Алексей Стахов, Самуил Арансон

МАТЕМАТИКА ГАРМОНИИ И ЧЕТВЕРТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА:
Путь к гармоническим гиперболическим и сферическим мирам Природы

Международное издательство «Lambert Academic Publishing” (Germany) опубликовало книгу

Alexey Stakhov
Samuil Aranson

The Mathematics of Harmony and Hilbert's Fourth Problem
The Way to the Harmonic Hyperbolic and Spherical Worlds of Nature

Как заказать книгу

Книга выставлена на продажу и ее можно заказать, воспользовавшись сайтом http://www.morebooks.de/store/bookprice_offer/show?token=7f1a4937ec1be6910e9deca0a3ad132ee3f1c603&auth_token=d3d3LmxhcC1wdWJsaXNoaW5nLmNvbTo1N2Q4ZGU3ZWY4YzRlZmNlNGQ3NDhlOWNlNzEyODQ4MA==&locale=ru
Как следует из этого сайта, цена книги, установленная издательством, составляет **69.9 Евро.** Однако, согласно новым правилам издательства цена может быть уменьшена, если авторы книги в течение 2-х недель приобретают определенное число книг, что мы и сделали. В этом случае, согласно прейскуранту, цена книги снижается до **45.9 Евро.** Книга написана на английском языке и рассчитана на западного читателя, для которого цена в **45.9 Евро** является вполне приемлемой (научные книги на Западе очень дорогие). Русскоязычные читатели могут заказать эту книгу для библиотек научных учреждений, институтов и университетов. Книга уникальна и может быть полезной для студентов и аспирантов университетов. **Если возникнут какие-либо трудности с заказом книги, просьба обращаться в Customer Service at: support@morebooks.de Можно обращаться на русском языке.**

Расширенная аннотация книги

Уникальная книга, которая переворачивает наши представления о «Началах» Евклида и неевклидовой геометрии. В основе книги лежит *гипотеза Прокла,* которая приводит к новому взгляду на историю математики, начиная с Евклида. Согласно этой гипотезе, основная цель Евклида при написании «Начал» состояла в том, чтобы создать полную геометрическую теорию "Платоновых тел", которые ассоциировались в древнегреческой науке с Гармонией Мироздания.

«Начала» Евклида являются источником для *Классической Математики,* которая позаимствовала в *«Началах»* аксиоматический подход, теорию чисел и

теорию иррацинальностей, и *Математики Гармонии*, которая позаимствовала в «Началах» "золотое сечение" и "Платоновые тела".

«Математика Гармонии» начала развиваться в древнегреческой науке. В центре созданного древними греками математического учения о природе стояла «концепция гармонии», а сама математика древних греков и была «математикой гармонии», которая непосредственно была связана с «золотым сечением» - важнейшим математическим открытием античной науки в области гармонии. В создании и развитии «математики гармонии» принимали активное участие выдающиеся мыслители и математики: в древнегреческую эпоху - **Пифагор, Платон, Евклид**, в Эпоху Возрождения **– Леонардо да Винчи, Лука Пачоли, Иоганн Кеплер**, в 19 в. **– Люка, Бине, Цейзинг, Клейн** в первой половине 20 в. **– Гримм, Гика, Флоренский,** во второй половине 20 в. – известные математики **Воробьев, Коксетер, Хоггатт, Вайда** и др. Возрожденная **Алексеем Стаховым** *Математика Гармонии*, как новое междисциплинарное направление современной науки, является отражением «гармонических идей» Пифагора, Платона и Евклида в современной науке и математике.

Новые классы *гиперболических и сферических функций Фибоначчи*, основанных на *"золотой пропорции"* и ее обобщении - *«металлических пропорциях,"* полученные в рамках «математики гармонии», лежат в основе оригинального решения Четвертой Проблемы Гильберта для гиперболической и сферической геометрии.

Из этого решения вытекает задача поиска новых гиперболических и сферических миров природы. "Золотая" гиперболическая геометрия с основанием **1,618** ("геометрия Боднара"), которая лежит в основе ботанического явления филлотаксиса, является одним из наиболее блестящих подтверждений практической полезности нового решения Четвертой Проблемы Гильберта. «Серебряная» гиперболическая геометрия с основанием **2.414** является наиболее близкой к классической гиперболической геометрии Лобачевского.

Содержание книги

Книга состоит из 6 глав:

Глава1. Математика Гармонии, гипотеза Прокла и Золотое Сечение
Глава 2. Числа Фибоначчи и Люка, Формулы Бине и 10-я Проблема Гильберта
Глава 3. Гиперолические функции Фибоначчи и Люка и «геометрия Боднара»
Глава 4. Лямбда-числа Фибоначчи и Люка, «металлические пропорции» и гиперболические лямбда-функции Фибоначчи и Люка
Глава 5. Четвертая Проблема Гильберта: псевдосферическое решение
Глава 6. Сферические функции Фибоначчи и сферическое решение Четвертой Проблемы Гильберта

Книга основана на работах авторов, опубликованных на сайте АТ [1-4], а также в международных журналах «Congressus Numerantium” [5], “Visual Mathematics” [6], “Applied Mathematics” [7-9], “Journal of Applied Mathematics and Physics” [10].

В книге также содержатся новые математические результаты в этой области, ранее нигде не опубликованные. Речь идет о **«Сферической Математике Гармонии»** (Глава 6), которая включает в себя такие новые математические результаты как *сферические металлические пропорции, сферические функции Фибоначчи и сферическое решение Четвертой Проблемы Гильберта*.

Сферические металлические пропорции

При введении понятия «сферические металлические пропорции» мы используем понятие «металлических пропорций», которые задаются следующей математической формулой:

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}, \ . \qquad (1)$$

где мы предолагаем, что $\lambda \neq 0$ - заданное действительное число.

Заметим, что формула (1) была введена в современную науку в конце 20 и начале 21 в. независимо друг от друга различными исследователями из различных стран и континентов: **Верой Шпинадель** (Аргентина), **Мидхатом Газале** (Франция), **Джеем Каппрафом** (США), **Александром Татаренко**, **Виктором Шенягиным** (Россия), **Грантом Аракеляном** (Армения).

Определение 1. Под ***сферическими металлическими пропорциями*** понимаются комплексные числа следующего вида:

$$\tau_\lambda = \Phi_\lambda^i = \cos(\ln\Phi_\lambda) + i\sin(\ln\Phi_\lambda), \quad \lambda \neq 0 \ , \ i = \sqrt{-1} \, . \qquad (2)$$

Заметим, что поскольку $\mathrm{Re}(\tau_\lambda) = \cos(\ln\Phi_\lambda), \mathrm{Im}(\tau_\lambda) = \sin(\ln\Phi_\lambda)$, тогда ***сферические металлические пропорции*** (2) могут быть интерпретированы как пары действительных чисел, которые представляют собой **действительную** и **мнимую** части комплексного числа (2). Поэтому мы можем представить комплексное число (2) следующим образом:

$$\left[\cos(\ln\Phi_\lambda), \sin(\ln\Phi_\lambda)\right], \lambda \neq 0 \qquad (3)$$

Графики функций $\mathrm{Re}(\tau_\lambda) = \cos(\ln\Phi_\lambda)$ и $\mathrm{Im}(\tau_\lambda) = \sin(\ln\Phi_\lambda)$ представлены на Рис.1,2.

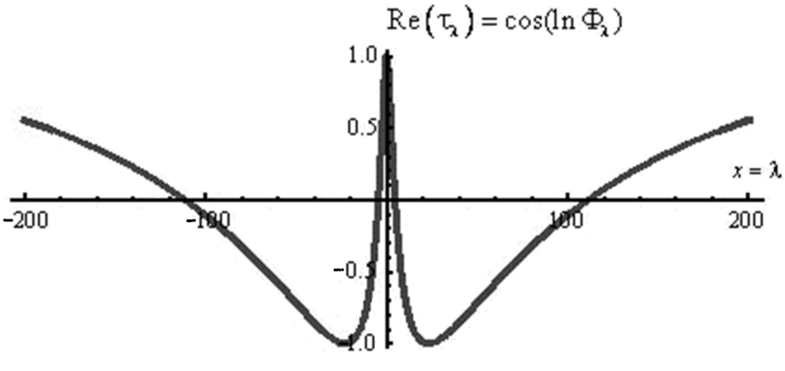

Рисунок 1. График функции $\mathrm{Re}(\tau_\lambda) = \cos(\ln\Phi_\lambda)$

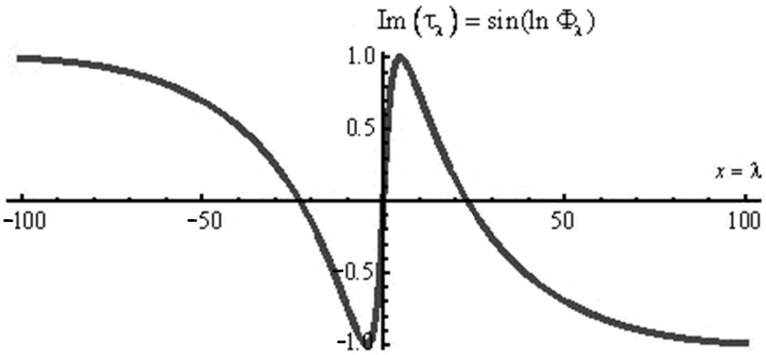

Рисунок 2. График функции $\operatorname{Im}(\tau_\lambda) = \sin(\ln \Phi_\lambda)$

Удивительная симметрия этих графиков подчеркивает «математическую красоту» сферических функций Фибоначчи (2), (3).

Определение 2. Мы называем сферические металлические пропорции (2), (3) **золотой, серебряной, бронзовой, медной сферическими пропорциями** для случаев $\lambda = 1, 2, 3, 4$ в (2), (3), соотвественно.

Используя (1) и (3), при $\lambda = 1{,}2{,}3{,}4$ мы получаем следуюшие численные значения *сферических металлических пропорций* (3):

- **Золотая** сферическая пропорция: $\tau = [\cos(\ln\Phi), \sin(\ln\Phi)] \approx (0.8864, 0.4628)$
- **Серебряная** сферическая пропорция: $\tau_2 = [\cos(\ln\Phi_2), \sin(\ln\Phi_2)] \approx (0.6969, 0.07171)$
- **Бронзовая** сферическая пропорция $\tau_3 = [\cos(\ln\Phi_3), \sin(\ln\Phi_3)] \approx (0.5081, 0.8612)$
- **Медная** сферическая пропорция $\tau_4 = [\cos(\ln\Phi_4), \sin(\ln\Phi_4)] \approx (0.3361, 0.9418)$

Сферические функции Фибоначчи

Определение 3. Мы называем **сферическим λ-синусом** и **сферическим λ-косинусом** следующие функции, соответственно:

$$\boldsymbol{SF}_\lambda(x) = -i\frac{\tau_\lambda^x - \tau_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}\sin(x\ln\Phi_\lambda) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{CF}_\lambda(x) = \frac{\tau_\lambda^x + \tau_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}\cos(x\ln\Phi_\lambda) \tag{5}$$

где символы $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{C}$ означают сферический λ-синус и λ-косинус Фибоначчи, соответственно.

Мы перепишем формулы (4) и (5) следующим образом:

$$\boldsymbol{SF}_\lambda(x) = \frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}\sin(y) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{CF}_\lambda(x) = \frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}\cos(y), \tag{7}$$

где $y = x\ln\Phi_\lambda = \ln\Phi_\lambda^x$.

Отсюда следует:

$$\sin(y) = \frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\times\left[\boldsymbol{SF}_\lambda(x)\right], \quad \cos(y) = \frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\times\left[\boldsymbol{CF}_\lambda(x)\right].$$

Из свойств тригонометрических функций $\sin(y), \cos(y)$ следуют соответствующие свойства для сферических функций Фибоначчи: $\boldsymbol{SF}_\lambda(x), \boldsymbol{CF}_\lambda(x)$. Ниже приведены некоторые из этих свойств в сравнении с соответствующими свойствами классических тригонометрических функций $\sin(y), \cos(y)$:

$$\begin{cases} \sin^2(y)+\cos^2(y)=1 \Leftrightarrow [\boldsymbol{SF}_\lambda(x)]^2+[\boldsymbol{CF}_\lambda(x)]^2 = \dfrac{4}{4+\lambda^2}, \\ \sin(y_1 \pm y_2) = \sin(y_1)\cos(y_2) \pm \cos(y_1)\sin(y_2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{SF}_\lambda(x_1 \pm x_2) = \dfrac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2}[\boldsymbol{SF}_\lambda(x_1)\boldsymbol{CF}_\lambda(x_2) \pm \boldsymbol{CF}_\lambda(x_1)\boldsymbol{SF}_\lambda(x_2)] \\ \cos(y_1 \pm y_2) = \cos(y_1)\cos(y_2) \mp \sin(y_1)\sin(y_2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{SF}_\lambda(x_1 \pm x_2) = \dfrac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2}[\boldsymbol{CF}_\lambda(x_1)\boldsymbol{CF}_\lambda(x_2) \mp \boldsymbol{SF}_\lambda(x_1)\boldsymbol{SF}_\lambda(x_2)] \end{cases}$$

и т.д.

Отметим также важную связь между сферическими λ - функциями $S\,F_\lambda(x)$, $C\,F_\lambda(x)$ и гиперболическими λ - функциями $sF_\lambda(x) = \dfrac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$,

$cF_\lambda(x) = \dfrac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$.Эта связь имеет вид:

$$S\,F_\lambda(x) = \frac{\sin(x\ln\Phi_\lambda)}{sh(x\ln\Phi_\lambda)}s\,F_\lambda(x) \;\;,\;\; C\,F_\lambda(x) = \frac{\cos(x\ln\Phi_\lambda)}{ch(x\ln\Phi_\lambda)}c\,F_\lambda(x),$$

$$s\,F_\lambda(x) = \frac{sh(x\ln\Phi_\lambda)}{\sin(x\ln\Phi_\lambda)}S\,F_\lambda(x) \;\;,\;\; c\,F_\lambda(x) = \frac{ch(x\ln\Phi_\lambda)}{\cos(x\ln\Phi_\lambda)}C\,F_\lambda(x)$$

Ниже в таблице приведено сферическое решение 4-й проблемы Гильберта в сравнении с гиперболическим (псевдосферическим) решением этой проблемы.

В нижней части таблицы приведены **сферические метрические формы** и **гиперболические метрические формы,** которые и задают два решения 4-й проблемы Гильберта: сферическое и гиперболическое (псевдосферическое).

Эти формы задают бесконечное множество новых неевклидовых геометрий

.

Spherical solution	Pseudo-spherical solution
Metallic proportions	
Spherical proportions: $\tau_\lambda = \Phi_\lambda^i = \cos(\ln\Phi_\lambda) + i\sin(\ln\Phi_\lambda),\ \lambda \neq 0,\ i = \sqrt{-1}$	**Hyperbolic proportions:** $\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} = e^{\ln\Phi_\lambda},\ \lambda \neq 0$
Partial cases of the proportions τ_λ and Φ_λ	
λ=1: the golden spherical proportion $\tau_1 = \Phi_1^i$, λ=2: the silver spherical proportion $\tau_2 = \Phi_2^i$, λ=3: the bronze spherical proportion $\tau_3 = \Phi_3^i$, λ=4: the cooper spherical proportion $\tau_4 = \Phi_4^i$, $\lambda = \lambda^* = 2sh(1) \Rightarrow \tau_{\lambda^*} = e^i$	λ=1: the golden hyperbolic proportion Φ_1, λ=2: the silver hyperbolic proportion Φ_2, λ=3: the bronze hyperbolic proportion Φ_3, λ=4: the cooper hyperbolic proportion Φ_4, $\lambda = \lambda^* = 2sh(1) \Rightarrow \Phi_{\lambda^*} = e$
λ-sines and λ-cosines	
Spherical λ-sine: $\boldsymbol{SF}_\lambda(x) = -i\frac{\tau_\lambda^x - \tau_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}\sin\left(x\ln\Phi_\lambda\right)$ **Spherical λ–cosine:** $\boldsymbol{CF}_\lambda(x) = \frac{\tau_\lambda^x + \tau_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}\cos\left(x\ln\Phi_\lambda\right)$ **Basic identity:** $\left[\boldsymbol{CF}_\lambda(x)\right]^2 + \left[\boldsymbol{SF}_\lambda(x)\right]^2 = \frac{4}{4+\lambda^2}$	**Hyperbolic λ-sine:** $sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}sh\left(x\ln\Phi_\lambda\right)$ **Hyperbolic λ–cosine:** $cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}ch\left(x\ln\Phi_\lambda\right)$ **Basic identity:** $\left[cF_\lambda(x)\right]^2 - \left[sF_\lambda(x)\right]^2 = \frac{4}{4+\lambda^2}$
Parametric forms of the basic surfaces based on λ-sines and λ-cosines	
$X = R\frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\boldsymbol{SF}_\lambda(u')\cos(v')$ $Y = R\frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\boldsymbol{SF}_\lambda(u')\sin(v')$ $Z = R\frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\boldsymbol{CF}_\lambda(u')$	$X = R\frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2}sF_\lambda(u')\cos(v')$ $Y = R\frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2}sF_\lambda(u')\sin(v')$ $Z = R\frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2}cF_\lambda(u')$
Spherical metric forms **of the Gaussian curvature** $K = \frac{1}{R^2} > 0$: $(ds)^2 = R^2\begin{bmatrix}\left(\ln^2\Phi_\lambda\left(du'\right)\right)^2 + \\ + \frac{4+\lambda^2}{4}\left(\boldsymbol{SF}_\lambda\left(u'\right)\right)^2\left(du'\right)^2\end{bmatrix}$ $\frac{\pi k}{\ln\Phi_\lambda} < u' < \frac{\pi(k+1)}{\ln\Phi_\lambda}$, $-\infty < v < +\infty\ (k \in Z),\ \lambda > 0$	**Lobachevski's hyperbolic metric forms** **of the Gaussian curvature** $K = -\frac{1}{R^2} < 0$: $(ds)^2 = R^2\begin{bmatrix}\left(\ln^2\Phi_\lambda\left(du'\right)\right)^2 + \\ + \frac{4+\lambda^2}{4}\left(sF_\lambda\left(u'\right)\right)^2\left(du'\right)^2\end{bmatrix}$ $0 < u' < +\infty$, $-\infty < v < +\infty\ (k \in Z),\ \lambda > 0$

Каждому действительному числу λ>0 соответствует своя сферическая и гиперболическая геометрия, при этом для всех сферических геометрий при изменении λ>0 сохраняется постоянной положительная гауссова кривизна, а для всех гиперболических геометрий сохраняется постоянной отрицательная гауссова кривизна.

В этом и состоит решение 4-й проблемы Гильберта для сферической и гиперболической геометрий. Множество таких новых («гармонических») сферических и гиперболических геометрий теоретически бесконечно!

Серебряные сферические и гиперболические геометрии

В книге введено важное понятие **нормализованного расстояния** $\overline{\rho}_{12}$ между метрическими формами новых сферических и гиперболических геометрий и стандартными формами для сферической геометрии и гиперболической геометрии Лобачевского.

В таблице ниже приведе численные значения нормализованных расстояний $\overline{\rho}_{12}$ для целочисленных значений λ=1,2,3,4,5,6.

λ	Name of metallic proportions	Φ_λ	Approximate values of Φ_λ	The normalized distance $\overline{\rho}_{12}$
1	*Golden*	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1.618	0.518
2	***Silver***	$\mathbf{1+\sqrt{2}}$	**2.414**	**0.118**
3	*Bronze*	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	3.303	0.1947
4	*Cooper*	$2+\sqrt{5}$	4.236	0.443
5	–	$\frac{5+\sqrt{29}}{2}$	5.192	0.6472
6	–	$3+\sqrt{10}$	6.162	0.8184

Анализ этой таблицы приводит к неожиданному результату. Оказывается, что наименьшее нормализованное расстояние по отношению к гиперболической геометрии Лобачевского и стандартной сферической геометрии имеют **серебряные** сферические и гиперболические геометрии, в основе которых лежат **серебряные** сферические и гиперболические пропорции следующего вида:

$$\tau_2 = \left[\cos(\ln\Phi_2), \sin(\ln\Phi_2)\right] \approx \left(0.6969, 0.07171\right)$$

$$\Phi_2=1+\sqrt{2}=2.414$$

Заключение

1. Обсуждая историю математики и развитие новых математических идей и теорий, мы должны обратить особое внимание на большую роль *«Начал»* Евклида в этом процессе. Академик **Колмогоров** выделяет несколько этапов в развитии математики [11]. Расширение предмета математики стало самой значительной особенностью математики 19-го века. При этом, по мнению

Колмогорова, создание «воображаемой геометрии» Лобачевского стало *"замечательным примером теории, возникшей в результате внутреннего развития математики ... Именно на примере этой геометрии была преодолена вера в незыблемость освященных тысячелетним развитием математики аксиом, была понята возможность создания существенно новых математических теорий...».* Как известно, "геометрия Лобачевского" в своих истоках восходит к 5-му постулату Евклида. В течение нескольких веков, от Птолемея и Прокла, математики пытались доказать этот постулат. Впервые блестящее решение этой казалось бы неразрешимой проблемы было дано российским математиком Николаем Лобачевским в первой половине 19-го века. И это выдающееся математическое открытие, по мнению Коллмогорова, стало началом современного этапа в развитии математики.

2. На рубеже 19-го и 20-го века, выдающийся математик **Давид Гильберт** сформулировал 23 математические проблемы, которые в значительной степени стимулировали развитие математики в 20 веке. Одна из них (Четвертая Проблема Гильберта) имеет непосредственное отношение к неевклидовой геометрии. Гильберт поставил перед математиками следующую фундаментальную проблему: ***"При этом возникает следующий более общий вопрос: могут ли быть разработаны другие геометрии, которые с равным правом могут стоять рядом с Евклидовой геометрией».*** Эта цитата Гильберта содержит формулировку очень важной научной проблемы, которая имеет принципиальное значение не только для математики, но и для всего теоретического естествознания: существуют ли неевклидовы геометрии, которые близки к евклидовой геометрии и «***которые с равным правом могут стоять рядом с Евклидовой геометрией»?*** Если рассматривать эту проблему в контексте теоретического естествознания, тогда Четвертая Проблема Гильберта сводится к поиску **НОВЫХ НЕЕВКЛИДОВЫХ МИРОВ ПРИРОДЫ**, которые близки к евклидовой геометрии и отражают некоторые новые свойства структур и явлений Природы. К сожалению, усилия математиков решить эту проблему не привели к существенному прогрессу. В современной математике нет консенсуса по поводу решения этой проблемы. В математической литературе считается, что Четвертая Проблема Гильберта сформулирована **слишком расплывчато, что затрудняет ее окончательное решение.**
3. Кроме 5-го постулата, *«Начала»* Евклида содержат еще одну фундаментальную идею, которая пронизывает всю историю науки и математики. Речь идет об **«идее Гармонии Мироздания»**, которая в Древней Греции была связана с "золотым сечением" и «Платоновыми телами». *Гипотеза Прокла*, сформулированная в 5-м веке нашей эры греческим философом и математиком **Проклом Диадохом** (412 - 485), содержит неожиданный взгляд на *«Начала»* Евклида. Согласно Проклу, как упоминалось, главная цель Евклида при написании «Начал» состояла в том, чтобы построить полную теорию правильных многогранников ("Платоновых тел"). Эта теория была изложена Евклидом в Книге XIII, то

есть, в заключительной книге *«Начал»*, что само по себе является косвенным подтверждением "гипотезы Прокла." Чтобы решить эту задачу (построение геометрической теории Платоновых тел), Евклид включил в разделы, предшествующие Книге XIII, необходимую математическую информацию. Наиболее курьезным является тот факт, что уже в Книге II Евклид сформулировал **Предложение II.11 – задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении**, которая известна в современной науке как **«золотое сечение».** Эта задача многократно встречается и в других книгах «Начал» (особенно в Книге XIII), на что обращает особое внимание Мордухай-Болтовский. «Золотое сечение» включено Евклидом в «Начала» с единственной целью – построить геометрическую теорию **ДОДЕКАЭДРА –** одного из главнейших Платоновых тел.

4. Начиная с Евклида, «золотое сечение» и «Платоновы тела «красной нитью» проходят через историю математики и теоретического естествознания. В современной науке Платоновы тела стали источником выдающихся научных открытий, в частности, **фуллеренов** (Нобелевская Премия по химии - 1996) и **квазикристаллов** (Нобелевская Премия по химии - 2011). Публикация книги Стахова **“The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” (World Scientific, 2009)** является отражением одной из важнейших тенденций в развитии современной науки (включая математику) - возрождение «гармонических идей» Пифагора, Платона и Евклида.
5. «Металлические пропорции» (**Vera W. de Spinadel**), которые являются обобщением классического «золотого сечения», являются новым классом математических констант и поэтому представляют фундаментальный теоретический и прикладной интрес. Кроме аргентинского математика **Vera W. de Spinadel**, многие исследователи из разных стран и континентов (французский математик **Midhat Gazale**, американский математик **Jay Kappraff**, российский инженер **Александр Татаренко**, армянский философ и физик **Грант Аракелян**, российский исследователь **Виктор Шенягин**, украинский физик **Николай Косинов**, испанские математики **Falcon Sergio** и **Plaza Angel** и другие) независимо пришли к одним и тем же пропорциям – **«металлическим пропорциям».** Все это подтверждает тот факт, что возникновение новых («гармонических») математических констант созрело в математике.
6. Новые классы гиперболических функций, основанных на «золотом сечении» и числах Фибоначчи (гиперболические функции Фибоначчи) стали одним из важных достижений в области «математики гармонии», имеющим прямое отношение к гиперболической геометрии. Впервые этот математический результат был получен украинскими математиками **Алексеем Стаховым, Иваном Ткаченко, Борисом Розиным**. Гиперболические λ-функции Фибоначчи, основанные на «металлических пропорциях» и введенных **Алексеем Стаховым**, стали очень важным шагом в создании общей теории «гармонических» гиперболических функций.
7. Исследования украинского архитектора Олега Боднара являются значительным шагом в развитии «гармониченских» гиперболических

геометрий. Боднар показал, что специальный тип гиперболической геометрии, основанной на «золотых» гиперболических функциях, широко распространен в живой природе и лежит в основе ботанического явления филлотаксиса (сосновые шишки, кактусы, ананасы, головки подсолнечника и т.д.).

8. С этой точки зрения, оригинальное решение Четвертой Проблемы Гильберта, основанное на «математике гармонии», в частности, на «металлических пропорциях» и гиперболических λ-функциях Фибоначчи, представляет особый интерес для математики и теоретического естествознания. В работах авторов настоящей книги доказано, что существует бесконечное множество новых («гармонических») гиперболических геометрий, ***«которые с равным правом могут стоять рядом с Евклидовой геометрией»*** **(Давид Гильберт).** Это решение Четвертой Проблемы Гильберта выдвигает перед теоретическим естствознанием (физикой, химией, биологией, генетикой и т.д.) **научную проблему поиска новых ("гармонических") миров Природы, которые могут объективно существовать в окружающем нас мире**. В этой связи, мы должны обратить особое внимание не только на **«геометрию Боднара»**, лежащей в основе ботанического явления филлотаксиса, но и на «**серебряную**» гиперболическую геометрию основанную на «серебряной» пропорции $\Phi_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2.41$. Как показано в книге, «серебряная» геометрия наиболее близка к геометрии Лобачевского. Мы можем предположить, что «серебряные» гиперболические функции и «серебряная» гиперболическая геометрия могут быть в ближайшее время обнаружены в Природе вслед за «геометрией Боднара», основанной на **"золотых" гиперболических функциях** с основанием $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.
9. Следующий научный резултат, полученный в книге, состоит в следующем. Авторы попытались распространить «гармонический подход» на случай *сферической геометрии*. Для решения этой задачи в книге введен новый класс элементарных функций, названных **сферическими λ-функциями Фибоначчи.** Этот класс функций позволил решить Четвертую Проблему Гильберта для случая *сферической геометрии*.
10. Исследование, проведенное в настоящей книге, представляет значительный интерес с точки зрения истории математики и перспектив ее развития в тесной связи с теоретическим естествознанием. Это исследование объединяет античное «золотое сечение», описанное в «Началах» Евклида, с геометрией Лобачевского и сферической геометрией. Это неожиданное объединение привело к оригинальному решению Четвертой Проблемы Гильберта для гиперболической и сферической геометрий, что является важным математическим результатом, который **начинает новый («гармонический») этап в развитии неевклидовой геометрии и ее приложений в теоретическом естествознании.**
11. Принимая во внимание **«Принцип математической красоты» Дирака** и рассматривая с этой точки зрения гиперболические и сферические функции Фибоначчи, так же как и «геометрию Боднара», авторы высказывают

предоположение, что, если бы Давид Гильберт был бы жив в настояшее время, он отдал бы предпочтение решению Четвертой Проблемы Гильберта а терминах «математики гармонии», поскольку в этом «гармоническом» решении **«Доктрина Лейбница о предустановленной гармонии мироздания»** объединилась с «**Принципом математической красоты» Дирака** как исходным принципом любой физической теории. Новое решение Четвертой Проблемы Гильберта открывает широкие перспективы не только для математики, но и для всего теоретического естествознания и ставит задачу поиска новых («гармонических») гиперболических и сферических миров Природы.

Литература

1. А.П. Стахов, С.Х. Арансон, «Золотая» фибоначчиевая гониометрия, четвёртая проблема Гильберта, преобразования фибоначчи-лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15225, 12.04.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322036.htm
2. С.Х. Арансон, Ещё раз о 4-й проблеме Гильберта // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15677, 01.12.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321180.htm
3. А.П. Стахов, Проблемы Гильберта и «математика гармонии» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18043, 25.05.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321271.htm
4. А.П. Стахов, Неевклидовы геометрии. От «игры в постулаты» к «игре в функции» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567,публ.18048, 29.05.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162125.htm
5. A.P. Stakhov. “The Mathematics of Harmony: Clarifying the Origins and Development of Mathematics.” *Congressus Numerantium*, VOLUME CXCIII, December, 2008, 5-48
6. Alexey Stakhov. “On the general theory of hyperbolic functions based on the hyperbolic Fibonacci and Lucas functions and on Hilbert’s Fourth Problem,” *Visual Mathematics*, Vol.15, No.1, 2013 http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/pap.htm)
7. A. Stakhov, S. Aranson. “Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part I.” *Applied Mathematics*, Vol.2, No.1, January 2011, 74-84. http://www.scirp.org/journal/am/
8. A. Stakhov, S. Aranson. “Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part II.” *Applied Mathematics*, Vol.2, No.2, February 2011, 181-188. http://www.scirp.org/journal/am/
9. A. Stakhov, S. Aranson. “Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part III.. *Applied Mathematics*, Vol.2, No. 3, March 2011, 283–293. http://www.scirp.org/journal/am/

10. A.P. Stakhov. “Hilbert’s Fourth Problem: Searching for Harmonic Hyperbolic Worlds of Nature.” *Applied Mathematics and Physics*, Vol.1, No.3, 2013, 60-66 http://www.scirp.org/journal/jamp/
11. А.Н. Колмогоров. Математика в ее историческом развитии. М.: Наука, 1991.