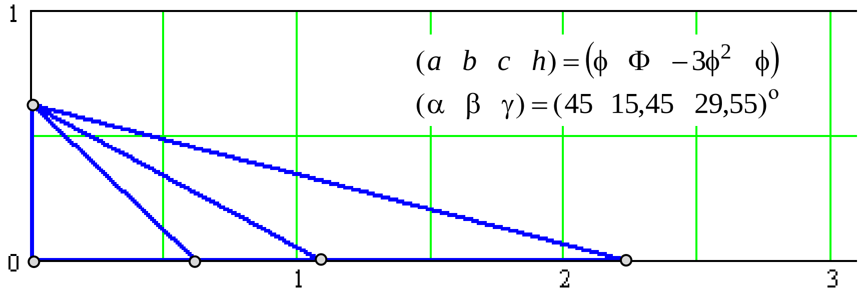
$$h=\sqrt{\frac{a(a+b)(a+b+c)}{3a+2b+c}}\qquad\text{или}\qquad c=\frac{h^2(3a+2b)-a\,(a+b)^2}{a\,(a+b)-h^2}.$$

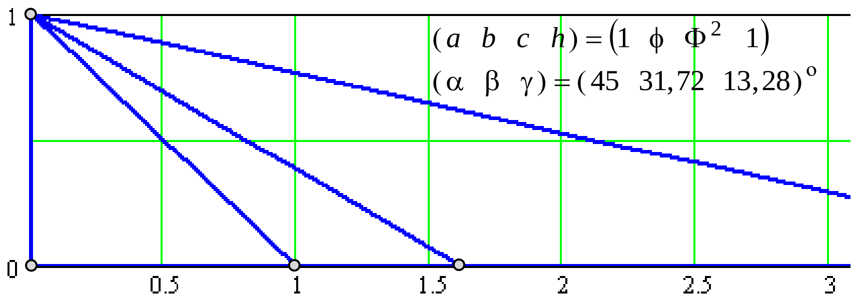
Задавая тройки параметров $(a,\ b,\ c)$ или $(a,\ b,\ h)$, можно найти четвертый: h или c.

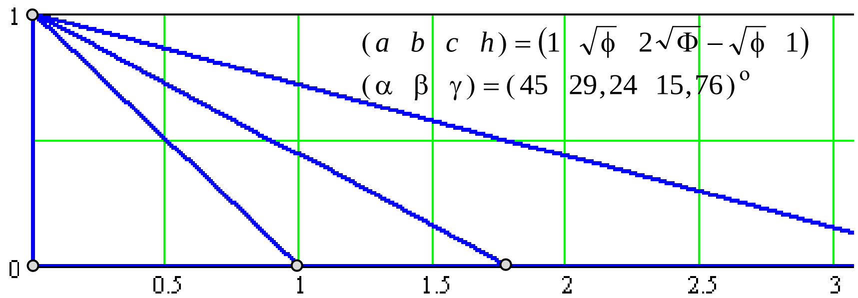
Во втором случае могут появиться отрицательные значения c. Это означает, что данный отрезок откладывается в противоположном направлении, то есть гипотенуза и одна чевиана меняются местами.







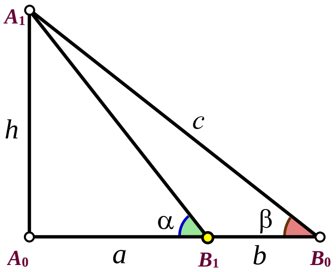


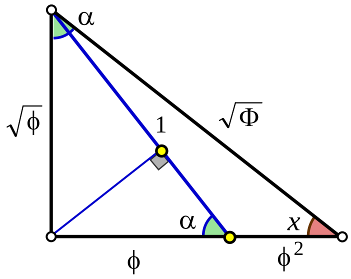


Движение стержня.

Рассмотрим движение абсолютно жесткого стержня AB в прямоугольной системе координат: конец A скользит по оси ординат, конец B – по оси абсцисс:

A_0B_0 – исходное положение, A_1B_1 – конечное положение.





Можно видоизменить условие: прислоненный к вертикальной стенке стержень тянут за нижний конец, стержень съезжает и через некоторое время падает на пол.

В прямоугольном треугольнике проведем прямую из вершины угла к катету и найдем высоту h, если сумма углов $\alpha + \beta = 90^o$.

Определим углы через их тангенсы:

$$\alpha + \beta = 90^o,\ \beta = 90^o - \alpha;$$
$$\text{tg}\ \beta = \text{tg}\ (90^o - \alpha) = \text{ctg}\ \alpha = 1/\text{tg}\ \alpha;$$
$$\text{tg}\ \beta = h/(a+b),\ \text{tg}\ \alpha = h/a;$$
$$h/(a+b) = a/h,\ h = \sqrt{a \cdot (a+b)}.$$

1. Точка B_0 фиксирует исходное местоположение правого конца отрезка AB на оси x.

Обозначим: α – угол наклона движущегося отрезка, β – угол наклона линии, соединяющей, конец отрезка B_0 с точкой A_1.

Для отрезка A_0B_0 сумма углов $\alpha + \beta = 0$, при его вертикальном расположении $\alpha + \beta = 180^o$. В некоторый момент сумма углов разделится пополам и составит $\alpha + \beta = 90^o$.

Данному состоянию соответствует золотое сечение, а отрезок высекает в первом квадранте (относительно осей координат) золотой прямоугольный треугольник Кеплера, у которого длины сторон составляют геометрическую прогрессию.

Довольно неожиданное проявление связи золотого сечения и деления пополам. – Линейного метрического пространства и угловой меры.

Если $a + b = 1$ и $a = \phi$, то $h = \sqrt{\phi}$.

2. К данной задаче с числом золотого сечения можно прийти иным способом:

на какую высоту h приставить лестницу условно-единичной длины к вертикальной стене, чтобы сумма углов $\alpha + \beta = 90^o$.

Последовательность вычислительных операций имеет вид:

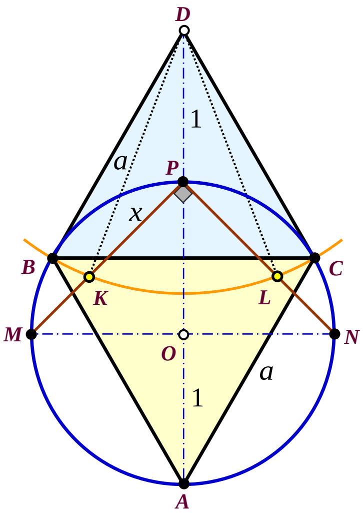
$$\sin\ \alpha = h,\ \text{tg}\ \beta = h,\ \alpha = \arcsin\ h,\ \beta = \text{arctg}\ h;$$
$$\alpha + \beta = 90^o,\ \cos(\alpha + \beta) = \cos\ \alpha \cdot \cos\ \beta - \sin\ \alpha \cdot \sin\ \beta = 0;$$
$$\text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ \beta = 1,\ \text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ (\arcsin\ h) = h/\sqrt{1-h^2},\ \text{tg}\ \beta = \text{tg}\ (\text{arctg}\ h) = h;$$
$$h^2 = \sqrt{1-h^2},\ z = h^2 > 0,\ z^2 + z - 1 = 0,\ z = (\sqrt{5} - 1)/2 = \phi,\ h = \sqrt{\phi}.$$

3. Аналогичным образом формулируется обратная задача: чему равна сумма углов $\alpha + \beta$, если лестницу условно-единичной длины приставить к стене на расстоянии, равном константе золотого сечения ϕ.

$$\sin\ \alpha = \sqrt{\phi}/1 = \sqrt{\phi},\ \sin\ \beta = \sqrt{\phi}/\sqrt{\Phi} = \phi,\quad \alpha = \arcsin\sqrt{\phi},\quad \beta = \arcsin\ \phi;$$
$$\arcsin\ x + \arcsin\ y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right),\ \text{если}\ x^2 + y^2 = 1;$$
$$\alpha + \beta = \arcsin\sqrt{\phi} + \arcsin\ \phi = \arcsin\left(\sqrt{\phi}\sqrt{1-\phi^2} + \phi\sqrt{1-\phi}\right) = \arcsin 1,\qquad \alpha + \beta = 90^o.$$

Правильный и прямоугольный равнобедренный треугольники.

Конструкция Tran Quang Hung [10, № 48] напоминает каплю воды (см. рисунок).



Как в капле росы отражается весь мир (информация о мире находится в каждой его частице), так и в данном сочетании фигур отражается золотая пропорция.

Правильный треугольник ΔABC со стороной a вписан в окружность (O) и зеркально отражается в ΔDBC.

Диаметр $MN \parallel BC$.

Дуга с центром в D проходит через вершины B, C и делит боковые стороны b прямоугольного равнобедренного треугольника ΔPMN золотым сечением.

Пусть радиус окружности равен 1. Тогда $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$.

$\underline{\Delta DPK}$, по теореме косинусов:

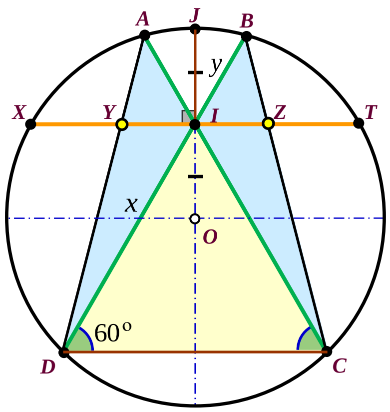
$$x^2+1^2-2x\cdot\cos 135^\circ=a^2;$$

$$x^2+\sqrt{2}x-2=0 \;\rightarrow\; x=\sqrt{2}\cdot\phi.$$

$$KM=b-x=\sqrt{2}\cdot\phi^2; \quad K=g(PM).$$

Бабочка с треугольными крыльями.

Конструкция Nguyen Dung Thanh [10, № 49] напоминает бабочку, "оседлавшую" правильный треугольник.



Дана окружность (O) радиусом 1. Точка I – середина радиуса OJ. Точки $C, D\in(O)$ формируют правильный треугольник ΔIDC.

IC, ID пересекают (O) в точках A, B; $XT\perp JO$.

AD, BC пересекают XT в точках Y, Z; $ID=x$, $IB=y$.

По теореме косинусов:

$$\underline{\Delta IOD}:\; 1=(1/2)^2+x^2-2\cdot 1/2\cdot x\cdot\cos 30^\circ \;\rightarrow\; x=\Phi\cdot\sqrt{3}/2;$$

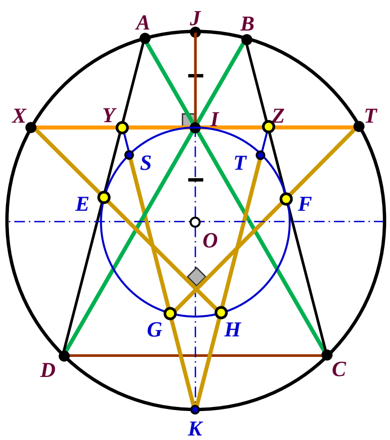
$$\underline{\Delta IOB}:\; 1=(1/2)^2+y^2-2\cdot 1/2\cdot y\cdot\cos 150^\circ \;\rightarrow\; y=\phi\cdot\sqrt{3}/2;$$

$$BD=x+y=\sqrt{15}/2.$$

$$IZ\parallel CD \;\rightarrow\; IZ=CD\cdot\frac{BI}{BD}=\frac{3}{2\sqrt{15}}; \quad YZ=2\cdot IZ=\frac{3}{\sqrt{15}}.$$

$$XI=IT=\sqrt{OT^2-OI^2}=\sqrt{3}/2; \quad ZT=IT-IZ=\phi\cdot 3/\sqrt{15}.$$

Окончательно имеем $Z=g(YT)$.



Диаграмму можно расширить, показав дополнительные проявления золотого сечения.

$$\text{Например, } \frac{TH}{HK}=\frac{SG}{GK}=\frac{HE}{EX}=\frac{GF}{FT}=\frac{YZ}{XY}=\Phi.$$

$$G=g(SK), \quad E=g(XH), \quad Y=g(XZ),$$

$$H=g(TK). \quad F=g(TG). \quad Z=g(YT).$$

$$ZK=\sqrt{IZ^2+IK^2}=\sqrt{\frac{9}{4\cdot 15}+\frac{9}{4}}=\frac{6}{\sqrt{15}}.$$

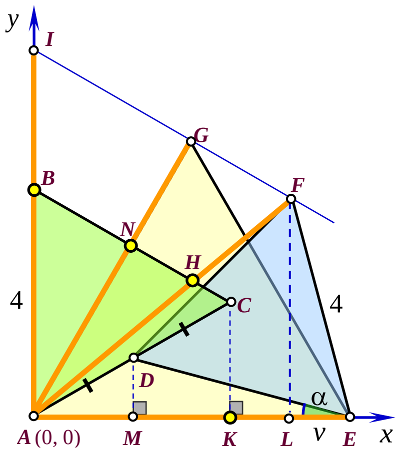
Три правильных треугольника.

Конфигурация Elliot McGucken [10, № 61], состоящая из двух равных правильных треугольников $\Delta ABC = \Delta DFE$ с длиной стороны – 4 (без потери общности), дополнена третьим равносторонним треугольником AGE.

Треугольник ΔDFE повернут так, что $AD = DC$ (деление AC пополам); $CK \perp AE$.

Вершины F, G соединены прямой линией до пересечения с осью ординат в точке I.

Тогда четыре отрезка, исходящих из начала координат $A(0,0)$, делятся золотым сечением. Чтобы в этом убедиться, достаточно определить отношение ординат и/или абсцисс крайней и средней точки прямолинейного отрезка.



1) ΔABC: $A(0,0)$, $B(0,4)$, $C(2\sqrt{3},2)$;
$D(\sqrt{3},1)$, $K(2\sqrt{3},0)$, $E(s,0)$.

ΔDEM: $(s-\sqrt{3})^2+1^2=4^2 \;\rightarrow\; \underline{s=2\sqrt{3}\,\Phi}$,

его вершина $E(2\sqrt{3}\,\Phi,0) \rightarrow$ $K = g(AE)$.

2) ΔADE: $\cos\alpha = \dfrac{4^2+(2\sqrt{3}\,\Phi)^2-2^2}{2\cdot4\cdot2\sqrt{3}\,\Phi} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

ΔFLE: $\dfrac{v}{4} = \cos(\alpha+60^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\phi \;\rightarrow\; \underline{v=\sqrt{3}\,\phi}$;

$x_F = s - v = \sqrt{3}\,\Phi^2$; $\quad y_F = \sqrt{4^2-v^2} = \Phi(3-\phi)$;

уравнения прямых: $y_{AF} = \dfrac{3-\phi}{\sqrt{3}\cdot\Phi}x$, $\quad y_{BC} = -x/\sqrt{3}+4$;

точка пересечения $H(\sqrt{3}\,\Phi, 3-\phi)$ $\rightarrow$ $H = g(AF)$.

3) AGE – правильный треугольник со стороной s, его вершина $G(\sqrt{3}\,\Phi, 3\Phi)$.

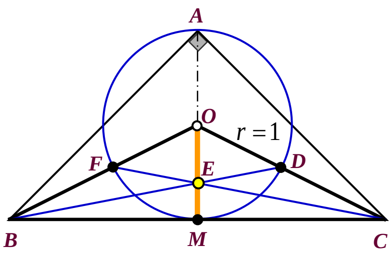
уравнения прямых: $y_{AG} = x\sqrt{3}$, $\quad y_{BC} = -x/\sqrt{3}+4$;

точка пересечения $N(\sqrt{3},3)$ $\rightarrow$ $N = g(AG)$.

4) Уравнение прямой $y_{GF} = -\dfrac{\Phi}{\sqrt{3}}x + 4\Phi$.

Она пересекает ось ординат в точке $I(0,4\Phi)$ $\rightarrow$ $B = g(AI)$.

Равнобедренный треугольник – I.



ΔABC и ΔOBC – два равнобедренных треугольника с общим основанием BC, ΔABC – прямоугольный.

Окружность с центром в точке O радиусом $r = 1$.

По теореме (van Aubel) для внутренних точек сторон треугольника ΔOBC и соответствующих чевиан с их общей точкой пересечения в E выполняется соотношение:

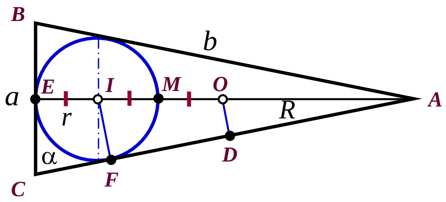
$$OE/EM = OF/FB + OD/DC = 2\cdot OD/DC.$$

Радиус окружности, описанной вокруг ΔABC, равен $MC = AM = 2$.

$$OC = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5},\quad DC = \sqrt{5}-1 = 2\phi,$$

$$OD/DC = \Phi/2,\quad OE/EM = \Phi,\quad E = g(OM).$$

Равнобедренный треугольник – II.



В равнобедренном треугольнике Kadir Altintas [10, № 70]:
$AB = AC = b$;
O – центр описанной окружности радиусом R;
I – центр вписанной окружности радиусом r;
M – средняя точка $OI = 2r$ (деление пополам).

Пропорции сторон в двух парах подобных треугольников:

$$\Delta AFI \sim \Delta ACE: \quad \frac{b}{a/2} = \frac{R+2r}{r} \quad \to \quad \frac{b}{a} = \frac{R+2r}{2r};$$

$$\Delta AFI \sim \Delta ADO: \quad \frac{b/2}{R} = \frac{b-a/2}{R+2r} \quad \to \quad \frac{b}{a} = \frac{R}{R-2r};$$

$$\frac{R+2r}{2r} = \frac{R}{R-2r} \quad \to \quad R^2 - 2Rr - 4r^2 = 0 \quad \to \quad \frac{R}{r} = 2\Phi, \quad \sqrt{\frac{b}{a}} = \Phi.$$

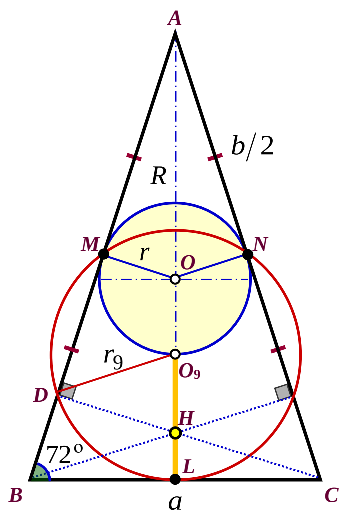
$$\alpha = \arccos\frac{a/2}{b} = \arccos\frac{\phi^2}{2} \approx 79{,}0^{\circ}.$$

Равнобедренный треугольник (из пентаграммы) – III.

В равнобедренном треугольнике Ercole Suppa [10, № 72]:
$AB = AC = b > a$;
O – центр описанной окружности радиусом R;
L, M, N – середины трех сторон треугольника;

O_9 – центр окружности девяти точек радиусом r_9, проходящей через середины трех сторон треугольника; получила название благодаря теореме: основания трех высот произвольного треугольника, середины трех его сторон и середины трех отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром (точкой пересечения высот), лежат на одной окружности.

С центром в точке O проведена окружность радиусом r, которая проходит через середины боковых сторон и центр O_9, $R = 2r_9$.



$$\Delta AON \sim \Delta ACL: \quad \frac{R}{r} = \frac{b}{a/2} \quad \to \quad \frac{r_9}{r} = \frac{b}{a} = t.$$

$$\Delta AON: \quad R^2 - r^2 = (b/2)^2;$$

$$\Delta OLC: \quad R^2 - (r + r_9)^2 = (a/2)^2.$$

Разделим первое равенство на второе, а числитель и знаменатель полученной дроби в левой части дополнительно разделим на произведение $r_9 r$. После преобразований получаем

$$3t^4 - 2t^3 - 5t^2 + 1 = (t^2 - t - 1)(3t^2 + t - 1) = 0.$$

Положительное решение первого множителя $t = \Phi$.

Положительное решение второго множителя $t < 1/2$, и не может быть отношением b/a.

Таким образом, $\dfrac{b}{a} = \dfrac{r_9}{r} = \Phi$.

Угол при основании треугольника $\alpha = \arccos\dfrac{a/2}{b} = \arccos\dfrac{\phi}{2} = 72^{\circ}$, то есть исходный треугольник – характерно-составная часть пентаграммы (звездчатого правильного пятиугольника). В литературе часто называется золотым треугольником.

Опустим на боковые стороны высоты, основания которых лежат на окружности девяти точек, H – ортоцентр треугольника.

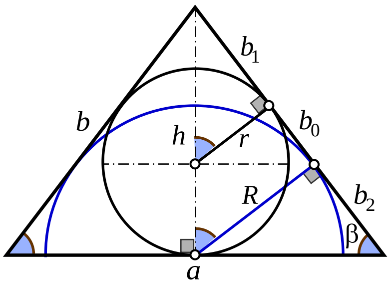
По построению треугольники подобны: $\Delta DO_9H \sim \Delta ABC$, значит, $O_9H = r$ и $H = g(O_9L)$ – точка золотого сечения.

Запишем также формулы для высоты и составляющих её трех радиусов $h = R + r_9 + r$:

$$h \;=\; \sqrt{b^2 - a^2/4} \;=\; \frac{a}{2}\sqrt{4\Phi^2 - 1} \;=\; \frac{a}{2}\Phi\sqrt{\Phi+2}\,;$$

$$R = \frac{b^2}{2h} = \frac{a\Phi}{\sqrt{\Phi+2}}, \qquad r_9 = \frac{R}{2} = \frac{a\Phi}{2\sqrt{\Phi+2}}, \qquad r = \frac{r_9}{\Phi} = \frac{a}{2\sqrt{\Phi+2}}\,.$$

Равнобедренный треугольник – IV.



В равнобедренный треугольник вписана окружность радиусом r и полуокружность радиусом R.

Диаметр полуокружности совмещен с основанием.

Основные параметры треугольника:

a – основание, $b = b_0 + b_1 + b_2$ – боковая сторона;

h – высота, опущенная на основание;

β – угол при основании, S – площадь;

$p = b + a/2$ – полупериметр.

1) Зафиксируем радиус r вписанной окружности и без потери общности примем $\underline{r=1}$.

Длина боковой стороны b и её производная b' зависят от угла β:

$$b \;=\; b_1 + (b_0 + b_2) \;=\; \operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}(\beta/2);$$

$$b' \;=\; \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{1}{2\cdot\sin^2(\beta/2)} \;=\; \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{1}{1-\cos\beta} \;=\; \frac{1-\cos\beta-\cos^2\beta}{\cos^2\beta\cdot(1-\cos\beta)}.$$

Минимум b достигается в точке $b' = 0$:

$$\underline{\cos\beta = \phi,\;\; \operatorname{tg}\beta = \sqrt{\Phi}\,;}$$

$$b_1 = \sqrt{\Phi}, \quad (b_0 + b_2) = a/2 = \sqrt{\Phi^3}, \quad b_{\min} = \sqrt{\Phi^5} \approx 3.330\,, \quad p = S = \sqrt{\Phi^7}, \quad h = \Phi^2.$$

2) Зафиксируем теперь радиус вписанной полуокружности $\underline{R=1}$.

Полупериметр треугольника выражается нелинейной функцией от угла β

$$p \;=\; (b_0 + b_1) + b_2 + a/2 \;=\; \operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta + 1/\sin\beta\,.$$

Производная функции равна

$$p' = \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{\cos\beta}{\sin^2\beta} = \frac{1-2\cos^2\beta-\cos^3\beta}{\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta} = \left(1-\cos\beta-\cos^2\beta\right)\cdot\frac{1+\cos\beta}{\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta}\,.$$

Здесь применено классическое тождество $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$, а в кубическом трехчлене выделен квадратный трехчлен. В пределах прямого угла величина $\cos\beta>0$, поэтому равенство $p'=0$ имеет единственное решение:

$$\cos^2\beta+\cos\beta-1=0,\qquad \cos\beta=\phi,\qquad \underline{\beta=\arccos\ \phi\ \approx\ 51.83^{\circ}};$$

$$(b_0+b_1)=a/2=\sqrt{\Phi},\qquad b_2=\sqrt{\phi},\qquad b=S=\sqrt{\Phi^3},\qquad p_{\min}=\sqrt{\Phi^5}\approx 3.330,\qquad h=\Phi.$$

Среди всех равнобедренных треугольников с фиксированным радиусом r вписанной окружности, минимальная боковая сторона $b_{\min}$ – у треугольника с углом $\cos\beta=\phi$.

Среди всех равнобедренных треугольников с фиксированным радиусом R вписанной полуокружности, минимальный полупериметр $p_{\min}$ – у треугольника с углом $\cos\beta=\phi$.

Пока берем тайм-аут, для поднятия творческого настроя и вдохновения. – Окей.

To be continued...

Литература:

1. Денисов С.Ф., Денисова Л.В. Феномен околонаучного знания // Научный вестник Омской академии МВД России. – 2016, № 4(63), с. 54-58.
2. Никитин А.В. В плену «призрачных истин» // АТ. // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28241, 28.12.2022. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165190.htm.
3. Василенко С.Л. По ту сторону виртуальной реальности // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22617, 17.10.2016. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163086.htm.
4. Василенко С.Л. Формальная математика и практическое здравомыслие в задаче скатывания с вершин египетских пирамид // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22738, 21.11.2016. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163131.htm.
5. Шелаев А.Н. О минимальном времени спуска вдоль плоских и неплоских граней пирамиды во внешнем однородном гравитационном поле // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22709, 13.11.2016. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163121.htm.
6. Василенко С.Л. Современная геометрия золотой пропорции // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 07.02.2013. – artmatlab.ru/articles.php?id=97&sm=2.
7. Bataille M. Another Simple Construction of the Golden Section // Forum Geometricorum, **11** (2011), 55. – forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201106.pdf.
8. G. Odom and J. van de Craats, Elementary Problem 3007, American Math. Monthly, 90 (1983) 482; solution, 93 (1986) 572.
9. Niemeyer Jo. A Simple Construction of the Golden Section // Forum Geometricorum, **11** (2011), 53. – forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201105.pdf.
10. Cut the knot. Golden Ratio in Geometry. – cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml.
11. Василенко С.Л. "Золотоносные" и другие замечательные свойства равнобедренных треугольников в задачах на экстремум: от Евклида до наших дней. Часть первая // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28020, 12.08.2022. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165074.htm.