Беседа 11

1 Управление метрикой локального пространства

При действии на 4-D гироскоп внешних сил и моментов уравнения движения можно представить как в виде

$$\frac{dv}{dt} - B\frac{d}{dt}(\omega sin\phi) = \frac{F_x}{M+2m} + B\Phi\omega, \tag{1}$$

$$r\frac{d\omega}{dt} - \frac{dv}{dt}sin\phi = Nr - \Phi v. \tag{2}$$

Умножая первое из этих уравнений на $(M+2m)v$, а второе на $2mr\omega$, и складывая их, получим закон изменения полной энергии системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(M+2m)v^2 + mr^2\omega^2 - 2mrv\omega\sin\phi\right) = F_x v + L\omega. \tag{3}$$

Из этого закона видно, что сила

$$F_i = (M+2m)B\Phi\omega$$

и момент силы

$$L_i = 2mrv\Phi$$

не меняют энергии системы, хотя активно участвуют в перераспределении энергии между поступательными и вращательными движениями масс 4-D гироскопа.

Умножая уравнение (1) на $sin\phi$ и складывая его с уравнением (2), находим

$$r\frac{d\omega}{dt} - B\frac{d}{dt}(\omega sin\phi) = \frac{F_x sin\phi}{M+2m} + Nr - \Phi(v - B\omega sin\phi). \tag{4}$$

Производя в этом уравнении и в уравнении (1) замену

$$v_c = v - B\omega sin\phi,$$

имеем

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{F_x}{M+2m} + B\Phi\omega, \tag{5}$$

$$r\frac{d\omega}{dt}g - B(\omega^2 sin\phi cos\phi) = \frac{F_x sin\phi}{M+2m} + Nr - \Phi v_c, \tag{6}$$

где

$$g = 1 - k^2 sin^2\phi.$$

Введем обозначения

$$\psi = \frac{\Phi}{g}, \quad w = gr\omega$$

и перепишем уравнения (5) и (6) в виде

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{F_x}{M+2m} + k^2\psi w, \tag{7}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{F_x sin\phi}{(M+2m)g} + \frac{Nr}{g} - \psi v_c. \tag{8}$$

Умножим первое из этих уравнений на w, а второе на $-v_c$ и сложим их, тогда имеем

$$w\frac{dv_c}{dt} - v_c\frac{dw}{dt} = -\frac{F_x sin\phi v_c}{(M+2m)g} - \frac{Nrv_c}{g} + \frac{F_x w}{M+2m} + \psi(k^2w^2 + v_c).$$

Поскольку полная энергия 4-D гироскопа равна

$$T = \frac{1}{2}(k^2w^2 + v_c^2),$$

то мы имеем своеобразный коммутатор

$$w\frac{dv_c}{dt} - v_c\frac{dw}{dt} = -\{\frac{F_x sin\phi}{(M+2m)g} + \frac{Nr}{g}\}v_c + \frac{F_x w}{M+2m} + \frac{2T\psi}{M+2m}.$$

Умножая уравнение (7) на $(M+2m)v_c$, а уравнение (8) на $2mw$ и складывая их, получим закон изменения полной энергии 4-D гироскопа под действием внешних сил и моментов

$$\frac{d}{dt}\{\frac{1}{2}(M+2m)v_c^2 + (1-k^2sin^2\phi)mr^2\omega^2\} = F_x v_c + BF_x\omega sin\phi + L\omega \tag{9}$$

или

$$\frac{d}{dt}T(t) = F_x v_c + BF_x\omega sin\phi + L\omega. \tag{10}$$

Поскольку

$$T(t) = \frac{M+2m}{2}s\dot{(t)}^2 = \int_0^t (F_x v_c + BF_x\omega sin\phi + L\omega)d\tau,$$

то

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{2T}{M+2m}} \neq const$$

и метрика ds^2 становится зависимой от внешних сил и моментов

$$ds^2(t) = \frac{2T(t)}{M+2m}dt^2 = \frac{2}{M+2m}\{\int_0^t (F_x v_c + BF_x\omega sin\phi + L\omega)d\tau\}dt^2 \neq inv. \tag{11}$$

2 Релятивистский 4-D гироскоп с самодействием

До сих пор мы описывали 4-D гироскоп в рамках нерелятивистской механики, однако с самого начало было ясно, что "правильное"описание этого механизма надо проводить в рамках теории, в которой время (умноженное на скорость света) выступает как самостоятельная трансляционная координата. Это следует из того, что трансляционное ускорение рассматривается нами как вращение в пространственно-временных плоскостях.

Для технических приложений наибольший интерес вызывает изменение локальной метрики под действием мотор-тормоза, меняющего угловое ускорение N при релятивистском описании системы.

Для релятивистского описания 4-D гироскопа достаточно рассмотреть конфигурационное пространство событий с координатами

$$x_0 = ct,\ x_1 = x_c,\ x_2 = r\phi.$$

Выберем метрический тензор этого пространства в виде

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 - 2k^2r^2U(\phi)/c^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2(1-k^2\sin^2\phi) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где "потенциал"

$$U(\phi) = \int_{\phi_0}^{\phi} N d\phi \tag{13}$$

порожден угловым ускорением

$$N = \frac{L}{2mr^2}.$$

Управляя с помощью мотора этим ускорением, мы управляем метрическим тензором (12) и, следовательно, локальной метрикой конфигурационного пространства.

2.1 Локальная кривизна пространства, создаваемая угловым ускорением N

Используя метрический тензор (12), находим отличные от нуля компоненты символов Кристоффеля

$$\Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{20} = -\frac{k^2 r N}{c^2 - 2k^2 r^2 \int N d\phi}, \quad \Gamma^2_{00} = -\frac{rN}{c^2(1 - k^2 \sin^2\phi)}, \quad (14)$$
$$\Gamma^2_{22} = -\frac{k^2 \sin\phi \cos\phi}{r(1 - k^2 \sin^2\phi)}.$$

Соответственно, отличные от нуля компоненты тензора Риччи $R_{jm} = R^i_{jim}$ имеют вид

$$R_{00} = -\frac{r^2 k^2 U^2_\phi}{c^2 h (c^2 - 2k^2 r^2 U)} - \frac{k^2 U_\phi \sin\phi \cos\phi}{c^2 h^2} - \frac{U_{\phi\phi}}{c^2 h}, \quad (15)$$
$$R_{22} = -\frac{k^2 c^2 h}{c^2 - 2k^2 r^2 U} R_{00},$$

где $h = (1 - k^2 \sin^2\phi)$.

Поскольку скалярная риманова кривизна определяется как $R = g^{jm} R_{jm}$, то мы находим

$$R = \frac{2c^2}{c^2 - 2k^2 r^2 U} R_{00}. \quad (16)$$

Из этих формул следует, что локальная кривизна пространства обращается в нуль, если обращается в нуль угловое ускорение N, создаваемое мотором.

Из формул (14) - (16) также видно, что возникновение локальной кривизны пространства является релятивистским эффектом (порядка $1/c^2$)), который проявляется только при очень больших угловых ускорениях.

2.2 Релятивистское кручение

Релятивистские уравнения 4-D гироскопа в механике Декарта запишутся как

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + T^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (17)$$
$$i.j, k = 1, 2, 3$$

Из соотношений (14) видно, что релятивистские добавки в уравнениях движения механики Декарта начинают играть существенную роль при очень больших угловых ускорениях. Для нашей модели эта величина равна (приблизительно) $N \approx 10^{17}$ 1/сек^2.

Если предположить, что торсионное поле Ω_{ijk} в уравнениях (17) отсутствует, то, в нерелятивистском пределе, мы получаем из (17) уравнения движения "классической" механики

$$\frac{dv_c}{dt} = 0 \quad (18)$$
$$\frac{d\omega}{dt} h - k^2 \omega^2 \sin\phi \cos\phi = N.$$

Поскольку уравнения (17) представляют собой уравнения геодезических (прямейшие) пространства абсолютного параллелизма A_3, то мы должны найти кручение Риччи этого пространства, исходя из требования, чтобы в нерелятивистском пределе кручение Ω_{ijk} должно приводить к известным нам уравнениям движения

$$\frac{dv_c}{dt} = rk^2\Phi\omega \tag{19}$$

$$\frac{d\omega}{dt}h - k^2\omega^2\sin\phi\cos\phi = N - \Phi v_c.$$

Этому требованию удовлетворяют следующие отличные от нуля компоненты Ω_{ijk}

$$\Omega^1_{02} = -\Omega^1_{20} = k^2\Phi/2c, \qquad \Omega^2_{01} = -\Omega^2_{10} = -\frac{\Phi}{2c(1-k^2\sin^2\phi)}. \tag{20}$$

Рассчитывая коэффициенты вращения Риччи по формуле

$$T^i_{jk} = -\Omega^{..i}_{jk} + g^{im}(g_{js}\Omega^{..s}_{mk} + g_{ks}\Omega^{..s}_{mj}), \tag{21}$$

находим

$$T^1_{20} = -k^2\Phi/c, \quad T^2_{10} = \frac{\Phi}{c(1-k^2\sin^2\phi)}. \tag{22}$$

Подставляя соотношения (14) и (22) в уравнения (17), получим, в нерелятивистском приближении уравнения (19).

2.3 Использование уравнений, описывающих поля инерции, для вычисления функции Φ

Для того, чтобы найти зависимость функции Φ от углового ускорения N, мы используем динамические уравнения для полей инерции[1]

$$\overset{*}{\nabla}_{[k}\, e^a{}_{j]} = \nabla_{[k}e^a{}_{j]} + T^i{}_{[kj]}e^a{}_i = 0, \tag{23}$$

$$S^i{}_{jkm} = R^i{}_{jkm} + P^i{}_{jkm} = 0, \tag{24}$$

$$i, j, k... = 0, 1, 2, \quad a, b, c... = 0, 1, 2,$$

где $S^i{}_{jkm}$ – тензор кривизны пространства A_3, $\overset{*}{\nabla}_k$ – ковариантная производная относительно связности абсолютного параллелизма $\triangle^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} + T^i{}_{jk}$; ∇_k – ковариантная производная относительно связности $\Gamma^i{}_{jk}$ и

$$P^i{}_{jkm} = 2\nabla_{[k}\, T^i{}_{|j|m]} + 2T^i{}_{s[k}\, T^s{}_{|j|m]}. \tag{25}$$

[1]Идея использовать для расчета функции Φ уравнения поля была предложена впервые А.Н.Сидоровым

Эти уравнения представляют собой один из вариантов уравнений физического вакуума, приспособленный к нашей ситуации. Можно показать, что вся информация об уравнениях движения содержится в уравнениях (23), а уравнения (24) связывают между собой риманову кривизну и кручение пространства. Воспользуемся этим обстоятельством. Образуем аналог тензора Риччи для тензора $S^{i}{}_{jkm}$.

$$S_{jm} = S^{i}{}_{jim} = R^{i}{}_{jim} + P^{i}{}_{jim} = R_{jm} + P_{jm} = 0. \tag{26}$$

Соответственно, для скалярной кривизны этого тензора имеем

$$S = g^{jm} S_{jm} = g^{jm}(R_{jm} + P_{jm}) = R + P = 0. \tag{27}$$

Подставляя (22) и (14) в (27), получим

$$R + \frac{k^2 \Phi^2}{2h(c^2 - 2k^2 r^2 U)} = 0, \tag{28}$$

откуда

$$\Phi = \sqrt{-\frac{2Rh}{k^2}(c^2 - 2k^2 r^2 U)}. \tag{29}$$

Подставляя сюда соотношение (16), получим в нерелятивистском приближении

$$\Phi = 2\sqrt{\frac{N \sin\phi \cos\phi}{1 - k^2 \sin^2\phi} + \frac{N_\phi}{k^2}}. \tag{30}$$

Подставляя это соотношение в уравнения движения (19), мы находим следующее выражение для нескомпенсированной силы инерции, действующей на центр масс 4-D гироскопа

$$F_{in} = 2(M + 2m)B\omega\sqrt{\frac{N \sin\phi \cos\phi}{1 - k^2 \sin^2\phi} + \frac{N_\phi}{k^2}}. \tag{31}$$

Эта сила порождена локальным кручением пространства, которое, в сою очередь, создает его локальное искривление и вызывает изменение скорости центра масс.

3 Переменная масса, кручение и кривизна пространства-времени

Перед этим мы показали, что с помощью 4-D гироскопа можно управлять инерционной массой, кручением и кривизной локального пространства, при этом мы использовали геометрию абсолютного параллелизма A_3. Было так же показано, что, в этом случае, метрика перестает быть инвариантной величиной, т.е. пространство становиться неметричным. Как известно, в таких пространствах длины векторов и других, инвариантных в метрической геометрии, величин меняются. Поэтому 4-D гироскоп, в общем случае, должен описываться геометрией Вейля и, если мы стартуем из плоской геометрии, то эта геометрия должна быть конформно плоская.

Здесь я дам общий подход к описанию конформной геометрии абсолютного параллелизма, в которой масса объекта является величиной переменной.

Уравнения физического вакуума представляют собой обобщение вакуумных уравнений Эйнштейна $R_{jm} = 0$ на случай, когда существует геометризированный источник римановой кривизны в виде торсионных полей. Эти уравнения были объявлены автором как уравнения физического вакуума – пятого (потенциального) состояния материи. В произвольно ускоренной системе отсчета, базис которой образуют вектора тетрады. Они допускают матричную запись вида

$$\nabla_{[k}e^a_{m]} - e^b{}_{[k}T^a{}_{|b|m]} = 0, \qquad (A)$$

$$R^a{}_{bkm} + 2\nabla_{[k}T^a{}_{|b|m]} + 2T^a{}_{c[k}T^c{}_{|b|m]} = 0. \qquad (B)$$

Используя активные координатные преобразования в группе трансляций T_4

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}dx^k, \quad k, i'... = 0, 1, 2, 3, \qquad (32)$$

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \in T_4,$$

можно обратить величины $\Gamma^i{}_{jk}$, входящие в уравнения (A) и (B), локально в нуль. С другой стороны, используя активные координатные преобразования в группе вращений $O(3.1)$ для матриц торсионного поля

$$T^{a'}_{b'k} = \Lambda^{a'}{}_a T^a_{bk}\Lambda^b{}_{b'} + \Lambda^{a'}{}_a\Lambda^a{}_{b',k}, \qquad (33)$$

где матрицы $\Lambda^{a'}{}_a$ образуют группу вращений $O(3.1)$ (цифры 3 и 1 означают выбранную сигнатуру (- - - +))

$$\Lambda^{a'}{}_a \in O(3.1),$$

можно обратить (опять же локально) торсионное поле $T^{a'}_{b'k}$ в нуль. Относительно групп T_4 и $O(3.1)$ риманова кривизна R_{abkm} преобразуется как тензор

$$R^a{}_{bk'm'} = R^a{}_{bkm}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}, \quad \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \in T_4, \qquad (34)$$

$$R^{a'}{}_{b'km} = \Lambda^{a'}{}_a R^a{}_{bkm}\Lambda^b{}_{b'}, \quad \Lambda^{a'}{}_a \in O(3.1). \qquad (35)$$

Согласно всеобщему принципу относительности, величина R_{abkm} тоже должна носить относительный характер, поэтому необходимо ввести такие преобразования, имеющие физический смысл, относительно которых риманова кривизна R_{abkm} имеет нетензорный закон преобразования.

Известно, что уравнения физики в плоском пространстве, содержащие постоянную массу частицы, не конформно инвариантные. Конформную инвариантность уравнений удается восстановить, если ввести переменную массу частицы следующим образом.

Пусть мы имеем псевдоевклидово пространство с метрикой

$$ds_o^2 = \eta_{ik}dx^i dx^k, \qquad (36)$$

$$\eta_{ik} = \eta^{ik} = \mathrm{diag}(1 - 1 - 1 - 1). \tag{37}$$

Разделив обе части равенства (36) на ds_o^2 и умножив полученное выражение на m^2c^2, получим

$$\eta_{ik}p^ip^k = m^2c^2, \tag{38}$$

где $p^i = dx^i/ds_o$ – импульс частицы с постоянной массой $m = \mathrm{const}$.

3.1 Относительность массы и тензора Римана

Пусть теперь масса частицы переменна, тогда ее можно представить в виде

$$m(x^i) = \Omega^{-1}(x^i)m. \tag{39}$$

Для частицы с переменной массой соотношение (38) запишется как

$$\eta_{ik}p^ip^k = m^2(x^i)c^2,$$

или

$$\Omega^2(x^i)\eta_{ik}p^ip^k = \hat{g}_{ik}\hat{p}^i\hat{p}^k = m^2c^2. \tag{40}$$

Отсюда следует, что

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ik}d\hat{x}^id\hat{x}^k = \Omega^2(x^i)\eta_{ik}dx^idx^k, \tag{41}$$

где $\hat{x}^i$ и x^i связаны специальными конформными координатными преобразованиями следующего вида:

$$\hat{x}^i = \frac{x^i - c^ix^2}{\Omega(x^i)}, \quad c^i = \mathrm{const}, \tag{42}$$

$$\Omega(x^i) = 1 - 2c^ix_i + c^2x^2. \tag{43}$$

Специальные конформные преобразования координат подразумевают наличие у пространства упругих свойств (своеобразные сжатия и растяжения пространства). Они могут быть записаны в виде композиции

$$C = ITI,$$

где

а) инверсии I

$$x'^i = \frac{k^2x^i}{x^ix_i}; \tag{44}$$

б) трансляции T

$$x''^i = x'^i - a^i; \tag{45}$$

в) повторные инверсии I

$$x'''^i = \frac{k^2x''^i}{x''^ix''_i}. \tag{46}$$

Добавляя к группе Пуанкаре преобразования (42) и конформные дилатации (растяжения)

$$\hat{x}^i = \rho x^i, \tag{47}$$

получаем 15-параметрическую конформную группу преобразований.

Предположим теперь, что

$$\Omega(x^i) = \exp 2\varphi(x^i). \tag{48}$$

Тогда динамические переменные в уравнениях физического вакуума преобразуются как:

а) компоненты тетрады

$$\hat{e}^a{}_i = e^a{}_i \exp \varphi(x^i), \quad \hat{e}^i{}_a = e^i{}_a \exp -\varphi(x^i); \tag{49}$$

б) компоненты коэффициентов вращения Риччи

$$\hat{T}^i{}_{jk} = T^i{}_{jk} - K^i{}_{jk} + \delta^i{}_j \varphi_{,k}, \tag{50}$$

$$K^i{}_{jk} = \varphi_{,j}\delta^i{}_k + \varphi_{,k}\delta^i{}_j - \varphi^{,i} g_{jk}; \tag{51}$$

в) компоненты тензора Римана

$$\hat{R}^i{}_{jkm} = R^i{}_{jkm} + K_{jm}\delta^i{}_k - K_{km}\delta^i{}_j + g_{jm}K^i{}_k - g_{mk}K^i{}_j, \tag{52}$$

$$K_{jm} = \nabla_j(\varphi_{,m}) - \varphi_{,j}\varphi_{,m} - \frac{1}{2} g_{jm}\varphi_{,k}\varphi^{,k}. \tag{53}$$

Соотношения (49) показывают, что мы ввели систему отсчета, вектора которой имеют переменную длину. Системы отсчета, у которых базисные вектора имеют переменную длину, мы будем называть *конформными системами отсчета.*

Теперь возникновение геометрии A_4 с $R_{ijkm} \neq 0$ из геометрии Минковского, у которой тензор Римана $\overset{0}{R}_{ijkm}$ равен нулю, можно описать конформно инвариантными уравнениями:

$$\hat{\nabla}_{[k}\hat{e}^a_{m]} - \hat{e}^b{}_{[k}\hat{T}^a{}_{|b|m]} = 0, \tag{$\hat{A}$}$$

$$\hat{R}^a{}_{bkm} + 2\hat{\nabla}_{[k}\hat{T}^a{}_{|b|m]} + 2\hat{T}^a{}_{c[k}\hat{T}^c{}_{|b|m]}, \tag{$\hat{B}$}$$

в которых тензор $\hat{R}^a{}_{bkm}$ определяется как

$$\hat{R}^i{}_{jkm} = K_{jm}\delta^i{}_k - K_{km}\delta^i{}_j + g_{jm}K^i{}_k - g_{mk}K^i{}_j. \tag{54}$$

Эта кривизна определяет уклонение конформной метрики (41) от плоской (36), вызванное конформной деформацией плоского пространства. Применяя обратные преобразования, мы можем обратить кривизну (54) в нуль, что и доказывает относительность римановой кривизны в рамках всеобщего принципа относительности. Конформная относительность массы указывает на возможность использовать упругие свойства пространства событий для перемещения в пространстве и времени. Действительно, явление самоиндукции приводит к изменению массы 4-D гироскопа и, соответственно метрики пространства событий. В этом случае релятивистские уравнения движения системы при отсутствии внешних сил, действующих на ее границу, запишутся как

$$\frac{d}{ds}\Big(m(x^i)v_i\Big) = 0$$

или

$$m(x^i)\frac{dv_i}{ds} = -v_i\frac{dm(x^i)}{ds}. \tag{55}$$

В нашем случае изменение метрики пространства событий зависит от момента, действующего внутри пространства, ограниченного внешней границе 4-D гироскопа. Именно благодаря работе момента возникает кривизна пространства событий, действующая на центр масс гироскопа как внешнее гравитационно поле, заставляя его двигаться в нужном направлении и с заданной скоростью.