

ОБОБЩЕНИЕ МЕХАНИКИ НЬЮТОНА-ЭЙЛЕРА И ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННИХ СИЛ ИНЕРЦИИ

Шипов Г.И.

Введение.

Классическая механика является фундаментальной наукой и включает в себя механику Ньютона (механика материальной точки) и механику Эйлера (механика абсолютно твердого тела). В обеих этих механиках оказывается справедливой теорема о сохранении импульса центра масс механической системы, изолированной от внешних сил. Эта теорема доказана при условии, что внутренние силы удовлетворяют третьему закону механики Ньютона.

В научной литературе существует ряд учебников по теоретической механике [1-5], в которых отмечается, что в механике пластичного тела теорема о сохранении импульса центра масс теряет свою силу и в пластичном теле допускается движение под действием внутренних сил. Например, в учебнике [2] мы читаем: «Как уже известно, главный вектор и главный момент всех внутренних сил для любой механической системы равны нулю. Сумма работ внутренних сил равна нулю только в случае твёрдого тела, а для любой механической системы в общем случае она не равна нулю».

В академических работах [6,7] было показано, что учет высших производных также вызывает движение механической системы под действием внутренних сил. Высшие производные возникают при описании движения материальных тел в неголономной механике [8], в которой силы инерции играют важную роль. Как известно, силы инерции не удовлетворяют третьему закону механики Ньютона [9], поэтому для них теорема о сохранении импульса центра масс не выполняется.

1. Геометрическая природа вращательного движения

В 1922 г. французский математик Э. Картан высказал гипотезу о связи вращения материальных объектов с кручением пространства [10]. Это противоречит как основам механики материальной точки Ньютона, так и механики твердого тела, разработанной Эйлером. В том и другом случае теории базируются на геометрии Евклида, кручение которой равно нулю. Так кто же прав, Л. Эйлер или Э. Картан? Покажем, что прав Э. Картан.

Начнем очевидного факта - трехмерная (3D) система отсчета имеет 6 степеней свободы – три поступательных, описывающих трансляции ее начала, и три вращательных, задающих ее ориентацию. Отсюда следует, что полное описание 3D системы отсчета требует введения шестимерного многообразия, в то время как классическая механика базируется на трехмерном многообразии, на котором задана геометрия Евклида.

Математическим образом 3D системы отсчета является ортогональный репер $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, нормированный на единицу (триада Эйлера) [11].

$$\bar{e}_1 \bar{e}_1 = \bar{e}_2 \bar{e}_2 = \bar{e}_3 \bar{e}_3 = 1, \quad \bar{e}_1 \bar{e}_2 = \bar{e}_1 \bar{e}_3 = \bar{e}_2 \bar{e}_3 = 0, \quad (1)$$

Многообразие, на котором определена триада Эйлера, состоит из трех трансляционных координат x, y, z и трех углов Эйлера $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. На множестве трансляционных координат x, y, z задана евклидова метрика

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2)$$

а бесконечно малое вращение векторов триады в обозначениях $\varphi_1 = \varphi, \varphi_2 = \theta, \varphi_3 = \psi$, принятых Л. Эйлером, определяется как (рис.1)

$$d\vec{\chi} = d\chi \bar{e}_\chi = \bar{e}_3 d\varphi + \bar{e}_\xi d\theta + \bar{e}_3 d\psi. \quad (3)$$

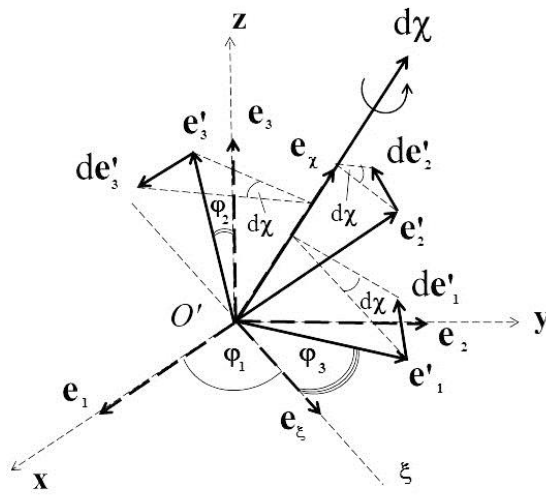


Рис.1 . Вращение триады $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в углах Эйлера вокруг трех осей x, y, z можно описать вращением вокруг мгновенной оси, определяемой вектором $\bar{e}_\xi = [\bar{e}_3 \bar{e}'_3]$ (теорема Эйлера)

Возводя (3) в квадрат, получим вращательную метрику $(d\vec{\chi})^2 = d\tau^2$. Эта метрика имеет определяющее значение для описания вращения материи, когда одной трансляционной метрики (2) недостаточно. При вращении материи необходимо расширить поступательный принцип относительности Галилея-Ньютона нерелятивистской механике Ньютона путем введения в механике *принципа вращательной относительности* [12]. При этом пространство Евклида механики Ньютона расширяется до пространства абсолютного параллелизма $A_3(3)$, в котором существуют как поступательная метрика (2), так и вращательная метрика $(d\vec{\chi})^2 = d\tau^2$.

Утверждение 1. Вращение триады Эйлера порождает, кручение пространства абсолютного параллелизма $A_3(3)$ [12].

Доказательство. Представим триаду Эйлера \bar{e}_A , $A=1,2,3$ в виде e^A_α , где $\alpha, \beta, \gamma \dots = 1,2,3$ - векторные индексы триады и $A, B, C \dots = 1, 2, 3$ - индексы, нумерующие векторы триады (или локальные индексы). Условия ортогональности (1) теперь запишутся как

$$e^A_\alpha e^\alpha_B = \delta^A_B, \quad e^A_\alpha e^\beta_A = \delta^\beta_\alpha, \quad (4)$$

где $\delta^A_B, \delta^\beta_\alpha$ - символы Кронекера. Бесконечно малый поворот триады Эйлера запишется как [12]

$$de^A_\alpha = d\chi^\beta_\alpha e^A_\beta \quad (5)$$

или, после деления на $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$,

$$\frac{de^A_\alpha}{ds} = \frac{d\chi^\beta_\alpha}{ds} e^A_\beta. \quad (6)$$

Умножая справа (5) и (6) на e^β_A , и, используя условия (4), получим

$$d\chi^\beta_\alpha = e^\beta_A de^A_\alpha, \quad (7)$$

$$\frac{d\chi^\beta_\alpha}{ds} = e^\beta_A \frac{de^A_\alpha}{ds} = \Omega^\alpha_\beta. \quad (8)$$

Дифференцируя (4) и учитывая (5), находим

$$e^A_\alpha de^\alpha_B + e^\alpha_B de^A_\alpha = d\chi^A_B + d\chi^B_A = 0, \quad (9)$$

откуда, с учетом (7), следует

$$d\chi_{AB} = -d\chi_{BA}. \quad (10)$$

С помощью триады e^β_A можно переходить от индексов $\alpha, \beta, \gamma \dots = 1,2,3$ к индексам $A, B, C \dots = 1, 2, 3$ и наоборот: $d\chi_{AB} = d\chi_{\alpha\beta} e^\alpha_A e^\beta_B$. Кроме того, триада e^β_A позволяет поднимать и опускать индексы $\eta^A_\beta = \eta_{\alpha\beta} e^{\alpha A}$ и т.д. Поэтому (8) можно записать как

$$d\chi_{\alpha\beta} / ds = -d\chi_{\beta\alpha} / ds = \Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}, \quad (11)$$

где $\Omega_{\alpha\beta}$ - 3D тензор угловой скорости триады Эйлера. Преобразуем (7) и (8), записав их в виде

$$d\chi^\beta_\alpha = e^\beta_A de^A_\alpha = e^\beta_A e^A_{\alpha\gamma} dx^\gamma = T^\beta_{\alpha\gamma} dx^\gamma, \quad (12)$$

$$\frac{de^A_\alpha}{ds} = T^\beta_{\alpha\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^A_\beta = \Omega^\beta_\alpha e^A_\beta, \quad (13)$$

где мы обозначили

$$T^{\beta}_{\alpha\gamma} = e^{\beta}_{\ A} e^{A}_{\ \alpha,\gamma} = -e^A_{\ \beta} e^{\alpha}_{\ A,\gamma}, \quad ,\gamma = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}, \quad (14)$$

$$\Omega^{\beta}_{\ \alpha} = T^{\beta}_{\ \alpha\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds}. \quad (15)$$

Поскольку соотношение (12) представляет собой дифференциалы вращательных координат, то для вращательной метрики мы получаем

$$d\tau^2 = d\chi^{\alpha}_{\ \beta} d\chi^{\beta}_{\ \alpha} = e^{\alpha}_{\ A} de^A_{\ \beta} e^{\beta}_{\ A} de^A_{\ \alpha} = T^{\alpha}_{\ \beta\gamma} T^{\beta}_{\ \alpha\sigma} dx^{\gamma} dx^{\sigma} = \Omega^{\alpha}_{\ \beta} \Omega^{\beta}_{\ \alpha} ds^2. \quad (16)$$

Из (15) видно, что угловая скорость вращения триады Эйлера $\Omega^{\beta}_{\ \alpha}$ порождает тензор $T^{\beta}_{\ \alpha\gamma}$, который впервые в математике был введен Г. Риччи [13]. Физическая интерпретация тензору $T^{\beta}_{\ \alpha\gamma}$ была дана впервые в работе автора [14], в которой поле $T^{\beta}_{\ \alpha\gamma}$ интерпретируется как *поле инерции*, порождающее силы инерции. В этой же работе показано, что $T^{\beta}_{\ \alpha\gamma}$ представляет собой тензор контрессии пространства абсолютного параллелизма

$$T^{\beta}_{\ \alpha\gamma} = -\Omega^{\cdot\beta}_{\ \alpha\gamma} + g^{\alpha\delta} (g_{\alpha\mu} \Omega^{\cdot\mu}_{\ \delta\gamma} + g_{s\mu} \Omega^{\cdot\mu}_{\ \delta\alpha}), \quad (17)$$

который определяется через объект неголономности $\Omega^{\cdot\beta}_{\ \alpha\gamma}$ следующим образом

$$\Omega^{\cdot\beta}_{\ \alpha\gamma} = -T^{\beta}_{\ [\alpha\gamma]} = -\frac{1}{2} e^{\beta}_{\ A} (e^A_{\ \alpha,\gamma} - e^A_{\ \gamma,\alpha}). \quad (18)$$

Тензор $\Omega^{\cdot\beta}_{\ \alpha\gamma}$ совпадает с кручением геометрии абсолютного параллелизма $A_3(3)$ [12]

$$\Delta^{\beta}_{\ [\alpha\gamma]} = -\Omega^{\cdot\beta}_{\ \alpha\gamma} = T^{\beta}_{\ [\alpha\gamma]} = \frac{1}{2} e^{\beta}_{\ A} (e^A_{\ \alpha,\gamma} - e^A_{\ \gamma,\alpha}). \quad (19)$$

Здесь

$$\Delta^{\beta}_{\ \alpha\gamma} = \Gamma^{\beta}_{\ \alpha\gamma} + T^{\beta}_{\ \alpha\gamma} = e^{\beta}_{\ A} e^A_{\ \alpha,\gamma} \quad (20)$$

- связность абсолютного параллелизма. Тензор кривизны, построенный по связности (20)

$$S^{\alpha}_{\ \beta\gamma\eta} = 2 \Delta^{\alpha}_{\ \beta[\eta,\gamma]} + 2 \Delta^{\alpha}_{\ \rho[\gamma} \Delta^{\rho}_{\ \beta]\eta} = 0, \quad (21)$$

обращается в нуль, что и является определением геометрии абсолютного параллелизма. Таким образом, формулы (15) и (17) доказывают утверждение 1.

2. 4D гироскоп, как неголономная механическая система, движущаяся под действием внутренних сил

В качестве примера механической системы, движущейся под действием внутренних сил инерции, рассмотрим механическую систему, состоящую из центральной массы

M и двух масс m (рис. 2). В центре массы M расположена ось вращения O_1 , вокруг которой вращаются массы m на нерастяжимых, невесомых стержнях. Вращение масс m происходит синхронно и в разные стороны. Такую механическую систему будем называть 4D гироскопом [15]. Согласно кинематике специальной теории относительности, изменение поступательной скорости v_x можно записать и как вращение в плоскости $x - ct$

$$\frac{d}{dt} v_x = \frac{d}{dt} (c \operatorname{th} \theta_x), \quad (22)$$

где c - скорость света, θ_x - псевдоевклидов угол в плоскости $x - ct$. Именно по этой причине механическая система на рис. 3. была названа 4D гироскопом

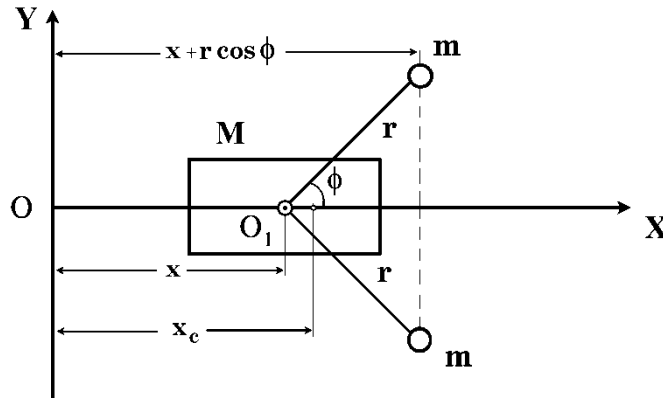


Рис.2. Принципиальная схема 4D гироскопа

Используя обозначения на рис.2 и учитывая симметрию механической системы трех тел относительно оси X , получим следующее выражение для кинетической энергии (лагранжиана) системы

$$L = T = \frac{1}{2} (M + 2m)v^2 + mr^2 \omega^2 - 2mrv\omega \sin \phi, \quad (23)$$

где $v = v_x = dx/dt$ - скорость массы M , $\omega = d\phi/dt$ - угловая скорость вращения грузов. Подставляя соотношение (23) в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} = 0, \quad \dot{x}^\alpha = dx^\alpha / dt, \quad \alpha = 1, 2, \quad (24)$$

получаем уравнения движения вида

$$(M + 2m)\dot{v}_c = (M + 2m)\dot{v} - 2mr\dot{\omega} \sin \phi - 2mr\omega^2 \cos \phi = 0, \quad (25)$$

$$\dot{\omega} - k^2 \frac{\sin \phi \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} \omega^2 = 0. \quad (26)$$

Здесь $k^2 = 2m/(M + 2m)$, $v_c = dx_c/dt$ - скорость центра масс системы, $v = dx/dt$ - скорость массы M , $\dot{\omega} = d\omega/dt$ - угловая скорость вращения масс m . Из уравнения (25) следует, что вдоль оси X на центр масс системы действуют три силы инерции: поступательная сила инерции $(M + 2m)\dot{v}$; проекция на ось X центробежной силы инерции $-2mr\omega^2 \cos \phi$; проекция на ось X силы инерции $-2mr\dot{\omega} \sin \phi$, порожденная угловым ускорением. Сумма этих трех сил равна нулю, поэтому центр масс системы покоится или движется прямолинейной и равномерно. В отсутствие трения в системе ее энергия сохраняется $dT/dt = 0$. Интегрируя уравнения (25) и (26) один раз, получим

$$v(t) = v_c + B\omega \sin \phi(t), \quad \omega(t) = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi_0}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi(t)}}, \quad (27)$$

где $v_c = v_0 = const$ - начальная скорость центра масс, ϕ_0, ω_0 - начальный угол и начальная угловая скорость и $B = rk^2$.

Равновесие сил инерции в уравнении можно нарушить двумя способами: 1) либо подействовать на массу M внешней силой F в уравнении (25); 2) либо подействовать на ось X внутренним моментом L в уравнении (26). Нам важнее рассмотреть последний случай, когда энергия системы меняется в соответствии с уравнением

$$\frac{dT(t)}{dt} = L\omega. \quad (28)$$

Аналитические исследования движения центра масс 4D гироскопа, сделанные в рамках механики Ньютона на базе уравнения (28), показали, что центр масс системы покоится или движется прямолинейно и равномерно при $L \neq 0$. Этот вывод противоречит экспериментам (рис.2). Поэтому, пришлось исследовать 4D гироскоп в рамках неголономной механики Декарта [15, 16], а не механики Ньютона. В неголономной механике Декарта уравнения Лагранжа (24) обобщаются и принимают вид [17]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} = -2 \partial \dot{x}^\beta \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\gamma} \Omega^\gamma{}_{\beta\alpha}, \quad \dot{x}^\beta = dx^\beta/dt, \quad (29)$$

где $\Omega^\gamma{}_{\beta\alpha}$ - объект неголономности (18). Уравнения (29) совпадают с уравнениями геодезических пространства $A_3(3)$

$$\frac{dv^\beta}{ds} + \Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} v^\alpha v^\gamma + 2g^{\beta\chi} \Omega_{\chi(\alpha\gamma)} v^\alpha v^\gamma = 0, \quad (30)$$

Для 4D гироскопа из уравнений (30), с учетом уравнения (28), следуют уравнения

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{dv}{dt} - B \frac{d}{dt} (\omega \sin \phi) = B\Phi\omega, \quad (31)$$

$$r \frac{d\omega}{dt} - \frac{dv}{dt} \sin \phi = \frac{L}{2mr} - \Phi v, \quad (32)$$

где L - момент, создаваемый внутренним источником энергий (пружиной или электромотором) и меняющий энергию T системы, Φ - управляющая функция системы.

Уравнения (31), (32) можно представить в виде [16]

$$\frac{dv_c}{dt} = a_L, \quad a_L = \frac{2BL \sin \phi / mr^2 + k^2 \Phi (r\omega - v \sin \phi)}{1 - k^2 \sin^2 \phi}, \quad (33)$$

$$\frac{d\omega}{dt} - k^2 \frac{\sin \phi \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} \omega^2 = \frac{L_N}{2mr^2}, \quad L_N = \frac{L/2mr^2 + \Phi(B\omega \sin \phi - v)/r}{1 - k^2 \sin^2 \phi}. \quad (34)$$

Эти уравнения связывают изменение скорости центра масс \dot{v}_c 4D гироскопа с угловым ускорением $\dot{\omega}$ вращения малых грузов m . Нам не удалось решить эти уравнения аналитически, поэтому были проведены численные расчеты с помощью программы «Матлаб» [16].

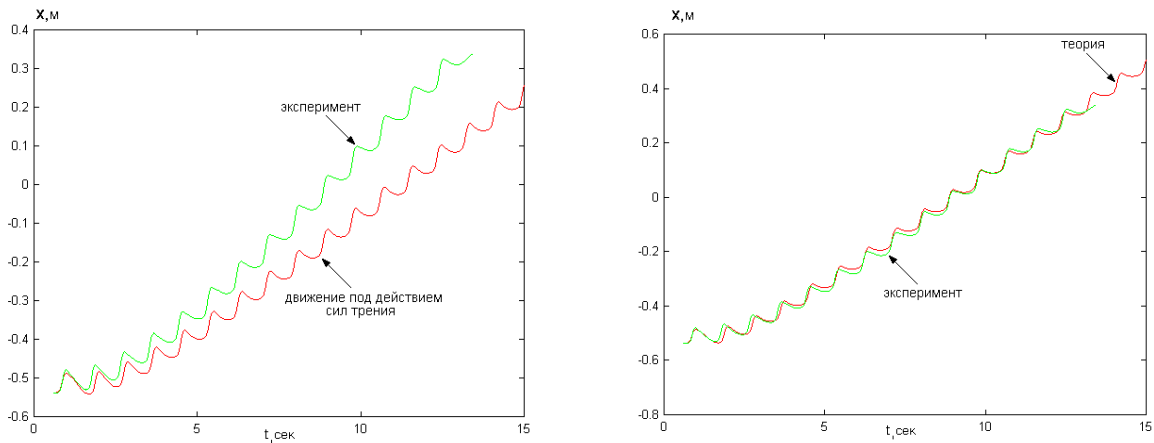


Рис.3. Сравнение теории и эксперимента при движении 4D гироскопа: слева теория Ньютона с учетом сил, трения; справа формулы (33),(34) неголономной механики.

Для этого, в рамках механики Ньютона, была построена теория движения 4D гироскопа за счет нелинейных сил трения и, затем, полученная теоретическая кривая сравнивалась с экспериментальным графиком (рис.3 слева). Справа на рис. 3 сравниваются теоретическая кривая, полученная из уравнений (33), (34) с экспериментальной кривой. Это сравнение показывает, что причиной движения центра масс 4D гироскопа является управляемая пространственно-временная прецессия гироскопа, который движется согласно уравнениям геодезических пространства $A_3(3)$, а не силы трения, как считает большинство физиков.

Заключение

Вращательное движение материи меняет геометрию пространства, порождая геометрию $A_3(3)$ с кручением $\Omega^{\alpha\beta}_{\gamma}$ в соответствии с гипотезой Э. Картана [10]. Механика вращательно движения шестимерна и неголономна в силу неголономности вращательных коор-

динат $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. В такой механике возможно движение центра масс под действием внутренних сил инерции, которые создаются управляемым вращением ее частей. Она является фундаментальным обобщением механики Ньютона-Эйлера [18].

26.09. 2017.

Литература

1. Геронимус Я. Л. // Теоретическая механика. Очерки об основных положениях. М., 1973 г. 512 стр. с илл. (стр. 206).
2. Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. Л. // Курс теоретической механики. Изд. 3-е, перераб. Учебник для вузов. М., «Высшая школа». 528 с. с илл. (стр. 293).
3. Кильчевский Н. А. // Курс теоретической механики. Том 1. (Кинематика, статика, динамика точки). М., 1972, 456 стр. с илл. (стр. 147).
4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. // Теория колебаний. 2-е изд., перераб. и испр. - М.: Наука, 1981. - 918 с. (стр. 23).
5. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. // Теоретическая механика. Учеб. для вузов. Под ред. Товстик П. Е. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 2000. - 592 с.: илл. (стр. 147).
6. Геловани В.А., Смольяков Э.Р. // Гипотеза о влиянии высших производных на движение центра масс. ДАН, 2000, т. 375, № 2, с. 159-162.
7. Смольяков Э.Р. // Нелинейные законы движения и обоснование законов движения инерциодов. ДАН РФ, 2003, т. 393, № 6, с. 770-775.
8. Шипов Г.И. // Неголономная механика Декарта. Экспериментальное исследование пространственно-временной нутации 4D гироскопа // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.22615, 15.10.2016
9. Ольховский И.И. // Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970. с. 358, 359.
10. Cartan E. // Compt. Rend. 1922. Vol. 174, p. 437.
11. Эйлер Л. // Открытие нового принципа механики. Записки Берлинской академии наук, 1750, т. 14., с. 185-217.
12. Шипов Г.И. // Теория Физического Вакуума, теория эксперименты и технологии, М., Наука, 1997. 450 с.
13. Ricci G. // Mem. Acc. Linc. 1895. Vol.2. Ser. 5. Pp. 276-322.
14. Шипов Г.И. // Теория гравитации в пространстве абсолютного параллелизма. Известия вузов, Физика, 1977, № 6, с. 142.
15. Шипов Г.И. // 4D гироскоп в механике Декарта. Кириллица, 2006, с. 74
<http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/004a/02311026-01.pdf>
16. Шипов Г.И, Сидоров А.Н. // Теоретические и экспериментальные исследования реактивного движения без отбрасывания массы. «Физика взаимодействия живых объектов с окружающей средой», 2004, М.: с.230.
17. Схоутен Я.А. // Тензорный анализ для физиков, 1965. М.: Наука, ГРФМЛ, с. 455.
18. Shipov G. // Decartes' Mechanics – Fourth Generalization of Newton's Mechanics. In "7th Intern. Conference Computing Anticipatory Systems " ~ НЕС - ULg, Liege, Belgium, 2005, ISSN 1373-5411 ISBN 2-930396-05-9 P. 178 .

