

О ЛЕВИТАЦИИ ДИАМАГНЕТИКОВ В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Шипов Г.И.

<http://shipov-vacuum.com> <http://shipov.com>

Введение

В 1997 г. будущий лауреат Нобелевской премии (2010 г.), российский ученый Андрей Гейм и совместно с британским ученым Майклом Берри продемонстрировал левитацию лягушки в постоянном магнитном поле http://www.youtube.com/watch?v=-EVMOp59J_c с напряженностью 16 Тл и получил Антинобелевскую премию. Конечно, это была шутка, но, как говорится, «в каждой шутке есть доля шутки». Заметим, что живая лягушка совсем не ферромагнетик и, кроме того, ее левитация наблюдалась при комнатной температуре, а не температуре жидкого гелия. Работающая с А. Геймом команда осуществила левитацию кузнечиков, рыб, мышей и растений. Утверждается, что благодаря явлению диамагнетизма, в сильном магнитном поле может левитировать все: дерево, виноград, вода <http://www.youtube.com/watch?v=m-AI7GAnH8Q>, пицца и даже люди. Майкл Берри считает также, что сильные магнитные поля не опасны для живых существ на основании того, что сам пролежал в сильном магнитном поле несколько часов и не почувствовал ухудшение своего состояния. Понятно, что это очень оптимистическая и субъективная оценка не соответствует действительности. По наблюдениям медицинского персонала, работающего с ЯМР томографами, длительное нахождение вблизи сильного магнитного поля томографа (порядка 1.5-2.0 Тл) приводит к различного видам расстройств. Влияние сильных магнитных полей на организм человека показывает, что, например, при 2 Тл отмечается рост амплитуды ЭКГ на 400%, при 4 Тл задержка нервной проводимости и появление неврологической симптоматики и т.д.

При теоретическом описании диамагнетизма используются уравнения нерелятивистской квантовой электродинамики, которые учитывают взаимодействие магнитных моментов спинов электронов и орбитальных магнитных моментов с внешним электромагнитным полем. При исследовании явления левитации, мы должны добавить в эти уравнения гравитационный потенциал и найти условия, при котором происходит компенсация гравитационной силы электромагнитной силой, которая появляется при взаимодействии внешнего магнитного поля с магнитными моментами элементарных частиц внутри диамагнетика. Большинство частиц, из которых состоят диэлектрики, имеют массу, заряд и спин $s = \hbar / 2$. Поэтому теорию левитации диэлектриков мы будем строить на основе уравнения Дирака. Поскольку левитация представляет собой макроскопическое явление, то удобнее всего использовать гидродинамическую формулировку квантовой механики. Такая формулировка была предложена Э. Маделунгом [1,2] и развита, в приложении к квантовой электродинамике, Л. де Бройлем [3,4], Т. Такабаяши [5], Д. Бомом [6] и др. [7, 8, 9].

1. Уравнения Маделунга-Такабаяши

Релятивистское уравнение Дирака во внешнем электромагнитном поле записывается как

$$\left[\gamma^n \left(\hat{p}_n - \frac{e}{c} A_n \right) - i\mu c \right] \Psi = 0, \quad \hat{p}_n = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad n, k \dots = 0, 1, 2, 3, \quad (1)$$

где γ^n - спиновые матрица Дирака, связанные с метрическим тензором 4D пространства Минковского η_{kn} соотношением

$$\eta_{kn} = \{\gamma_k, \gamma_n\} / 2 = (\gamma_k \gamma_n + \gamma_n \gamma_k) / 2, \quad \eta^{kn} = \eta^{kn} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (2)$$

e - заряд частицы, μ - ее масса, $A^n = (A^0, \vec{A})$ - 4D потенциал электромагнитного поля, \hbar - постоянная Планка, c - скорость света и

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \Psi(x, y, z, ct, \vec{s}) \quad (3)$$

- волновая функция. В нерелятивистском приближении уравнение (1) переходит в уравнение Паули

$$\left\{ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\mu} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + eA_0 - \frac{e}{\mu c} (\vec{H} \vec{s}) \right\} \Psi = 0, \quad (4)$$

где \vec{H} - внешнее магнитное поле и $\vec{s} = \hbar \vec{\sigma} / 2$ - спин и $\vec{\sigma}$ - вектор Паули.

Используя процедуру Маделунга-Такабаяши [2,5,9], можно представить комплексное уравнение (4) в виде системы действительных уравнений относительно действительных функций ρ , \vec{v} , \vec{s} , которая включает:

а) уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0, \quad \rho = \Psi^* \Psi, \quad \vec{j} = \rho \vec{v}; \quad (5)$$

б) поступательные уравнения Эйлера

$$\rho \frac{dv_\alpha}{dt} = \frac{\rho}{\mu} \left\{ e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}] \right\}_\alpha + \frac{\rho}{\mu} \mu^{(B)}_{\beta} \partial_\alpha H_\beta + \partial_\beta T_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2, 3; \quad (6)$$

с) вращательные уравнения движения

$$\rho \frac{dS_\alpha}{dt} = \frac{1}{\hbar} [\vec{\mu}^{(B)} \vec{H}]_\alpha + \partial_\alpha T^{(S)}_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2, 3. \quad (7)$$

В этих уравнениях $\rho = \Psi^* \Psi$, v_α - скорость точек, составляющих плотность ρ ,

$\left\{ e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}\vec{H}] \right\}_\alpha$ - сила Лоренца, $\frac{\rho}{\mu} \mu^{(B)}_\beta \partial_\alpha H_\beta$ - плотность силы, действующей на магнитный момент

$$\vec{\mu}^{(B)} = \frac{e}{\mu c} \vec{s} = \frac{e}{\mu c} \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (8)$$

частицы со стороны внешнего (возможно и внутреннего) магнитного поля H_β , \vec{S} - вектор спина \vec{s} определяемый как

$$\vec{S} = \frac{\Psi^+ \hat{s} \Psi}{\Psi^+ \Psi} = \frac{\hbar}{2} \frac{\Psi^+ \hat{\sigma} \Psi}{\Psi^+ \Psi}, \quad \vec{S}^2 = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (9)$$

причем

$$\vec{s} = \rho \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}. \quad (10)$$

Далее,

$$T_{\alpha\beta} = \left(\frac{\hbar}{2\mu} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial x_\beta} \right) - 4\rho \frac{\partial S_\gamma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial S_\gamma}{\partial x_\beta} \right\}, \quad (11)$$

- тензор натяжений, интерпретируемый П. Холландом как потенциал сил инерции, обеспечивающий стационарные состояния в квантовой механике [7],

$$T^{(S)}_{\alpha\beta} = \frac{\hbar}{\mu} \rho \varepsilon_{\alpha\gamma\sigma} S_\gamma \frac{\partial S_\sigma}{\partial x_\beta} \quad (12)$$

-тензор «спиновых натяжений» (или потенциал сил инерции, связанных с собственным вращением заряда), где $\varepsilon_{\alpha\gamma\sigma}$ - полностью антисимметричный, единичный символ Леви-Чивитта. В уравнении непрерывности (5) вектор тока \vec{j} имеет три слагаемых

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2\mu} [\Psi^+ (\nabla\Psi) - \Psi(\nabla\Psi^+)] - \frac{e}{\mu c} \vec{A}(\Psi^+\Psi) + \frac{1}{\mu} \text{rot}(\Psi^+ \vec{s} \Psi), \quad (13)$$

при этом последнее слагаемое представляет собой спиновый ток.

2. Физическая интерпретация уравнений Маделунга-Такабаяши

Соотношения (5-12) можно рассматривать как уравнения движения спинирующей квантовой капли жидкости с плотностью заряда $\rho_e = e \Psi^* \Psi$, которая движется под действием электромагнитных полей. Таким образом, спинирующая квантовая частица в «гидродинамическом» описании представляет собой протяженный объект, что-то вроде жидкостного заряженного гироскопа. Положение центра масс капли (материальной точки) меняется с изменением ее формы и определяется через плотность вероятности $\rho = \Psi^* \Psi$ как среднее значение от координат капли как

$$\langle x \rangle = \int x \rho dV . \quad (14)$$

С другой стороны, квантомеханическое определение положения точечной частицы определяется в виде

$$\langle x \rangle = \int \Psi^* \hat{x} \Psi dV = \int \text{Re}(\Psi^* \hat{x} \Psi) dV . \quad (15)$$

Соотношения (14) и (15) дают одинаковые результаты для любого квантового оператора при условии, что

$$x = \frac{1}{\rho} \text{Re}(\Psi^* \hat{x} \Psi) . \quad (16)$$

В этом случае все расчеты, полученные с помощью решения уравнения Паули (4), совпадают с результатами расчетов, полученных из решения уравнений (5) - (12), однако преимущество системы (5)-(12) в том, что мы вернулись в этих уравнениях к образному мышлению (см., например, формулу (9) для вектора спина).

Разделив уравнения (6) на $\rho = \Psi^* \Psi$, получим обобщенные уравнения движения классической электродинамики в виде

$$\mu \frac{dv_\alpha}{dt} = \left\{ e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}\vec{H}] \right\}_\alpha + \mu^{(B)} \beta \partial_\alpha H_\beta + \frac{\mu}{\rho} \partial_\beta T_{\alpha\beta} , \quad (17)$$

которые мы будем рассматривать как поступательные уравнения макроквантовой электродинамики. В правой части уравнений (17) стоит сила Лоренца, действующая на заряд e в электромагнитных полях, сила $\mu^{(B)} \beta \partial_\alpha H_\beta$, действующая на магнетон Бора $\mu^{(B)}$ в неоднородном магнитном поле. Эта сила приводит к расщеплению траектории частиц с разными спинами, движущихся в неоднородном магнитном поле в эксперименте Штерна-Герлаха.

2.1 Физический смысл квантовой потенциальной энергии

Для частицы без спина и в отсутствии магнитного поля из уравнения Паули (4) следует уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi + \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi - U\psi = 0, \quad (18)$$

где потенциальная энергия $U = eA_0$ и ψ - скалярная волновая функция. Применяя процедуру Маделунга к уравнению (18), получим «гидродинамические» уравнения вида

$$1) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0, \quad 2) \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\rho}{\mu} \nabla(U + Q), \quad (19)$$

где

$$\rho = \psi^* \psi, \quad \vec{j} = -\frac{i\hbar}{2\mu} [\psi^* (\nabla \psi) - \psi (\nabla \psi^*)] = \rho \vec{v} \quad (20)$$

и

$$Q = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\left(\frac{\nabla \rho}{2\rho} \right)^2 - \frac{\nabla^2 \rho}{2\rho} \right) = -\frac{\hbar^2}{4\mu} \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} - \frac{(\nabla \rho)^2}{2\rho^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\Delta |\psi|}{|\psi|} \quad (21)$$

- кантовая потенциальная энергия.

Уравнения (19) были получены из (18) в предположении, что волновая функция ψ представлена в виде

$$\psi(\vec{x}, t) = \sqrt{\rho(\vec{x}, t)} \exp(iS(\vec{x}, t)/\hbar), \quad (22)$$

где $S(\vec{x}, t)$ - функция действия, при этом уравнения (19.2) могут быть записаны в виде уравнений Гамильтона-Якоби для функции $S(\vec{x}, t)$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2\mu} + U + Q = 0. \quad (23)$$

Поскольку

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad \vec{p} = \nabla S, \quad (24)$$

то из (23) следует

$$E = (\nabla S)^2 / 2\mu + U + Q. \quad (25)$$

Пусть уравнение (18) описывает стационарное состояние, тогда в соотношении выполняются следующие соотношения

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t} = \text{const}, \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(U + Q) = 0 \quad (26)$$

С другой стороны, для водородоподобного атома с потенциальной энергией $U = -Ze^2/r$ для стационарных орбит Бора выполняется соотношение [7]

$$E_n = m^2 \hbar^2 / 2\mu r^2 - Ze^2/r + Q = -\mu Z^2 e^4 / 2\hbar^2 n^2 = const, \quad (27)$$

где $|m| = 0, 1, 2, \dots, n \geq l + 1, l = 0, 1, 2, \dots$. Для основного состояния $m = 0$, поэтому

$$E_n = -Ze^2/r + Q = -\mu Z^2 e^4 / 2\hbar^2 n^2 = const, \quad (28)$$

откуда следует, что квантовая потенциальная энергия полностью компенсирует кулоновскую потенциальную энергию (рис. 1)

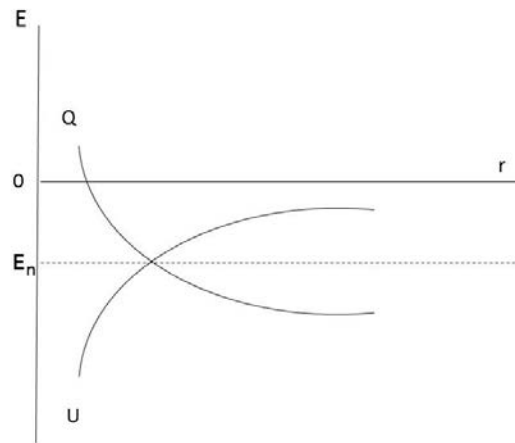


Рис.1. На стационарных орбитах кулоновская потенциальная энергия $U = -Ze^2/r$ скомпенсирована квантовой потенциальной энергией Q

Поделим уравнения (19.2) на плотность ρ и умножим на массу μ

$$\mu \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(U + Q). \quad (29)$$

Если в этих уравнениях $U = -Q$, то единственной физически осмысленной потенциальной энергией в уравнениях движения (29) является потенциальная энергия электромагнитной силы инерции. Это означает, что уравнения (29) записаны в ускоренной системе отсчета [11], а процедура Маделунга-Такабаяши соответствует переходу из инерциальной системы отсчета, в которой записано уравнение Паули (4), в ускоренную систему, где действуют силы инерции.

2.2 Связь квантового потенциала с энергией вакуума

Решение уравнения Шредингера для одномерного осциллятора с потенциальной энергией $U = \mu\omega^2 x^2 / 2$ дает следующее выражение для его энергии

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

При $n = 0$ энергия (30) отлична от нуля $E_n = \hbar\omega/2$ и сопоставляется с вакуумной энергией (энергией вакуумных флуктуаций). Используя процедуру Маделунга, находим для стационарных состояний энергию осциллятора в виде

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega + Q + U, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (31)$$

откуда для стационарного состояния $n = 0$, ($U=0$) имеем

$$Q = \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (32)$$

В силу соотношений (11) и (32) можно энергия вакуумных флуктуаций и тензор вакуумных натяжений описывают упругие свойства физического вакуума до появления в нем реальной материи, которая рождается из вакуума благодаря вакуумным флуктуациям.

2.3 Физическая интерпретация уравнений движения спина (магнитного момента)

Разделив уравнения (7) на плотность ρ , получаем уравнения движения вектора спина S_α

$$\frac{dS_\alpha}{dt} = \frac{1}{\hbar} [\vec{\mu}^{(B)} \vec{H}]_\alpha + \frac{1}{\rho} \partial_\alpha T^{(S)}_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3, \quad (33)$$

где тензор спиновых (вакуумных) натяжений $T^{(S)}_{\alpha\beta}$ определяется соотношением (12). Если отбросить последний член в уравнениях (33), то из них следуют уравнения Блоха [13]

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{e}{2\mu c} [\vec{s} \vec{H}] = -[\vec{\omega}_L \vec{s}], \quad \vec{\omega}_L = -\frac{|e|}{2\mu c} \vec{H}, \quad (34)$$

где $\vec{\omega}_L$ - частота прецессии вектора спина вокруг направления магнитного поля \vec{H} (частота Лармора) и было использовано соотношение (10). Напомним, что уравнения (34) были получены Блохом феноменологическим способом, а не выведены из уравнения Дирака. После умножение этого уравнения на $e/\mu c$, получим уравнения движения магнитного момента $\vec{\mu}$ заряда в магнитном поле \vec{H}

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \frac{e}{2\mu c} [\vec{\mu} \vec{H}] = -[\vec{\omega}_L \vec{\mu}], \quad \vec{\omega}_L = -\frac{|e|}{2\mu c} \vec{H}. \quad (35)$$

Последний член в уравнениях (33) представляет собой вакуумные натяжения, порожденные спином.

3. Левитация как гироскопический эффект

Шесть уравнений движения (6) и (7) заряда со спином (в некотором приближении) напоминают уравнения движения прецессирующего гироскопа во внешнем гравитационном поле. В самом деле, в ускоренной системе отсчета, жестко связанной с вращающимся твердым телом, уравнения движения импульса центра масс $\vec{P} = \mu\vec{v}$ и углового момента $\vec{L} = J\vec{\omega}$ записываются как

$$\frac{d\vec{P}}{dt} + [\vec{\omega}\vec{P}] = \mu\vec{g} + \vec{R}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} + [\vec{\omega}\vec{L}] = [\vec{r}_c \mu \vec{g}], \quad |\vec{r}_c| = l, \quad (36)$$

где $\vec{\omega}$ - угловая скорость вращения гироскопа, \vec{g} - гравитационное поле, \vec{R} - реакция опоры, l - расстояние от центра масса до точки опоры. Из решения уравнений (36) известно, что прецессирующий в гравитационном поле гироскоп давит на опору с силой $P^* = \mu^* g$, которая не равна силе веса $P = \mu g$, а меньше ее [10]. При этом масса μ^* оказывается зависящей от угловой частоты прецессии гироскопа в соответствии с формулой

$$\mu^* = \mu(1 - \omega_{np}^2 l \sin^2 \theta / g \cos \theta), \quad (37)$$

где θ - угол прецессии, $\omega_{np} = \mu l g / L$ - угловая скорость прецессии.



Рис.2. Потеря веса прецессирующим гироскопом

Простой эксперимент с использованием электронных весов, изолированных от внешних атмосферных потоков (см. рис.2), подтверждает формулу (37). Например, в одном из экспериментов и исходными экспериментальными данными

$$\theta = 30^\circ \quad l = 4 \text{ см} \quad \omega_{np} = 0.5 \text{ об/сек}, \quad g = 981 \text{ см/сек}^2,$$

получаем хорошее совпадение теории и эксперимента.

$$\mu^*_{теор} \approx 46.36 \text{ э.}, \quad \mu^*_{эксп} = 46.30 \pm 0.07 \text{ э.}$$

Эксперимент, проведенный на более точных весах можно увидеть на сайте http://www.youtube.com/watch?v=nABni2d_wG4 .

В процедуре Маделунга-Такабаяши так же возникает зависимость массы частицы от вращения (спина). В работе [14] такая зависимость следует из (полу)классических уравнений вида

$$\frac{d}{ds} P_i = eF_{ik} \frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{2} g S_{nm} \frac{\partial F_{nm}}{\partial x^i}, \quad i, k, m, \dots = 0, 1, 2, 3, \quad (38)$$

$$\frac{d}{ds} S_{ik} = \left[P_i \frac{dx^k}{ds} \right] + g \Lambda S_{[im} F_{i]}^m, \quad S_{ik} P^k = 0, \quad (39)$$

где

$$\mu^* = \mu - \frac{1}{2} g S_{ik} F^{ik} \quad (40)$$

- эффективная масса, зависящая от тензора спина S_{ik} , F^{ik} - тензор электромагнитного поля, g - фактор Ланде,

$$P_i = \frac{\mu}{\Lambda} \left(\frac{dx_i}{ds} + \frac{1}{J^2} S_{in} S^{nm} \frac{dx_m}{ds} \right), \quad (41)$$

- эффективный импульс,

$$\Lambda = -P_i \frac{dx^i}{ds} / \mu = \left\{ - \left(\frac{dx^i}{ds} \right)^2 + \left(\frac{S_{ik} dx^i}{J ds} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (42)$$

и J - положительная константа.

В системе отсчета, в которой частица мгновенно покоится, т.е. когда выполняются соотношения [14]

$$P_i = 0, \quad S_{i0} = 0 \quad (43)$$

3D часть уравнений (38), (39) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \mu^* \frac{dx_\alpha}{dt} = eE_\alpha + \left[\frac{dx_\beta}{dt} H_\beta \right]_\alpha + g s_\beta \frac{\partial H_\beta}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3, \quad (44)$$

$$\frac{d}{dt} s_\alpha = g [s_\beta H_\beta]_\alpha, \quad (45)$$

при этом эффективная масса заряженного гироскопа будет зависеть от спина частицы и внешнего магнитного поля как

$$\mu^* = \mu - \frac{1}{2} g s_\alpha H^\alpha = \mu \left(1 - \frac{1}{2\mu} g s_\alpha H^\alpha \right). \quad (46)$$

При условии

$$\left| \frac{1}{2\mu} g s_\alpha H^\alpha \right| \ll 1, \quad (47)$$

формулы (44) и (45) являются частным случаем уравнений движения (6), (7), справедливых для заряженного микроскопического гироскопа, движущегося во внешних электромагнитных полях. Если же условие (47) нарушается, то, как и в случае с прецессируемым в гравитационном поле гироскопом, мы должны наблюдать потерю веса за счет изменения эффективной массы (46) во внешнем магнитном поле. Если же для спинирующих заряженных частиц, из которых состоит диамагнетик, выполняется условие

$$\left| \frac{1}{2\mu} g s_\alpha H^\alpha \right| - 1 = 0, \quad (48)$$

то возникнет левитация диамагнетика, что мы и наблюдаем в эксперименте.

Заключение

Уравнения (38), (39) так же как и подобные им уравнения Френкеля, Баргманна-Мишеля-Телегди, и др. [15] имеют феноменологическую природу и, фактически, «написаны руками». Фундаментальный подход к этим уравнениям возможен с использованием теории Физического Вакуума [12], в которой основные фундаментальные уравнения физики геометризированы, а материальные объекты, которые они описывают, представляют собой сгустки искривленного и закрученного пространства. Например, уравнения Блоха (45) следуют в приближении слабых полей из вращательных уравнений геодезических пространства $A_4(6)$ (уравнения Подаровской) [9].

Антинобелевская премия, полученная Андреем Геймом за левитацию лягушки в сильном магнитном поле, была воспринята научным сообществом как шутка. Однако - в каждой шутке есть доля шутки и, как было показано выше, левитация диамагнетика имеет вполне научное обоснование. Это следует из простейшей формулы (46), которая в теории Физического Вакуума имеет более общий вид [12]

$$\mu = \int \frac{2g^{jm}}{vc^2} \left\{ \nabla_{[i} T^i_{|j|m]} + T^i_{s[i} T^s_{|j|m]} \right\} \sqrt{-g} dV,$$

показывая, что, в общем случае, масса должна зависеть от квадрата угловой скорости внутреннего вращения (как в формуле (37)) и от ее изменения.

06.10.2014

Литература

1. *Madelung E.* // Quantum Theory in Hydrodynamic Form, *Z.Physic*, **40** (1926), p.p. 332 - 336.
2. *Маделунг Э.* // Математический аппарат физики, М., Наука, 1961, с.618.
3. *De Broglie L.* // *C. r. Acad. sci.* 1926. Vol. 183. P. 447.
4. *De Broglie L.* // *Ibid.* 1927. Vol. 184. P. 273.
5. *Takabayasi T.* // *Progr. Theor. Phys.* 1952. Vol. 8. P.143; 1953. Vol. 9. P. 187.
6. *Bohm D.* // *Phys. Rev.* 1953. Vol. 84. P. 1458.
7. *Holland P.* // *The Quantum Theory of Motion.* Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004.
8. *Vaccialuppi G., Valentini A.* // *Quantum Theory at the Crossroads,*
9. *Шупов Г.И., Подаровская М.И.* // Спин-торсионная формулировка квантовой механики и поля инерции. 2012, (<http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1110-sh.pdf>).
10. *Ольховский И.И.* // Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970. с. 358, 359.
11. *Шупов Г.И.* // Застой в теоретической физике и пути выхода из него. Классическая электродинамика. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18636, 09.03.2014. <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/02311125.htm>
12. *Шупов Г.И.* // Теория Физического Вакуума, теория эксперименты и технологии, М., Наука, 1997. 450 с.
13. *Bloch F.* // *Physics Review.* 1946 **70**, P. 460-473.
14. *Takabayasi T.* // *Progr. Theor. Phys.* Vol. 66, № 2 P.736, 1981.
15. *Тернов И.М., Бордовицин В.А.* УФН, том 132, вып.2 1980, с. 345.