С.Л. Василенко

Интегральное исчисление с константой золотого сечения. Часть 4. Характерные особенности золотых интегралов

Знание расширяется быстрее,
чем способы его классифицировать
Кен Уилбер [47, с. 9]

Особенности интеграционных начал.

"Интер" – распространенное начало у многих слов и означает: между, внутри, посреди, вместе... Среди них: интернет (*inter* + *network* сеть), интервал, интерпол, интервенция, интерполяция (нахождение неизвестных промежуточных значений) и др.

"Интегр" – в принципе то же самое, только со смещением смыслового акцента на единение, слияние, группирование, сочетание и целостность.

Интеграл (от лат. *integralis*) буквально означает «составляющий целое» из частей.

В широком смысле интегральный аспект мыслится как объединение, синтез. Соединенный вместе, объединенный, связный, всеохватный [47, с. 16].

Конкретный объект, будь-то предмет, процесс или явление, является продуктом синтеза многих составляющих, образуя единство многообразия.

Интеракционистский дуализм в философии постулирует две независимые и взаимодействующие субстанции: материю и сознание.

В целом слово *интегральный* формирует эмоционально-положительные ассоциации.

Например, словосочетание «интегральная война» не употребляется.

Вместо него в широкой публичной сфере фигурирует «гибридная война», как знаковый термин двадцать первого века и особый тип конфликта современности в виде синхронизированного комбинирования конвенциональных и нерегулярных действий.

Исторически *гибрид* – биологический термин. В переносном значении означает *помесь* – что-либо совмещающее (сочетающее) признаки, качества и/или элементы различных предметов, явлений. Часто с противоположными оттенками.

Гибрид сочетается и "уживается" с войной в одном понятии, поскольку оба характеризуют отклонения от естественного развития в ходе биологической эволюции.

Дополнительные смыслы в данную терминологию впервые внес российский философ А.Дугин /Discred.ru. Русская аналитика, 30.08.2023/: «То, с чем мы имеем дело, это интегральная война. В ней всё сопряжено со всем – экономика с политикой, военные действия с культурными явлениями, теракты с процессами в сети, информация с массовой психологией, дипломатия с социальной инженерией, гуманитарные науки с борьбой за технологическое лидерство и природные ресурсы».

Подобная перегруппировка семантических форм понятна: от слабоактивного гибридного проявления к боле активному интегральному началу.

И всё же военная тематика чужда позитивному содержанию интеграционного объединения, свойственного природному закону единства.

Не случайно, современный американский мыслитель и теоретик интегрального подхода К.Уилбер смещает акцент в область стратегического мышления [47]: «Война парадигм – это битва за обладание эксклюзивным правом на то, как следует видеть мир».

Мир холистический, цельный. С передовыми концепциями интеграции сфер бытия и сознания: тела, разума и духа. С возможным диалогом науки и религии. С древнекитайской мудростью истинного миролюбия: «Повергнуть врага без сражения – вот вершина воинского искусства» /Сунь-Цзы, У- Цзы, Искусство войны, V век до н.э./

Любопытна трансформация интегрального начала во времени.

В математический анализ интеграл привнесен от латинских слов *integer* (целый) и *integralis* (составляющий целое), как аналог бесконечного суммирования в виде удлиненной буквы *S* (*summa*). Ньютон заложил основы. Лейбниц придумал обозначение. Бернулли предложил термин. Фурье ввел пределы интегрирования. Эйлер впервые описал метод численного решения задачи Коши. И так далее.

В широком смысле интегральный аспект подразумевает объединение, синтез.

Соответственно дифференциальный – фрагментацию-разделение, анализ.

Интегрирование стало неотъемлемым элементом исследования и абстрактного выражение разнообразных способов измерения переменных величин «и по мере вовлечения в человеческое познание всё новых и новых объектов реальной действительности математики создают всё более и более общие схемы интеграционных процессов с тем, чтобы охватить всё расширяющийся круг объектов, подлежащих измерению» [48].

Зародившись в древности, философия цельного знания и мироощущения через математическое интегрирование обрела второе дыхание и начала активно "прикладываться" к различным сферам жизнедеятельности.

Интегральный подход быстро завоевал доверие и стал «визитной карточкой» бизнеса, политики, науки, духовности. И уже в обновленном виде вошел составной частью в общую теорию систем, которая интегрирует наработки кибернетики, системного анализа, исследования операций, инженерии, синергетики, динамики неравновесных систем и др.

Начав свой путь от двух математических задач (восстановления функции по её производной и вычисления площади между графиком функции и осью абсцисс), интегрирование превратилось в мощный разнопланово-исследовательский инструментарий.

Следующий этап – интеграция интеграций или гармонизация (согласованность) через развитие межинтеграционных взаимодействий, новейшую регуляризацию и управление.

И тут невольно вспоминается золотник, который мал, но дорог.

Математическим символом структурной гармонизации является золотая пропорция, как минимальная базовая форма (эйдос) реализации системной согласованности и когерентности. Минимальная по сложности и единственная в дихотомии! За исключением наипростейшего деления пополам, которое вообще вне конкуренции.

Естественным продолжением изучения золотой пропорции с константой золотого сечения Ф (точнее золотого роста) становится исследование её поведения средствами самой математики в интегральном исчислении. – Другими словами, собственно золотые интегралы с числом $Ф = ф^{-1} \approx 1{,}618$. Поскольку золотой интеграл, содержащий в себе константу золотого сечения (ЗС), также объединяет в одно целое составные части.

Геометрически точка золотого сечения может находиться как внутри (*inter*) делимого отрезка, так и на его продолжении (внешнее деление). То есть деление и рост (приумножение), по сути, сливаются в одной модели диалектического синтеза.

Отсюда возникает обусловленная спайка-связь ЗС с интегрированием. И ставится конкретная задача: нахождение наиболее значимых проявлений ЗС в интегралах.

Наличие таковых существенных признаков должно способствовать обоснованию роли ЗС в общих интеграционных процессах. Каким образом, пока точно не знаем.

Всякий ищущий находит (Мф. 7:8), и удача обязательно улыбнется...

Весьма заманчивой выглядит идея информационных резонансов через логарифм функции меры хаоса и порядка (А.Харитонов). Хотя никто толком не знает, что такое информация. Понятие многолико, размыто и даже мистично, несмотря на то, что существует единица измерения *бит* с двумя логически-бинарными значениями: да (1) – нет (0).

Представления о Боге – это информация? Или нечто другое? – Вопрос нериторический.

Нюансы и неоднозначности нелинейного золотого сечения.

Смысл золотого сечения изначально связан с геометрическим делением отрезка на неравные части, длины которых образуют золотую пропорцию с их суммарной длиной.

Форма исходного отрезка обычно предполагается прямолинейной. Но может быть и криволинейной, описываемой нелинейным уравнением.

В первом случае, при любом положении прямолинейного отрезка на координатной плоскости, золотое сечение сохраняется и для проекций отрезка на осях координат.

Во втором случае, за счет нелинейностей, отношение проекций изменяется. Подобно нарушению принципа суперпозиции, характерного для стационарных линейных систем.

Рассмотрим пример простой параболы $y = x^2$ на единичном отрезке $x \in [0, 1]$.

Интеграл дает среднее значение функции на выбранном интервале:

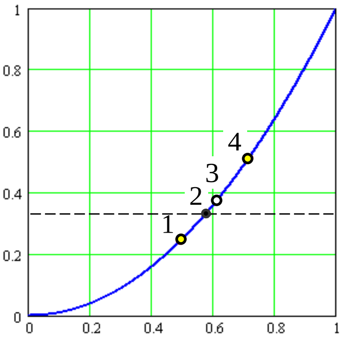
$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad (x_s, y_s) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right).$$

Длина дуги кривой на произвольном участке $x \in [0, t]$ выражается формулой

$$L(t) = \int_0^t \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^t \sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\ln\left(2t + \sqrt{1+4t^2}\right);$$

$$l = L(1) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) = \Phi - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\ln\,\Phi \approx 1{,}479\,.$$

Абсцисса x точки, которая отсекает произвольную часть $0 < \delta \le 1$ кривой, находится из равенства $L(x) = l \cdot \delta$. Сравнение длин отрезков на кривой с их проекциями на координатных осях (рис. 4.1) показывает, что все пропорции различаются.



№ п/п	Длина кривой до точки			Координаты точки	
			%	x	y
1	$l \cdot \phi^2$	0,565	12,0	0,494	0,244
2	$L(x_s)$	0,688	19,2	0,577	0,333
3	$l \cdot 0{,}5$	0,739	22,8	0,611	0,373
4	$l \cdot \phi$	0,914	36,7	0,716	0,512

Рис. 4.1. Распределение точек на параболе:
1, 4 – точки золотого деления кривой;
2 – среднее значение функции; 3 – середина дуги

Спрашивается тогда, следует ли вообще рассматривать ЗС нелинейных форм? – Конечно, да. Даже обязательно.

Золотое сечение – это универсальное проявление структурной гармонии в отношении целого и его частей. Оно может иметь всеобщий характер, независимо от природы объекта.

Даже биологические клетки, делясь пополам и приумножаясь по закону n^2, умудряются системно структурироваться в живые объекты с явно выраженными проявлениями осевой симметрии пятого порядка, свойственной золотому сечению.

Такой механизм упорядочения обеспечивает их эластичность, гибкость и, в конечном счете, собственно живучесть. Клетки делятся пополам, во избежание конкуренции-подавления, а объединяются в золотом отношении, чтобы структура "не закостенела".

Две элементарные в своем классе пропорции в результате диалектического взаимодействия деления-дифференциации и синтеза-интегрирования дают основу жизни.

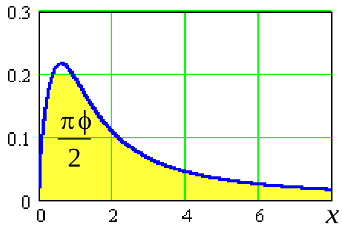
20. Золотой интеграл, равный половине произведения констант π и ϕ.

Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, то есть, какой буквой обозначается аргумент функции. Значит, после замены переменных можно снова вернуться к прежнему обозначению, а полученные интегралы сложить.

Получается оригинальный способ, который оказывается полезным, особенно при одинаковых пределах интегрирования, например [49]:

$$I(a)=\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\left(a^2+\ln^2 x\right)}=\left|\begin{matrix} x=u^{-1} \\ dx=-u^{-2}du \end{matrix}\right|=\int_\infty^0 \frac{-u^{-2}du}{\left(1+u^{-1}\right)\left(a^2+\ln^2 u^{-1}\right)}=\int_0^\infty \frac{x^{-1}dx}{(1+x)\left(a^2+\ln^2 x\right)};$$

$$2I(a)=\int_0^\infty \frac{\left(1+x^{-1}\right)dx}{(1+x)\left(a^2+\ln^2 x\right)}=\int_0^\infty \frac{dx}{x\left(a^2+\ln^2 x\right)}=\left| t=\ln x,\ dt=\frac{dx}{x}\right|=\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{a^2+t^2}=\frac{1}{a}\cdot \operatorname{atan}\frac{t}{a}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{a}.$$



$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\left(\phi^2+\ln^2 x\right)}=\frac{\pi}{2}\Phi\approx 2{,}5416}$$

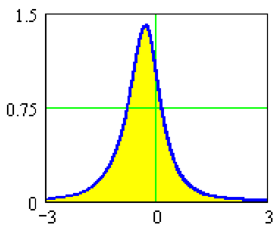
$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\left(\Phi^2+\ln^2 x\right)}=\frac{\pi}{2}\phi\approx 0{,}9708}$$

К слову, второй интеграл через год повторяется как «эпический результат» у другого автора [50] с легким плутовством: константа Ф сразу "загоняется" под знак интеграла.

Такое себе коллективно-интегральное творчество. Только случайно забывают сослаться на исследования своих коллег, выдавая уже известные результаты в виде своих собственных.

Ну, да ладно...

21. Симметричный "золотоносный" полином.



$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\left(1+x+x^2\right)^2+x^2}=\pi\sqrt{\frac{\Phi}{5}}\approx 0{,}3857}$$

В знаменателе дробной подынтегральной функции стоит возвратный (симметричный) полином четвертой степени с известным алгоритмом нахождения его корней:

$$A(x)=\left(1+x+x^2\right)^2+x^2=\underline{x^4+2x^3+4x^2+2x+1}=x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\right]=$$

$$=\left|t=x+\frac{1}{x}\right|=x^2\left(t^2+2t+2\right)\ \rightarrow\quad t_{1,2}=-1\pm i,\quad x^2-tx+1=0,\ x_{1..4}=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}.$$

Пары корней $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm i-\sqrt{-4\pm 2i}}{2}$ и $x_{3,4}=\dfrac{-1\pm i+\sqrt{-4\pm 2i}}{2}$ – комплексно сопряженные, поэтому исходный полином приводится к произведению двух квадратных трехчленов, действительные коэффициенты которых выражаются через константу ЗС:

$$A(x) = \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)\left(x^2 + p_2 x + q_2\right), \quad p_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\phi^3}, \; q_{1,2} = \Phi \pm \sqrt{\Phi}.$$

Интегрирование рациональных дробей такого вида хорошо изучено.

Опуская рутинные преобразования, сразу запишем неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{A(x)} = \frac{\sqrt{\phi}}{2\sqrt{5}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + p_1 x + q_1}{x^2 + p_2 x + q_2} + \frac{\sqrt{\phi^3} - \Phi^3}{D_1} \operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{\phi^3} + 2x}{D_2} + \frac{\sqrt{\phi^3} + \Phi^3}{D_2} \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{\phi^3} + 2x}{D_2} \right].$$

где $D_1 = \sqrt{4q_1 - p_1}$, $D_2 = \sqrt{4q_2 - p_2}$, $D_1 D_2 = \Phi^3 - 1$.

Для принятых пределов интегрирования $\pm\infty$ логарифм обращается в ноль, арктангенсы принимают значения $\pm \pi/2$, а сумма коэффициентов при них равна 2Φ

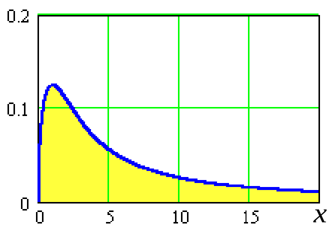
$$\frac{\sqrt{\phi^3} - \Phi^3}{D_1} + \frac{\sqrt{\phi^3} + \Phi^3}{D_2} = 2\Phi;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{A(x)} = \frac{\sqrt{\phi}}{2\sqrt{5}} \left[\frac{\pi}{2} 2\Phi - \left(-\frac{\pi}{2} 2\Phi \right) \right] = \pi \sqrt{\frac{\Phi}{5}}.$$

22. Полином с радикалом.

В крупной сети Stack Exchange онлайн-сообщества встречаются вопросы по интегралам с константой золотого сечения.

В частности, приведено такое равенство на его аутентичность [51], обоснование которого выполним с использованием комплексного анализа:



$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{\pi}{2}\sqrt{\phi} \approx 1{,}2349}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 2x + 5} dx = \left| \; u = \sqrt{x}, \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \right| = 2\int_0^\infty \frac{u^2}{u^4 + 2u^2 + 5} du = 2\int_0^\infty \frac{u^2}{\left(u^2 + 1 + 2i\right)\left(u^2 + 1 - 2i\right)} du =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{4}\right) \cdot \int_0^\infty \frac{1}{u^2 + 1 + 2i} du + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4}\right) \cdot \int_0^\infty \frac{1}{u^2 + 1 - 2i} du = \left\| \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \right\| =$$

$$= \frac{1 - i/2}{\sqrt{1 + 2i}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 + 2i}} \Bigg|_0^\infty + \frac{1 + i/2}{\sqrt{1 - 2i}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - 2i}} \Bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{2 - i}{\sqrt{1 + 2i}} + \frac{1}{2} \frac{2 + i}{\sqrt{1 - 2i}} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{-1 - 2i} + \sqrt{-1 + 2i}}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{\phi - i\sqrt{\Phi}} + \sqrt{\phi + i\sqrt{\Phi}}}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\phi}.$$

"Золотоносная жила" вмещает такие квадратные корни (см. вторую часть статьи):

$$\sqrt{-1\pm 2i}=a+ib,\quad -1\pm 2i=a^2-b^2\pm 2abi \quad\to\quad a^2-b^2=-1,\ ab=1,\ a^2-a^{-2}=-1,$$

$$a^4+a^2-1=0 \quad\to\quad a=\sqrt{\phi},\quad b=a^{-1}=\sqrt{\Phi},\quad \underline{\sqrt{-1\pm 2i}=\sqrt{\phi}\pm i\sqrt{\Phi}}.$$

"Движущей силой" в появлении ЗС является квадратный корень из пятерки, которая присутствует в знаменателе в виде свободного члена квадратного трехчлена. Изменяя коэффициент при x, аналогичным образом находим другие знаковые золотые интегралы:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+4x+5}dx = \pi\sqrt{\phi-\frac{1}{2}} \approx 1{,}0793 , \qquad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-2x+5}dx = \frac{\pi}{2}\sqrt{\Phi} \approx 1{,}9981 ,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-4x+5}dx = \pi\sqrt{\Phi+\frac{1}{2}} \approx 4{,}5721 , \qquad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+6x+5}dx = \frac{\pi\,\phi}{2} \approx 0{,}9708 .$$

23. «Супер-золотой интеграл» с двумя полиномами.

В работе M.Penn [52] вычисляется такой интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^3-x^2-1}{x^2-x-1}dx=\int_0^1\left(x+\frac{x-1}{x^2-x-1}\right)dx=\frac{1}{2}+\int_0^1\left(x+\frac{x-1}{x^2-x-1}\right)dx ,$$

где положительный корень полинома в знаменателе равен константе золотого сечения Φ, а вещественный корень в числителе – назван «супер-золотым сечением».

Рекурсию $f_n = f_{n-1} + f_{n-3}$ для характеристического алгебраического уравнения $x^3-x^2-1=0$ иногда называют «коровьей последовательностью» [53, с. 47].

Соответственно употребляются, на наш взгляд, надуманно-преувеличенные термины: «сверхзолотое число», «сверхзолотой прямоугольник» [53, с. 51].

Эдакое легкое терминологическое озорство сверх-окраски по типу экстравагантных префиксов (эпитетов): супер-, ультра-, мега- и т.п. Коими хоть пруд пруди.

Сдается, что подобная оценка, да ещё с позолотой, скорее всего, носит эмоциональный характер и подчеркивает, что числа Фибоначчи с их золотым аттрактором не единственны и допускают расширение в похожем числовом подмножестве.

В нашей работе [54] они названы триномами старших степеней $x^n-x^{n-1}-1$.

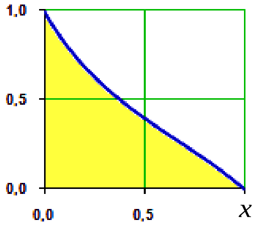
В отличие от несколько витиеватого нахождения непосредственно определенного интеграла [52], вычислим искомое значение через неопределенный интеграл:

$$\int\frac{x-1}{x^2-x-1}dx=\left|u=x-\frac{1}{2}\right|=\int\frac{u-1/2}{u^2-5/4}du=\int\frac{u}{u^2-5/4}du-\frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2-5/4}du=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(u^2-5/4\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}/2-u}{\sqrt{5}/2+u}\right)+C = \frac{\phi}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-u\right)+\frac{\Phi}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+u\right)+C=$$

$$=\frac{\phi}{\sqrt{5}}\ln(\Phi-x)+\frac{\Phi}{\sqrt{5}}\ln(\phi+x)+C.$$

$$\int_0^1\frac{x-1}{x^2-x-1}dx=\left.\frac{\phi\ln\,(\Phi-x)+\Phi\ln\,(\phi+x)}{\sqrt{5}}\right|_0^1=\frac{-1}{\sqrt{5}}\ln\,\phi+\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\,\Phi=\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\,\Phi=\frac{\ln\,\Phi^2}{\sqrt{5}}.$$



$$I=\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx=\frac{\ln \Phi^2}{\sqrt{5}}\approx 0{,}4304$$

Приведенное значение интеграла имеет разные проявления в математике, в частности, численно совпадает со следующими величинами:

- сумма бесконечного ряда с центральными биномиальными коэффициентами $C_{2n}^{\,n}=(2n)!\,/(n!)^2$ [31]

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot C_{2n}^{\,n}}=\frac{\ln \Phi^2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{csch}^{-1}(2);$$

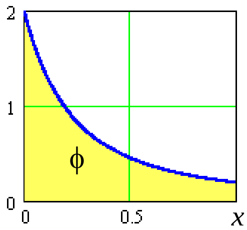
- сумма бесконечного ряда с числами Фибоначчи F

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{n\,2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{n\,3^n}=\frac{\ln \Phi^2}{\sqrt{5}};$$

- производная $f'(0)=\dfrac{\ln \Phi^2}{\sqrt{5}}$ для действительной части комплексной интерполяционной функции Фибоначчи $F(z)=\dfrac{\Phi^z-(\cos \pi z+i\sin \pi z)\cdot\Phi^{-z}}{\sqrt{5}}$;

- одно из особых значений L-рядов Дирихле [55] $L_{+5}(1)$ – важной теоретико-числовой функции в аддитивной теории чисел.

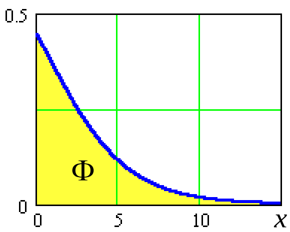
24. Два золотых интеграла с корнем из пяти в левой части: $\sqrt{5}\ \Rightarrow\ \Phi$ или ϕ.



$$\int_0^1 \frac{2dx}{\left(1+\sqrt{5}x\right)^2}=\phi\approx 0{,}6180$$

$$\int_0^1 \frac{2dx}{\left(1+\sqrt{5}x\right)^2}=\left|\begin{matrix} u=1+\sqrt{5}x\\ du=\sqrt{5}dx\end{matrix}\right|=\frac{2}{\sqrt{5}}\int_1^{1+\sqrt{5}}\frac{du}{u^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{u}\right)_1^{1+\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{1+\sqrt{5}}+1\right)=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\phi.$$

Второй интеграл связан с работой [56]:



$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{\sqrt{5^x}+\sqrt{5}-1}}=\Phi$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{5^{x/4}+2\phi} = \int_0^\infty \frac{5^{-x/4}\,dx}{1+2\phi\cdot 5^{-x/4}} = \left| \begin{array}{l} t=1+\left(\sqrt5+1\right)5^{-x/4} \\ dt=-\dfrac{\phi}{2}5^{-x/4}\ln 5\,dx \end{array}\right| = \int_{\sqrt5}^{1} \frac{-2\,dt}{\phi\ln 5\cdot t} = \frac{2}{\phi\ln 5}\cdot\ln t\,\Big|_1^{\sqrt5} = \frac{2\ln\sqrt5}{\phi\ln 5}=\Phi.$$

25. Золотые интегралы с корнем из пяти в правой части.

25.1. Для вычисления следующего интеграла воспользуемся подходом [57], а также интегрированием по частям согласно компактной английской *DI*-схеме:

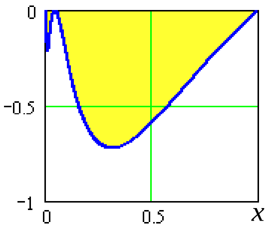
$$\int_0^1 \frac{\sin^2(\ln x)}{\ln x}dx = \left| \begin{array}{l} \ln x=-t \\ dx=-e^{-t}dt \end{array}\right| = \int_\infty^0 \frac{\sin^2(-t)}{-t}\left(-e^{-t}\right)dt = -\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right)dt = -\int_0^\infty e^{-t}\int_0^1 \sin(2ut)\,du\,dt =$$

$$\left\| \int_0^1 \sin(2ut)du = -\frac{\cos(2ut)}{2t}\Big|_0^1 = \frac{1}{2t}(1-\cos 2t) = \frac{\sin^2 t}{t} \right\| = -\int_0^1\left(\int_0^\infty e^{-t}\sin(2ut)\,dt\right)du = -\int_0^1 \boldsymbol{J}\,du =$$

$$= -\frac14\int_0^1\frac{8u\,du}{1+4u^2} = -\frac14\int_0^1\frac{d\left(1+4u^2\right)}{1+4u^2} = -\frac14\ln\left(1+4u^2\right)\Big|_0^1 = -\frac{\ln 5}{4} = -\frac{\ln\sqrt5}{4} = -\frac{\ln(\phi+\Phi)}{2}.$$

$$\left\| \boldsymbol{J} = \int_0^\infty e^{-t}\sin(2ut)\,dt = \Big[\underbrace{-e^{-t}\sin(2ut)}_{=0} - \underbrace{2ue^{-t}\cos(2ut)}_{=2u}\Big]_0^\infty - 4u^2\boldsymbol{J};\quad \boldsymbol{J}=2u-4u^2\boldsymbol{J},\quad \boldsymbol{J}=\frac{2u}{1+4u^2} \right\|$$

	D	**I**
+	$\sin 2ut$	e^{-t}
–	$2u\cos 2ut$	$-e^{-t}$
+	$-4u^2\sin 2ut$	e^{-t}



$$\boxed{\int_0^1 \frac{\sin^2(\ln x)}{\ln x}dx = -\frac{\ln(\phi+\Phi)}{2} \approx -0{,}4024}$$

Можно отметить несколько необычный вид функции с "хвостиком", который привносит около 1 процента площади. Тем не менее, этого аппендикса хватает, чтобы сформировать точный золотой интеграл. Мал золотник, да дорог.

Примечательно, если его включить в площадь под кривой (в пределах квадрата 1×1), то суммарная площадь станет равной $\sim\phi$. Нечто «золотой метаморфозы».

25.2. Или такой простенький интеграл с классической заменой переменных:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x} = \left| t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \right| = \int_0^\infty \frac{1}{3+2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^\infty\frac{2dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{\sqrt5}.$$

25.3. Как-то наткнулись на любопытный интеграл с квадратным трехчленом в знаменателе и лаконичным значением $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+4x+4}dx = \ln\sqrt2$.

Поскольку константа ЗС обусловлена решением квадратного уравнения, решили поэкспериментировать с коэффициентами наудачу. "В лоб" не прошло.

Компьютерные "решалки" дают только численные величины, без малейших намеков-подсказок на аналитику. Тогда перешли к общему виду и в результате получили:

$$I=\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+px+q}\,dx=\left|\, x=\frac{q}{t},\, dx=-\frac{q}{t^2}\,dt \,\right|=\int_\infty^0 \frac{\ln q/t}{\frac{q^2}{t^2}+\frac{pc}{t}+q}\left(-\frac{q}{t^2}\,dt\right)=\int_0^\infty \frac{\ln q-\ln t}{q+pt+t^2}\,dt=$$

$$=\ln q\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+pt+q}-\int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2+pt+q}\,dt=\ln q\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+pt+q}-I\ ;$$

$$\frac{2I}{\ln q}=\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+pt+q}=\int_0^\infty \frac{dt}{\left(t+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\Bigg|_0^\infty=$$

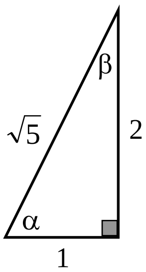
$$=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4q-p^2}}{p}.$$

$$I=\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+px+q}\,dx=\frac{\ln q}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4q-p^2}}{p}\ .$$

Подобное решение наверняка где-то уже приводилось. Не столь важно.

Зато многое прояснилось, и появилась возможность осознанно-четких интерпретаций.

Остановились на двух частных случаях с явным геометрическим представлением, которое восходит к классическому построению золотого сечения на основе прямоугольного треугольник с катетами, равными 1 и 2.



$\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\approx 26{,}57^{\circ}$

$\alpha=\operatorname{arctg} 2\approx 63{,}43^{\circ}$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+2x+5}\,dx=\frac{\ln\sqrt{5}}{2}\operatorname{arctg} 2\approx 0{,}4455}$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+4x+5}\,dx=\ln\sqrt{5}\,\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\approx 0{,}3731}$$

Как видим, арктангенсы дают значения острых углов данного треугольника, а интегрирование на бесконечном интервале $[0,\infty]$ через функцию логарифма сжимает (упаковывает) до корня из пяти $\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}=\phi+\Phi$.

Кроме того, "двоичный код» (1:2) самого корня $\sqrt{5}$ также проявляется через интегрирование и/или суммирование, например:

$$\ln\sqrt{5}=\frac{\ln 5}{2}=\sqrt{2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^4-1}{\ln x}\,dx=\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^{n\frac{n+1}{2}}}{2^n(2n+1)}\approx 0{,}8047\,.$$

Остается добавить, что представленный интеграл с логарифмом внешне похож на полином с радикалом (п. 22).

26. От общего решения к золотым интегралам и константе ЗС.

26.1. Рассмотрим определенный интеграл общего вида $I(m,n)$, для вычисления которого используется специальная бета-функция (интеграл Эйлера первого рода) $\mathrm{B}(a,b)$ на отрезке [0, 1] и гамма-функция $\Gamma(x)$ с её формулой дополнения $(\csc = 1/\sin)$

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}:$$

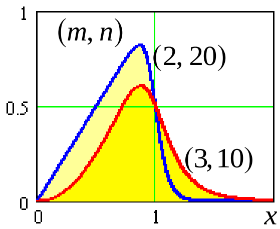
$$I(m,n)=\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx=\left|\begin{array}{l} x^n=\dfrac{t}{1-t},\quad x=\left(\dfrac{t}{1-t}\right)^{1/n} \\ dx=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{t}{1-t}\right)^{1/n-1}\dfrac{dt}{(1-t)^2}\end{array}\right|=\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\left(\dfrac{t}{1-t}\right)^{(m-1)/n}}{(1-t)^{-1}}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{1/n-1}\frac{dt}{(1-t)^2}=$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{m/n-1}(1-t)^{(1-m/n)-1}=\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)=\underline{\frac{\pi}{n}\csc\frac{\pi m}{n}}.$$

Можно составлять разные комбинации параметров $m, n>m$, которые в том числе приводят к золотым решениям, например:

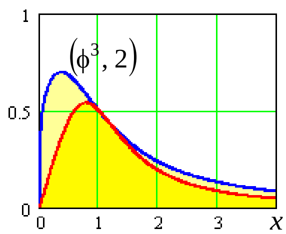
$$\csc\frac{\pi}{10}=2\Phi$$

$$\csc\frac{3\pi}{10}=2\phi$$



$$\boxed{I(2,20)=\int_0^\infty \frac{x}{1+x^{20}}dx=\frac{\pi\Phi}{10}\approx 0{,}5083}$$

$$\boxed{I(3,10)=\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^{10}}dx=\frac{\pi\phi}{5}\approx 0{,}3883}$$



$$\boxed{\int_0^\infty \frac{x^{\phi^3}}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}\csc(\pi\phi)\approx 1{,}6853}$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{x}{1+x^{2\Phi}}dx=\frac{\pi\phi}{2}\csc(\pi\phi)\approx 1{,}0416}$$

"Золотые" значения косеканса равны: $\csc\dfrac{3\pi}{10}=\csc\dfrac{7\pi}{10}=2\phi$, $\csc\dfrac{\pi}{10}=\csc\dfrac{9\pi}{10}=2\Phi$.

Если для фиксированного значения n положить $m=\dfrac{3n}{10}$ и $m'=\dfrac{7n}{10}$, либо $m=\dfrac{n}{10}$ и $m'=\dfrac{9n}{10}$, то получим формулы для интегрального выражения золотых констант (рис. 1–2):

$$\boxed{\phi=\frac{n}{2\pi}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{10}n-1}}{1+x^n}dx=\frac{n}{2\pi}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{7}{10}n-1}}{1+x^n}dx},\qquad \boxed{\Phi=\frac{n}{2\pi}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{10}n-1}}{1+x^n}dx=\frac{n}{2\pi}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{9}{10}n-1}}{1+x^n}dx}.$$

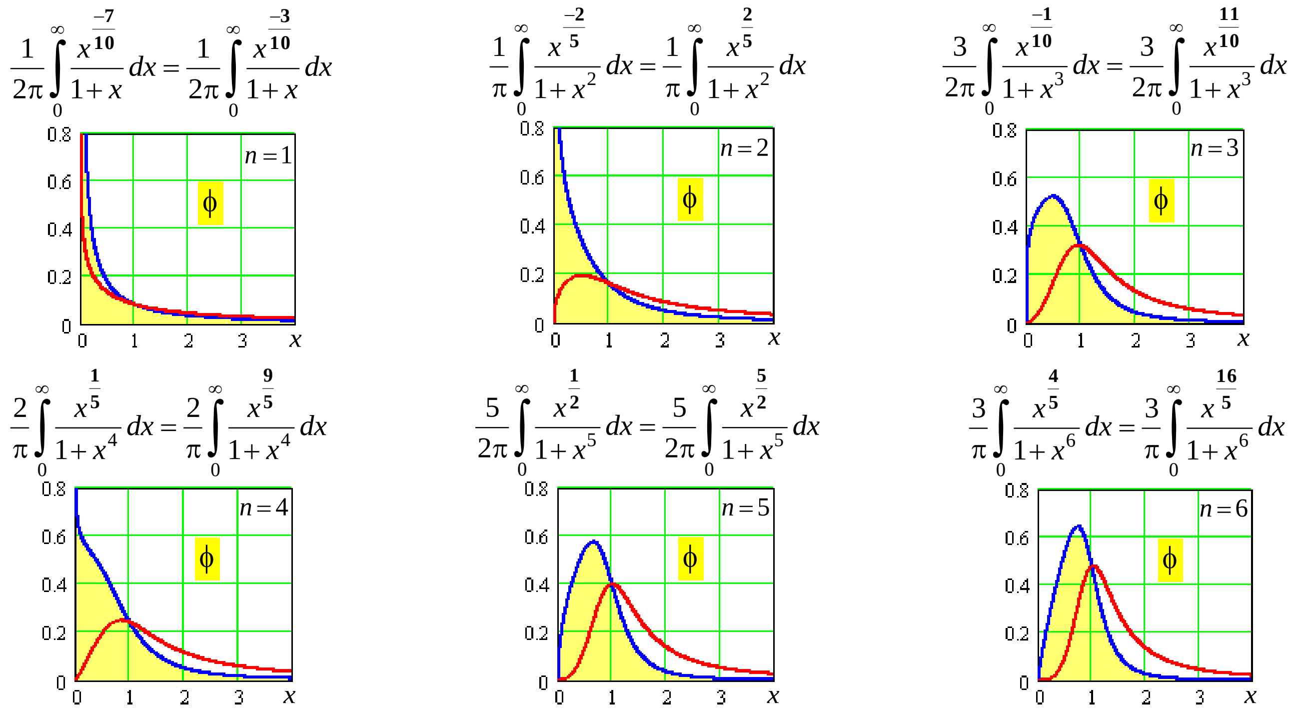


Рис. 1. Интегралы равны <малой> константе золотого сечения ϕ

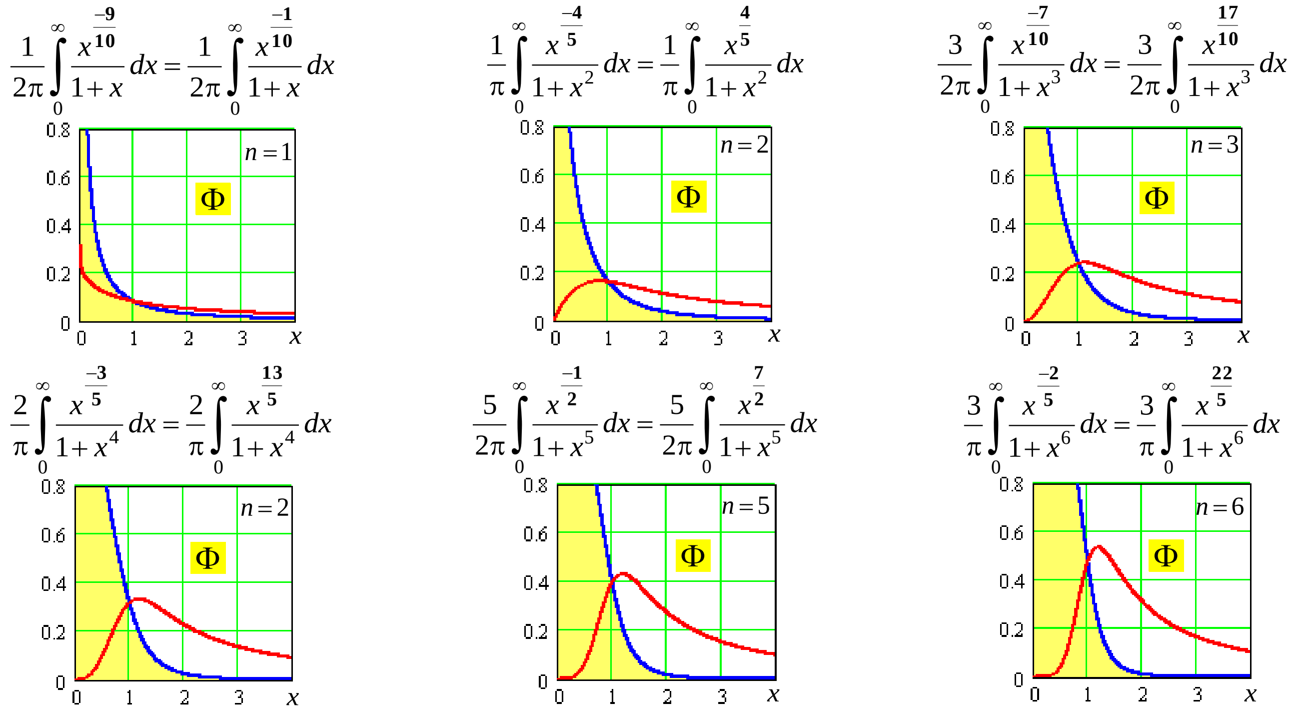


Рис. 2. Интегралы равны константе золотого сечения Φ

Пожалуй, это первые представления константы золотого сечения через интегрирование функций, которые не содержат в явном виде параметры, зависящие от ЗС.

Можно сказать, совершенно новый взгляд на возможную природу золотого сечения.

Без чисел Фибоначчи, золотой пропорции, геометрических построений и т.п.

Единственное что здесь проявляется, так это пятый порядок. Причем дальнего действия посредством интегрирования на бесконечном интервале $[0,\infty)$.

26.2. Замена переменных позволяет видоизменять формулу бета-функции, например

$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\left|\ x=\frac{t}{1+t},\ dx=\frac{dt}{(1+t)^2},\ 1-x=\frac{1}{1+t}\ \right|=\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt$$

и находить с её помощью другие интегралы [58]:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^s\right)^s}=\left|\begin{array}{c} t=x^s,\ x=t^{1/s} \\ dt=sx^{s-1}dx \end{array}\right|=\int_0^\infty \frac{t^{1/s-1}}{(1+t)^s}\frac{dt}{s}=\frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{t^{1/s-1}}{(1+t)^{1/s+s-1/s}}dt=$$

$$=\frac{1}{s}\mathrm{B}\left(\frac{1}{s},s-\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}\cdot\frac{\Gamma(1/s)\,\Gamma(s-1/s)}{\Gamma(s)}.$$

С учетом рекуррентного отношения $\Gamma(1+s)=s\Gamma(s)$ и равенства $\Phi=1+\phi=\phi^{-1}$ отсюда следует самый первый "единичный" золотой интеграл из первой части (п. 1) нашей работы, как частный случай:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^\Phi\right)^\Phi}=\frac{\Gamma(\phi)\,\Gamma(1)}{\Gamma(1+\Phi)}=\frac{\Gamma(\phi)\cdot 1}{\Phi\cdot\phi\cdot\Gamma(\phi)}=1.$$

26.3. Уместно отметить, что математические задачи часто решаются проще в обобщенном виде, откуда затем получают нужные частные (особенные) решения.

По такому принципу, например, построен упомянутый ранее метод интегрирования Лейбница-Фейнмана, который хорошо себя зарекомендовал для многих, в том числе "неподдающихся" интегралов, как выражение общенаучного дедуктивного подхода.

Так, вместо интеграла $I(s)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^s}dx,\ s>1$ можно рассмотреть интеграл [59]

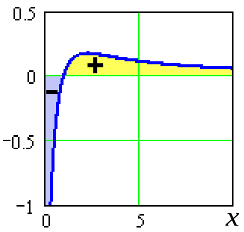
$$J(a)=\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^s}dx,\ a>1,\qquad J'(a)=\frac{\partial}{\partial a}J(a)=\int_0^\infty \frac{x^a\ln x}{1+x^s}dx\ \rightarrow\ I(s)=J'(0).$$

$$\left\|\ \mathrm{B}(p,q)=\int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du=\ |q=1-p|=\int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{1+u}du=\mathrm{B}(p,1-p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)}=\pi\cdot\csc\pi p\ \right\|$$

$$J(a)=\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^s}dx=\left|\begin{array}{c} x^s=u,\ x=u^{1/s} \\ dx=\frac{1}{s}u^{1/s-1}du \end{array}\right|=\frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{a+1}{s}-1}}{1+u}dx=\frac{1}{s}\Gamma\left(\frac{a+1}{s}\right)\Gamma\left(1-\frac{a+1}{s}\right)=\frac{\pi}{s}\csc\frac{\pi a+\pi}{s};$$

$$J'(a)=-\frac{\pi^2}{s^2}\csc\frac{\pi a+\pi}{s}\ \mathrm{ctg}\,\frac{\pi a+\pi}{s};$$

$$I(s)=J'(0)=-\frac{\pi^2}{s^2}\csc\left(\frac{\pi}{s}\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{s}\right).$$



$$I(\Phi)=\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^\Phi}\,dx=-(\pi\phi)^2\csc\pi\phi\ \mathrm{ctg}\ \pi\phi\approx 1{,}5726$$

27. Через «трюк Фейнмана» к пентагону.

27.1. Упомянутый метод интегрирования Лейбница-Фейнмана в англоязычной литературе часто именуют «трюком Фейнмана».

Принципиальных возражений нет, поскольку трюк – это эффектный искусный маневр и/или технический прием.

"Решение" интегралов в общем случае являет собой истинное математическое искусство, отличающееся изяществом подходов. Разбавление унылых формул лаконичным термином "трюк" лишь привносит безобидный эпатаж.

Следующий пример обобщает задачу с «монстром-логарифмом» [60], которая просто решается именно с трюком Фейнмана:

$$I(a)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left(x^4+a^4\right)}{x^2+1}dx=2\int_0^\infty\frac{\ln\left(x^4+a^4\right)}{x^2+1}dx=2\int_0^\infty\frac{\ln\left(x^2+ia^2\right)+\ln\left(x^2-ia^2\right)}{x^2+1}dx\,;$$

$$J(s)=\int_0^\infty\frac{\ln\left(x^2+s\right)}{x^2+1}dx,\qquad J'(s)=\int_0^\infty\frac{dx}{\left(x^2+s\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{1-s}\left(\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+s}-\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+1}\right)=$$

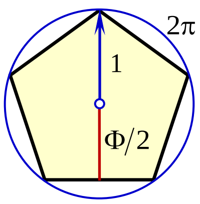
$$=\frac{1}{1-s}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{s}}-\mathrm{arctg}\ x\right]_0^\infty=\frac{\pi}{2}\frac{1-\sqrt{s}}{(1-s)\sqrt{s}}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{s}+s};$$

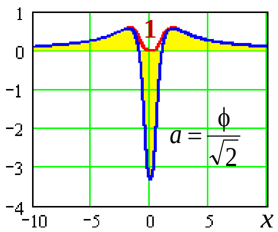
$$J(s)=\frac{\pi}{2}\int\frac{ds}{\sqrt{s}+s}=\left|\begin{matrix}s=u^2\\ ds=2u\,du\end{matrix}\right|=\pi\int\frac{du}{1+u}=\pi\ln\left(1+\sqrt{s}\right)+C\,,\qquad J(0)=0\ \to\ C=0\,;$$

$$I(a)=2J\left(ia^2\right)+2J\left(-ia^2\right)=2\pi\ln\left[\left(1+a\sqrt{i}\right)\left(1+a\sqrt{-i}\right)\right]=\underline{2\pi\ln\left(1+a^2+a\sqrt{2}\right)}.$$

$$I\left(\frac{\phi}{\sqrt{2}}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left(x^4+\phi^4/4\right)}{x^2+1}dx=2\pi\ln\left(1+\frac{\phi^2}{2}+\phi\right)=2\pi\ln\left(1+\frac{\Phi}{2}\right)=2\pi\ln h\,,$$

где $h=1+\dfrac{\Phi}{2}$ – высота <правильного> пентагона, вписанного в окружность с единичным радиусом и длиной 2π (см. рисунок).





$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left(x^4+\phi^4/4\right)}{x^2+1}dx=2\pi\ln\left(1+\frac{\Phi}{2}\right)\approx 3{,}7246}$$

27.2. Далее у нас фигурирует логарифм с косинусом на π-интервале [61].

Интеграл с "трюком" позволяет находить решение в несколько обобщенном виде и далее (путем подстановки) переходить на характерные частные примеры.

$$I(a)=\int_0^\pi \ln(1-a\cos x)dx,\quad I'(a)=-\int_0^\pi \frac{\cos x}{1-a\cos x}dx=\frac{1}{a}\left(\int_0^\pi \frac{1-a\cos x}{1-a\cos x}dx-\int_0^\pi \frac{1}{1-a\cos x}dx\right)=$$

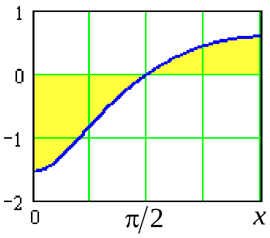
$$=\frac{\pi}{a}-\frac{1}{a}\int_0^\pi \frac{1}{1-a\cos x}dx=\left|t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\right|=\frac{\pi}{a}-\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{1}{1-a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+a)t^2+(1-a)}=\left\|\int_0^\infty \frac{dx}{px^2+q^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{pq}}\right\|=\frac{\pi}{a}-\frac{\pi}{a\sqrt{1-a^2}},\quad |a|<1;$$

$$I(a)=\int \frac{\pi}{a}da-\int \frac{\pi\, da}{a\sqrt{1-a^2}}=\pi\ln a+\frac{\pi}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{1-\sqrt{1-a^2}}+C=\frac{\pi}{2}\ln\left(a^2\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{1-\sqrt{1-a^2}}\right)+C,$$

$$I(0)=0=\frac{\pi}{2}\ln\left(\lim_{a\to 0}\frac{a^2+a^2\sqrt{1-a^2}}{1-\sqrt{1-a^2}}\right)+C=\pi\ln 2+C,\quad C=-\pi\ln 2;$$

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln\left(a^2\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{1-\sqrt{1-a^2}}\right)-\pi\ln 2,\qquad I(\sqrt{\phi})=\frac{\pi}{2}\ln\Phi^2-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{\Phi}{2}.$$

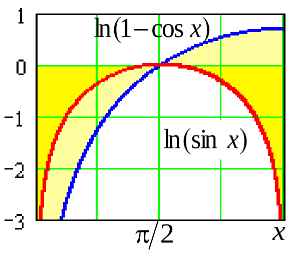


$$\boxed{\int_0^\pi \ln\left(1-\sqrt{\phi}\cos x\right)dx=\pi\ln\frac{\Phi}{2}\approx -0{,}6658}$$

В данном случае "трюк" оправдан, позволяя выйти на золотой интеграл $I(\sqrt{\phi})$.

Но для вычисления $I(1)$ он становится тяжеловатым и малопродуктивным.

Можно поступить проще, например, применив особое свойство определенных интегралов (*king's rule* – королевское правило) kr: $\int_0^b f(x)dx=\int_0^b f(b-x)dx$:



$$\boldsymbol{J}=\int_0^\pi \ln(1-\cos x)dx\overset{kr}{=}\int_0^\pi \ln(\sin x)dx=\int_0^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\int_0^\pi \ln 2\,dx+\int_0^\pi \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx+\int_0^\pi \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)dx\overset{kr}{=}\pi\ln 2+2\int_0^\pi \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\pi\ln 2+4\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)dt=\pi\ln 2+2\int_0^\pi \ln(\sin x)dx=\pi\ln 2+2\boldsymbol{J}\ \Rightarrow\ J=-\pi\ln 2.$$

Наглядно, эффектно, без излишнего трюкачества.

28. Золотой интеграл с непрерывной дробью.

Рассмотрим неопределенный интеграл, в который встроена цепная дробь [62]:

$$I=\int\left(\Phi^x+y(x)\right)dx,$$

где $y(x)=\dfrac{\Phi}{e^x+\dfrac{\Phi}{e^x+\dfrac{\Phi}{e^x+\ldots}}}=\dfrac{\Phi}{e^x+y(x)}=\dfrac{-e^x\pm\sqrt{e^{2x}+4\Phi}}{2}.$

$$I=\int\left(\Phi^x-\frac{e^x}{2}\pm\frac{\sqrt{e^{2x}+4\Phi}}{2}\right)dx=\frac{\Phi^x}{\ln x}-\frac{e^x}{2}\ \pm\ \frac{1}{2}J;$$

$$J=\int\sqrt{e^{2x}+4\Phi}\,dx\ =\left|\begin{array}{c} e^x=2\sqrt{\Phi}\ \mathrm{tg}\,\theta \\ e^x dx=2\sqrt{\Phi}\sec^2\theta\,d\theta\end{array}\right|=\int\sqrt{4\Phi\ \mathrm{tg}^2\theta+4\Phi}\,\frac{\sec^2\theta}{\mathrm{tg}\,\theta}\,d\theta=$$

$$=\int 2\sqrt{\Phi}\sec\theta\frac{\sec^2\theta}{\sin\theta}\cos\theta\,d\theta=2\sqrt{\Phi}\int\frac{1+\mathrm{tg}^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta=2\sqrt{\Phi}\left(\int\mathrm{cosec}\,\theta\,d\theta+\int\mathrm{tg}\,\theta\sec\theta\,d\theta\right)=$$

$$=2\sqrt{\Phi}\cdot[\sec\theta-\ln(\mathrm{cosec}\,\theta+\mathrm{ctg}\,\theta)]+C\quad\leftarrow\quad\left|\mathrm{tg}\,\theta=\frac{e^x}{2\sqrt{\Phi}},\ \ \theta=\mathrm{arctg}\,\frac{e^x}{2\sqrt{\Phi}}\right|.$$

В таком виде решение явно не законченное и требует дополнительного упрощения:

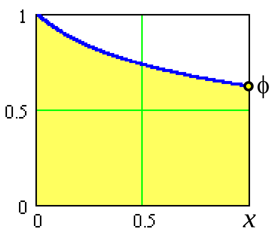
$$J=\int f\,dx\ =f-2\sqrt{\Phi}\tanh^{-1}\frac{f}{2\sqrt{\Phi}}+C,$$

$$f=f(x)=\sqrt{e^{2x}+4\Phi},\ \ \tanh^{-1}z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}.$$

В целом искомый неопределенный интеграл I выглядит вполне прилично:

$$I=\int\left(\Phi^x+\frac{\Phi}{e^x+}\ \frac{\Phi}{e^x+}\ \frac{\Phi}{e^x+\ldots}\right)dx=\frac{\Phi^x}{\ln x}-\frac{e^x}{2}\ \pm\ \frac{1}{2}\left(f-2\sqrt{\Phi}\tanh^{-1}\frac{f}{2\sqrt{\Phi}}\right)+C.$$

29. Золотой интеграл с бесконечно вложенным радикалом.



$$\boxed{\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}}=2\phi+\ln\phi\approx0{,}75486}$$

Несмотря на «устрашающе-длинный хвост», вложенный радикал путем простого преобразования приводится к одному квадратному корню, который на правой границе интегрирования дает значение √5.

Естественным продолжением становится появление константы золотого сечения.

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \to \quad x = \sqrt{1+x} = \sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$
$$x = \sqrt{x+1} = \sqrt{x+\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}.$$

Первое равенство является традиционно-демонстрационным для уникального представления константы ЗС через вложенные радикалы, содержащие только единицы

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}.$$

Второе равенство менее известно, хотя оно также отражает феноменальное свойство "самовыражения" константы через самоё себя

$$\Phi = \sqrt{\Phi+\sqrt{\Phi+\sqrt{\Phi+\cdots}}},$$

и никакое другое число не выражается подобным образом.

Чтобы найти искомый интеграл, "свернем" бесконечно вложенный радикал до конечной аналитической функции $y = y(x)$:

$$y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}};$$
$$y^2 = x + \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}} = x + y;$$
$$y^2 - y - x = 0, \;\; y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4x}}{2}.$$

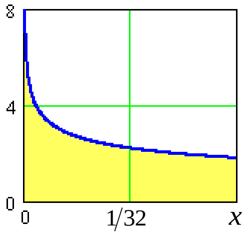
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+4x}} = \left[\sqrt{1+4x} - \ln\left(\sqrt{1+4x}+1\right)\right]\Big|_0^1 =$$
$$= \sqrt{5} - \ln\left(\sqrt{5}+1\right) - 1 + \ln 2 = \sqrt{5} - 1 + \ln\frac{2}{\sqrt{5}+1} = 2\phi + \ln\phi.$$

Ограничимся двумя вложениями радикала с неопределенным интегралом [19, 20]

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,dx = 2\sqrt{x+\sqrt{x}}\left(1 - \frac{\sinh^{-1}\left(\sqrt[4]{x}\right)}{\sqrt{\sqrt{x}+1}\;\sqrt[4]{x}}\right) + \text{constant}}$$

Учитывая присутствие корня четвертой степени, а также характерный "спутник" золотого сечения в виде деления пополам или 1/2, целесообразно ограничить интервал определенного интеграла величиной $1/16 \to \sqrt[4]{1/16} = 1/2$.

После подстановки получаем золотой интеграл, выраженный через ареакосеканс или золотую константу:



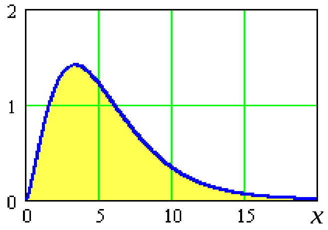
$$\boxed{\int_0^{1/16} \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{5}}{2} - 2\,\mathrm{arcsch}\,2 = \Phi - 2\ln\Phi - \frac{1}{2} = 0{,}1556}$$

Простой зависимостью назвать нельзя, но зато наличествует искомая связь.

30. Симметрично-золотой интеграл.

В работе [63] продемонстрирован красивый интеграл, в котором подынтегральная функция состоит из показательной и степенной функций константы золотого сечения Φ.

В решении содержится гамма-функция, широко применяемая в науке:



$$\int_0^\infty \frac{x^\Phi}{\Phi^x}dx = \frac{\Gamma\left(\Phi^2\right)}{(\ln\Phi)^{\Phi^2}} \approx 9{,}8354$$

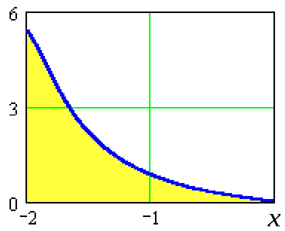
Решение на удивление короткое, с использованием основного свойства гамма-функции в виде её рекуррентного отношения $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$:

$$\int_0^\infty x^\Phi\Phi^{-x}dx = \int_0^\infty x^\Phi e^{-x\ln\Phi}dx = \left| \begin{aligned} e^{x\ln\Phi} &= t \\ dx &= dt/\ln\Phi \end{aligned} \right| = \int_0^\infty \left(\frac{t}{\ln\Phi}\right)^\Phi e^{-t}\frac{dt}{\ln\Phi} =$$

$$= \frac{1}{(\ln\Phi)^{\Phi+1}}\int_0^\infty t^\Phi e^{-t}dt = \frac{1}{(\ln\Phi)^{\Phi+1}}\Gamma(\Phi+1) = \frac{\Gamma\left(\Phi^2\right)}{(\ln\Phi)^{\Phi^2}} = \frac{\Gamma\left(\Phi^{-1}\right)}{(\ln\Phi)^{\Phi^2}}.$$

31. Золотой интеграл с экспонентой.

Путем несложных преобразований с экспонентой и с учетом неопределенного интеграла $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}x + C = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$ можно получить следующее элегантное решение [64]:



$$\int_{-2}^{0}\frac{-x}{\sqrt{e^x+(x+2)^2}}dx = 6\ln\Phi \approx 2{,}8873$$

$$\int_{-2}^{0}\frac{-x}{\sqrt{e^x+(x+2)^2}}dx = \int_{-2}^{0}\frac{-x}{e^x\sqrt{1+e^{-x}(x+2)^2}}dx = \int_{-2}^{0}\frac{-xe^{-x/2}}{\sqrt{1+\left(e^{-x/2}(x+2)\right)^2}}dx =$$

$$= \left| u = e^{-x/2}(x+2),\ du = \frac{-x}{2}e^{-x/2}dx \right| = \int_0^2\frac{2du}{\sqrt{1+u^2}} =$$

$$= 2\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\Big|_0^2 = 2\ln\left(2+\sqrt{5}\right) = 2\ln\Phi^3 = 6\ln\Phi.$$

Конечно, напрашиваются и простые, но по-своему примечательные золотые интегралы, основанные на известных свойствах экспоненты:

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x\phi}dx=\Phi \qquad \int_0^\infty e^{-x\Phi}dx=\phi}.$$

Или возьмем такой интеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^\infty\left(\int_a^b e^{-yx}dy\right)dx=\int_a^b\int_0^\infty e^{-yx}dx\,dy=\int_a^b\left[-\frac{e^{-yx}}{y}\right]_0^\infty dy=\int_a^b\frac{dy}{y}=\ln\frac{b}{a}.$$

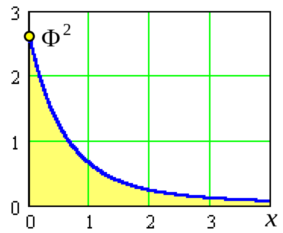
Например, при $a=1$ подстановка константы ЗС дает соответствующие логарифмы:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-\Phi x}}{x}dx=\ln\Phi, \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-\phi x}}{x}dx=\ln\phi.$$

Аналогично и для интеграла $I(a)$ с квадратом функции, без излишнего нагромождения тройных интегралов при $a=1$ [65], в общем виде с использованием правила Лейбница:

$$I(a)=\int_0^\infty\left(\frac{1-e^{-ax}}{x}\right)^2dx=a\ln 4, \qquad I'(a)=2\int_0^\infty\frac{-x}{x^2}\left(1-e^{-ax}\right)\left(-e^{-ax}\right)dx=2\cdot\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-2ax}}{x}dx=2\cdot\ln 2;$$

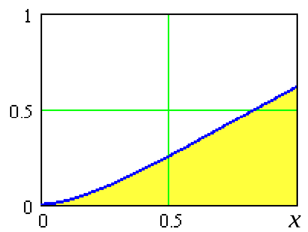
$$I(a)=\int I'(a)da=\underline{a\ln 4}+C, \qquad I(0)=0\ \to\ C=0.$$



$$\boxed{\int_0^\infty\left(\frac{1-e^{-\Phi x}}{x}\right)^2dx=\Phi\ln 4\approx 2{,}2431}$$

32. Зеркально-золотой интеграл.

Возьмем несложный интеграл, испещренный шестью значениями золотой константы по обе части равенства:



$$\boxed{\int_0^1\frac{\phi x^{\phi-1}}{1-\phi x^\phi}dx=2\Phi\ln\Phi\approx 1{,}5572}$$

Действительно:

$$\int\frac{ax^{a-1}}{1-ax^a}dx=\left|\begin{matrix}u=1-ax^a\\ du=-a^2x^{a-1}dx\end{matrix}\right|=-\frac{1}{a}\int\frac{du}{u}=-\frac{1}{a}\ln u+C=-\frac{\ln\left(1-ax^a\right)}{a}+C;$$

$$\int_0^1\frac{\phi x^{\phi-1}}{1-\phi x^\phi}dx=-\left.\frac{\ln\left(1-\phi x^\phi\right)}{\phi}\right|_0^1=-\frac{\ln(1-\phi)}{\phi}=-\frac{\ln\phi^2}{\phi}=2\Phi\ln\Phi.$$

33. Обратный гиперболический синус.

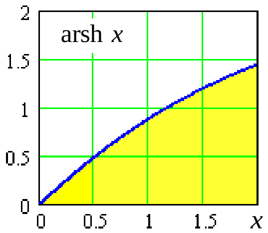
Обратный гиперболический синус (ареасинус) определяется как $\operatorname{arsh} z = \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$.

Аргумент логарифма напоминает формулу вычисления константы золотого сечения через корни квадратного уравнения и, в частности, дает такие "двоечные" значения:

$$\operatorname{arsh} 2 = \ln\left(2+\sqrt{5}\right) = \ln \Phi^3, \qquad \operatorname{arsh}\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \ln \Phi .$$

Вычислим неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:

$$\int \operatorname{arsh} x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arsh} x, & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right| = x \operatorname{arsh} x - \int \frac{d\left(1+x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}} = x \operatorname{arsh} x - \sqrt{1+x^2}\ ;$$



$$\boxed{\int_0^{1/2} \operatorname{arsh} x\, dx = (1+\ln\Phi)/2 - \phi \approx 0{,}1226}$$

$$\boxed{\int_0^{2} \operatorname{arsh} x\, dx = 2\left(\ln\Phi^3 - \phi\right) \approx 1{,}6512}$$

34. Через интеграл к золотой сумме.

Что-то мы зачастили с интегралами. Найдем определенный интеграл, а с его помощью сумму S знакопеременного бесконечного ряда [66]:

$$\int_0^1 t^n(1-t)^{n-1}dt = \int_0^1 t^{(n+1)-1}(1-t)^{n-1}dt = \mathrm{B}(n+1,\, n) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n)}{\Gamma(2n+1)} = \frac{n!\cdot(n!/n)}{(2n)!} = \frac{1}{n\, C_{2n}^n}\,,$$

где $\mathrm{B}(x,\, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ – бета-функция;

$C_{2n}^n = \dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ – число сочетаний из $2n$ по n, равное центральным биномиальным коэффициентам, которые находятся в точности посередине четных рядов в треугольнике Паскаля: 1, 2, 6, 20, 70, ...;

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\, C_{2n}^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1 t^n(1-t)^{n-1}dt = \int_0^1 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}t^n(1-t)^{n-1}}_{\text{геометрич. прогрессия}}dt = \int_0^1 \frac{t}{1+t(1-t)}dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{t \pm 1/2}{1+t-t^2}dt = \int_0^1 \frac{t-1/2}{\left(\sqrt{5}/2\right)^2-(t-1/2)^2}dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(\sqrt{5}/2\right)^2-(t-1/2)^2}dt =$$

$$= \left\| \int \frac{x\, dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2}\ln\left(a^2-x^2\right)+C, \qquad \int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arth}\frac{x}{a}+C = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}+C \right\| =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\ln\left(1+t-t^2\right)\Big|_0^1}_{=0} + \frac{1}{2\cdot 2\sqrt{5}/2}\ln\frac{\sqrt{5}/2+t-1/2}{\sqrt{5}/2-t+1/2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\frac{\phi+t}{\Phi-t}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\ln\frac{\Phi}{\phi}-\ln\frac{\phi}{\Phi}\right) = \frac{2\ln\Phi}{\sqrt{5}}.$$

Отметим любопытные представления чисел, входящих в решение:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n C_{2n}^n}{16n} \approx 0{,}894427; \qquad \sqrt{80} = 10\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 8 + \sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n C_{2n}^n}{16n(n+1)} \approx 8{,}94427\,.$$

Натуральный логарифм константы золотого сечения описан в первой части (с. 7).
Кроме того, находим у Рамануджана [67]:

$$\ln\,\Phi = \frac{\sqrt{5}}{4}\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)C_{2n}^n} = \sqrt{\frac{\pi^2/6\ -w}{3}}, \qquad w = \sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 C_{2n}^n} \approx 0{,}95024\,.$$

35. Еще один интегральный трюк.

В работе [68] автор открыто вопрошает: какой использовать трюк (эффектный технический прием и/ или искусный маневр) для интеграла, $a, b > 0$:

$$I(a,b) = \int_0^\infty \ln\,x\cdot\ln\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\,dx\,.$$

Для вывода используются два вспомогательных интеграла, $c > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{2y\ln x}{x^2+y^2}\,dx = \left|\begin{array}{c} x = y\cdot\operatorname{tg}\,t \\ \dfrac{dx}{x^2+y^2} = \dfrac{dt}{y}\end{array}\right| = \int_0^{\pi/2}\frac{2y\ln(y\cdot\operatorname{tg}\,t)}{y}\,dt = 2\int_0^{\pi/2}\ln(y\cdot\operatorname{tg}\,t)dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\ln\,y\,dt + \underbrace{2\int_0^{\pi/2}\ln(\sin\,t)dt - 2\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)dt}_{=0} = 2\int_0^{\pi/2}\ln\,y\,dt = 2\ln\,y\cdot t\Big|_0^{\pi/2} = \pi\ln\,y. \quad ;$$

$$2\int_0^{\pi/2}\ln(y\cdot\operatorname{tg}\,t)dt = 2\int_0^{\pi/2}\ln\,y\,dt + 2\int_0^{\pi/2}\ln(\sin\,t)dt - 2\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)dt = 2\int_0^{\pi/2}\ln\,y\,dt = 2\ln\,c\cdot t\Big|_0^{\pi/2} = \pi\ln\,y.$$

$$\int_a^b \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy = \int_a^b \frac{d(y^2)}{x^2+y^2} = \ln\left(x^2+y^2\right)\Big|_{y=a}^{y=b} = \ln\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\,.$$

$$I(a,b) = \int_0^\infty \ln\,x\cdot\ln\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\,dx = \int_0^\infty \ln\,x\cdot\left(\int_a^b\frac{2y\,dy}{x^2+y^2}\right)dx = \int_a^b dy\left(\int_a^\infty\frac{2y\ln\,x}{x^2+y^2}\right)dx =$$

$$= \pi\int_a^b \ln\,y\,dy = \pi(y\ln\,y - y)\Big|_a^b = \pi(b\ln b - a\ln a - b + a) = \pi\ln\frac{b^b}{a^a} + \pi(a-b).$$

Да уж... Иначе как хитрым трюком такие преобразования не назовешь. – Ловкость перестановок и никакого мошенничества. Не случайно математики шутят, что взятие производных – это ремесло, взятие интегралов – искусство.

Остается подставлять частные значения, например:

$$I(1,\Phi) = \pi(\Phi\ln\Phi - \phi), \qquad I(1,\phi) = \pi\phi(\ln\phi - \phi)\,.$$

Пожалуй, на этой ноте можно остановиться...

Заключение.

Намеренно и скрупулезно мы ссылались на различных авторов.

Судя по их вдохновенному творчеству, они по-настоящему старались внести свою лепту в интегрирование, заодно демонстрируя оригинальные подходы и создавая математические мини-шедевры.

Коллективное творчество математического Интернет сообщества, увлеченного общей целью, позволяет быстро решать многие непростые задачи.

Их не найдешь в учебниках, а специализированные программы часто выдают хотя и правильные, но "умопомрачительные" по сложности результаты.

Анализ рассмотренных вариантов-представлений в золотом интегрировании позволяет выделить ряд узловых моментов:

1. Присутствие под знаком интеграла константы золотого сечения Φ или квадратного корня $\sqrt{5}$, что обусловливает их последующее проявление в конечном решении.

2. Нахождение интеграла в общем виде относительно некоторых свободных параметров-коэффициентов, которые допускают подстановку чисел, связанных с числом Φ.

3. Отсутствие в исходном интеграле явных признаков и даже намеков, непосредственно указывающих на конечное "золотоносный" результат.

Понятно, что последний вариант является наиболее эффектным. Как неожиданное появление золотисто-красного Феникса.

Видимое – образ-отражение невидимого... Такое себе диалектическое единство, преломление-взаимопроникновение и трансформация скрытого и явного начал.

Пока всё. Со временем гусыня обязательно снесет новые интегрально-золотые яйца, – по басне легендарного Эзопа (600 г. до н.э., Perry's Index to the Aesopica, № 87).

Если они прольют дополнительный свет на гипотезу об особой значимости золотого сечения в самоорганизации систем, будем их щелкать как орешки вместе с интегральным сообществом. – Окей.

To be or not to be continued…

Литература:

1. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
2. Василенко С.Л. Синтез моделей "золотого сердца" и куполов на основе золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28582, 08.08.2023. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165380.htm.
3. Василенко С.Л. Базовые соотношения между фундаментальными константами // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17327, 20.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161934.htm.
4. Ramanujan S. Journal of the Indian Mathematical Society. – http://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/collectedpapers/question/qJIMS.htm.
5. Hardy G.H. Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work: 3rd ed. – New York: Chelsea, 1999.
6. Weisstein E.W. Ramanujan Continued Fractions // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/RamanujanContinuedFractions.html.
7. Интеграл с золотым сечением и красивым ответом / Hmαth – 28.03.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=RBLqQL9Lld4.
8. Василенко С.Л. Базовое тождество математических основ гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16069, 10.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
10. Интеграл с арктангенсом, золотым сечением и трюком Лейбница / Hmαth – 14.06.2023 – https://www.youtube.com/watch?v=kbPGwgWIksE.
11. Brown C. The natural logarithm of the golden section // The Fibonacci Quarterly, 55.5 (2017), 42-44. – https://www.fq.math.ca/Papers1/55-5/Brown.pdf.

12. Baxa C. Levy constants of transcendental numbers // Proc. Amer. Math. Soc. – **137** (7), 2009, 2243-2249. – https://www.ams.org/journals/proc/2009-137-07/S0002-9939-09-09787-1/S0002-9939-09-09787-1.pdf.
13. Capobianco S. Introduction to Symbolic Dynamics. Part 4: Entropy; The entropy of the golden mean shift, Institute of Cybernetics at TUT, 2010. – https://cs.ioc.ee/~silvio/slides/sd4.pdf.
14. Most beautiful integration techniques that are rare or unusual / Mathematics Mi, 02.10.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=2m1XbGhHXhY.
15. Golden integral with golden ratio / Mathematics Mi, 11.12.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=kfG8lGHbtaY.

Конец 1-й части

16. Василенко С.Л. Триномиально-квадратичный код мироздания // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15995, 12.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161675.htm.
17. A trigonometric "golden" integral / BiBenBap, 20.08.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=c6TcbpaJBM4.
18. Bhattacharjee M. Connecting φ and π // Azim Premji University. At Right Angles. Issue 12, March 2022, pp. 125-128.
19. Математика. Неопределенный интеграл. – https://math24.biz/integral.
20. WolframAlpha / Mathematics / Calculus & Analysis. – https://www.wolframalpha.com.
21. Check out the twist at the end of this integral / Michael Penn, 10.11.2023 – https://www.youtube.com/watch?v=4fqSfiHdiGo.
22. Интеграл с тангенсом, котангенсом и иррациональной степенью / Hmαth, 21.06.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=n1hkREaF7EM.
23. https://www.instagram.com/p/CrRAkgUuhsM/?img_index=1.
24. Another golden integral / Dr Peyam 25.07.2018. – https://www.youtube.com/watch?v=QOJbBgvH1q4.
25. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – https://oeis.org/A094888.
26. John Baez. Pi and the Golden Ratio / Azimuth, 07.03.2017. – https://johncarlosbaez.wordpress.com/2017/03/07/pi-and-the-golden-ratio/.
27. Five, Phi and Pi in one integral / Physics Forums, 09.04.2018. – https://www.physicsforums.com/threads/five-phi-and-pi-in-one-integral-5-p.1039464/.
28. MOM. There's a monster (integral) in the closet / Maths 505, 03.10.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=QG6o0jd-mz4.
29. Supreme golden integral / Maths 505, 20.09.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=uXHBzyypGOw.
30. An Application of a Series Expansion for (arcsinx)^2. Solution to Problem B-705, ibid., Vol. 31, No. 1 (1993), pp. 85-86. – https://www.fq.math.ca/Scanned/31-1/elementary31-1.pdf.
31. Weisstein E.W. Central Binomial Coefficient. // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – https://mathworld.wolfram.com/CentralBinomialCoefficient.html.

Конец 2-й части

32. Лосев А.Ф. Эстетика возрождения / Николай Кузанский. – М.: Мысль, 1978. – 624 с.
33. Василенко С.Л. Неортодоксальная метафорическая формула Бога и парадоксы веры // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 26837, 17.12.2020. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00164571.htm.
34. Integral of 1/(a+cos(theta)) from 0 to pi (Using Residue Theorem) / BiBenBap, 28.03.2020. – https://www.youtube.com/watch?v=ootMs7E4QaM.
35. Only Feynman's tricks can help solve this terrifying integral / Michael Penn, 12.04.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=eS8oYUgj0Xk.
36. An incredible calculus result: solution using Feynman's technique / Maths 505, 22.08.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=WLq2EThghgc.
37. Using Feynman's technique to solve this really cool Berkeley Math Tournament integral / Maths 505, 29.11.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=WbJzN1fc_CU.
38. Интеграл из финала MIT Integration Bee 2023 / Hmαth – 12.03.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=OGn0oG1q3pM.
39. My favorite arctangent integral / BiBenBap, 19.03.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=K8CqCwkVxc4.
40. This famous integral is perfect for Feynman's integration technique / Maths 505, 14.05.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=4fSvflBb_3Y.
41. Solving an awesome integral using Feynman's technique / Maths 505, 22.12.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=5JprnKycMnU.
42. Feynman's technique is insanely overpowered / Maths 505, 25.05.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=_d1PJiIm-lE.
43. Feynman's technique is the greatest integration method of all time / Maths 505, 21.03.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=Xmro-XuDhOw.
44. A beautiful calculus result derived using Feynman's integration technique / Maths 505, 13.04.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=txqpIBaRgZQ.
45. Using Feynman's technique to solve for an absolutely gorgeous result! / Maths 505, 17.11.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=631elWkBn3I.
46. One of the most beautiful calculus results you'll see! Solved using the Laplace transform / Maths 505, 03.12.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=bmZoPIfZLsw.

Конец 3-й части

47. Уилбер К. Теория всего. Интегральный подход к бизнесу, политике, науке и духовности. – М.: ПОСТУМ, 2017. – 288 с.

48. Медведев Ф.А. Развитие понятия интеграла. – М.: ЛЕНАНД, 2022. – 424 с.

49. A nice golden integral – Integral with golden ratio / Mathematics Mi, 23.01.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=z_AHkYv73og.

50. Another beautiful integral an epic result / Math 505, 30.03.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=q-R1ReYhXdw.

51. Is there any integral for the Golden Ratio? / Mathematics Stack Exchange, 14.02.2016. – https://math.stackexchange.com/questions/1653979/.

52. A super golden integral / Michael Penn, 17.09.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=20ninPp4gFM.

53. Крилли Т. Математика. 50 идей, о которых нужно знать. – Пер. с англ. – М.: Фантом Пресс, 2014. – 208 с.

54. Василенко С.Л. Триномы старших степеней: от деления пополам и золотого сечения – до модели единичного абсолюта // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 07.06.2015. – http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/15014.html.

55. Weisstein E.W. Dirichlet L-Series // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – https://mathworld.wolfram.com/DirichletL-Series.html.

56. A surprising answer! / Mathematics Mi, 2022. – https://www.youtube.com/watch?v=MLifbBFx__w.

57. Definite Integrals (Mis-1497) / Cipher, 08.01.2024. – https://www.youtube.com/watch?v=w38IvoTXWuU.

58. A nice integral that you must solve / Mathematics Mi, 2022. – https://www.youtube.com/watch?v=2PXJorx1pMM.

59. A wonderful generalised integration result using Feynman's trick / Maths 505, 25.07.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=jOdsINWPAcI.

60. How Richard Feynman would evaluate this monster log integral / Maths 505, 17.11.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=XnvFr2w2gUI.

61. Feynman Integration Example 17 / Feynman Technique, 09.01.2024. – https://www.youtube.com/watch?v=ICpLbaTB1YM.

62. A nice integral with golden ratio and continued fraction from Australia / Mathematics Mi, 02.09.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=MufPIk8Pf9c.

63. A nice integral with golden ratio / Mathematics Mi, 26.04.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=5-J5VYbboVA.

64. Evaluating another "golden" integral / BiBenBap, 21.08.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=OMOIIutlxQM.

65. Can you guess the tricks for this integral? / Michael Penn, 13.11.2023 – https://www.youtube.com/watch?v=fOAUkJhKN-g.

66. A Golden Summation / Mathematics MI, 18.11.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=owRQ49OfPF4.

67. Брюс С.Б. Записные книжки Рамануджана, часть 1, 1985, глава 9, с. 289.

68. Какой трюк использовать для этого интеграла с логарифмами? / Hmαth, 23.04.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=d1y4HZ7yaYI.