Денис Клещёв

Исторические корни аксиоматических противоречий и Математика Гармонии

(отзыв на статью проф. С.К.Абачиева

«Математика гармонии глазами историка и методолога науки»)

В недавней статье проф. С.К.Абачиева, [1] посвященной фундаментальному труду А.П.Стахова «The Mathematics of Harmony», изданному издательством World Scientific, был поставлен вопрос о методологических проблемах, связанных с математикой гармонии, которая в некотором смысле, действительно, не сформирована до такого уровня, чтобы принять ***канонические*** формы. В сухом осадке именно этот методологически незавершенный характер математики гармонии, как справедливо пишет С.К.Абачиев, и вызывает затруднения в дальнейшем развитии прорывных кибернетических и естественнонаучных разработок, созданных в рамках этого направления.

На первый взгляд, отсутствие четких канонических форм математики гармонии вызывает крайнее удивление, особенно если учесть, что история и предыстория ее развития насчитывает несколько тысяч лет. Поэтому возникает насущная необходимость в более подробном разъяснении некоторых тонкостей, связанных в научными взглядами проф. А.П.Стахова, которое возьму на себя смелость привести ниже.

С точки зрения современной науки отсутствие методологического канона настораживает. Многим талантливым студентам и даже именитым ученым, приученным во всем полагаться на авторитет канонической науки, отсутствие жестких предустановленных догматов кажется серьезным недостатком того или иного научного направления. Однако, как нетрудно заметить, при таком формальном подходе понятие Истины всегда отождествляется с понятием Догмата. То есть, в методологии науки содержится априорное суждение об истинности всех уже существующих канонических теорий, которые были признаны научными.

Между тем, сама история развития науки неоднократно выявляла порочную практику канонической методологии. Достаточно будет сослаться на копернианско-брунианский переворот в астрономии или картезианско-ньютоновский переворот, объединивший арифметику и геометрию. Как известно, до Рене Декарта в аристотелевской концепции существовало жесткое разделение арифметического числа и геометрической величины. Основанием для такого разделения было частичное признание Аристотелем пифагорейской аксиомы неделимости единицы: «Для числа имеется предел в направлении к наименьшему, а в направлении к большему

---

[1] С.К.Абачиев, Математика гармонии глазами историка и методолога науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15991, 11.07.2010

оно всегда превосходит любое множество, для величин же наоборот: в направлении к меньшему оно превосходит все своей малостью, а в направлении к большему бесконечной величины не бывает. Причина та, что единица неделима». [2]

В аристотелевской картине мира уживались два противоречащих друг другу представления. С одной стороны, он признавал понятие бесконечности, более того, утверждал, что актуальной бесконечности не существует. С другой стороны, устанавливал для чисел наименьший предел, равный единице (μοναδα), а для геометрических величин наибольший предел, который выражался у него в замкнутой сфере неподвижных звезд. Но если судьба геоцентрической и гелиоцентрической модели вселенной общеизвестна, то с разделением геометрии и арифметики все далеко не так просто. Разумеется, метод координат, предложенный Рене Декартом, позволил нам говорить о единой природе арифметического числа и геометрической величины. Но вместе с появлением математического анализа проблема разделения арифметики и геометрии отнюдь не изжила себя, она всего лишь приняла скрытый характер и, спустя два столетия, трансформировалась в противоречия теории множеств Г.Кантора. Неслучайно А.Френкель, выдающийся математик теоретико-множественной школы и один из создателей системы аксиом Цермело-Френкеля, был вынужден признать, что давняя аристотелевская проблема разделения геометрии и арифметики до сих пор остается одной из главных, пожалуй, даже самой главной проблемой оснований математики. [3]

Более конкретно эту фундаментальную проблему сформулировал Д.Гильберт, поставив на II Международном Конгрессе математиков в 1900 году следующую задачу: доказать, что общепринятая система аксиом арифметики содержит противоречия, либо доказать, что она непротиворечива. Пытаясь найти подход к решению этой задачи, К.Гёдель доказал свою знаменитую вторую теорему о неполноте. Согласно данной теореме, если принятая система аксиом арифметики непротиворечива, то доказать ее непротиворечивость невозможно в рамках существующей системы. Разрешение гильбертовой задачи, как показал К.Гёдель, возможно лишь в том случае, если аксиомы арифметики противоречивы. Тогда и только тогда возможно построение другой, непротиворечивой теории, по отношению к которой будет обнаружено и доказано существование искомого противоречия.

Впервые такое противоречие в системе общепризнанных аксиом было обнаружено проф. А.П.Стаховым, который, занимаясь разработкой оптимальных алгоритмов на основе фибоначчиевых кодов, выявил логический парадокс в системе аксиом теории измерения (на которой зиждется современная теория действительных чисел, евклидова и большинство других,

---

[2] Философы Греции. Основы основ: логика, физика, этика / Коммент. В.Школы. Харьков, 1999. С.648

[3] Н.Я.Виленкин. В поисках бесконечности. М.,1983.С.12

неевклидовых геометрий). Если одна аксиома, известная как аксиома Евдокса-Архимеда, утверждает потенциальный или незавершенный характер математического понятия бесконечности, то другая аксиома Г.Кантора о двух стягивающихся в общую точку отрезках утверждает, напротив, актуальный или завершенный характер бесконечности. [4] Другими словами одно и то же понятие наделяется системой аксиом измерения диаметрально противоположными свойствами.

Каноническая методология дала серьезный сбой. Она оказалась непригодна для построения по-настоящему непротиворечивой научной концепции, в точности повторяя двойственность аристотелевых представлений о бесконечности. Вместо того, чтобы использовать различные методы умолчания существующих аксиоматических проблем, А.П.Стахов попытался обратить внимание академического сообщества на обнаруженное им аксиоматическое противоречие, хотя никаких шансов быть услышанным в условиях монополии теоретико-множественной школы практически не было.

Тем не менее, при создании теоретических основ математики гармонии была выбрана концепция конструктивной математики, отвергавшая понятие завершенной бесконечности как внутренне противоречивое. Несмотря на то, что конструктивную математику в разное время развивали такие всемирно известные ученые как К.Ф.Гаусс, Л.Кронекер, А.Пуанкаре, Л.Брауэр, А.А.Марков, Л.С.Понтрягин, А.Н.Колмогоров и многие другие, она никогда не воспринималась современной математической наукой в качестве такой концепции, которая способна оспорить справедливость теоретико-множественного канона.

Даже после того, как выдающийся математик и философ А.А.Зенкин доказал наличие логической ошибки в доказательстве Г.Кантора о несчетности бесконечного множества всех действительных чисел, [5] Международный союз математиков не нашел никаких оснований для беспокойства. В самом деле, никаких доказательств существования противоречий в системе аксиом арифметики конструктивная математика долгое время не могла выявить, хотя еще в 1911 году Л.Брауэр доказал фундаментальную теорему о невозможности топологического отображения между евклидовыми пространствами различной размерности. Следовательно, уже в начале XX века существовал формальный повод для исключения аксиомы Г.Кантора о стягивающихся отрезках, предполагавшей, что такое топологическое отображение существует между одномерными и нульмерными объектами.

Можно сколько угодно говорить о несправедливости истории науки, необъективности влиятельных математиков, сетовать на неготовность общества к очередной научной революции,

---

[4] А.П.Стахов. Введение в алгоритмическую теорию измерения. М., 1977. С.26

[5] А.А.Зенкин. Ошибка Георга Кантора // Вопросы философии. 2000, №2, С.165-168

которая по Т.Куну должна была уже давно произойти в математике и естествознании. Но у истории свои критерии, по которым включается маховик научных открытий. Великое всегда видится на расстоянии, и порой, чтобы по достоинству оценить ту или иную теорему, требуется сотня лет, как в случае с теоремой Л.Брауэра ,а иногда для этого требуются целые тысячелетия, как в случае с теоремой Аристотеля «Infinitum actu non datur».

В самом деле, если между арифметикой и геометрией существует неразрывная связь, то обнаруженное А.П.Стаховым аксиоматическое противоречие, берущее свое начало в определениях евклидовой геометрии, более того, в определениях действительных чисел, должно было иметь эквивалентное противоречие в системе аксиом арифметики. На факте существования такого противоречия настаивают многие специалисты по теории групп, но подавляющее большинство математиков убеждены в том, что доказать противоречивость аксиом арифметики практически невозможно в силу того, что для проверки всех математических теорем и определений потребуется исписать миллиарды страниц текста.

Тем более удивительно, что для доказательства противоречивости аксиом арифметики на самом деле достаточно всего одной страницы, написанной вполне доступным языком. И в этой возможности выразить решение наисложнейшей математической задачи простым языком содержится важная гуманистическая мысль, опровергающая мнение тех философов, которые пропагандируют идеи агностицизма и ущербности человеческого мышления.

Для того, чтобы доказать существование противоречия в системе аксиом арифметики, нужно всего лишь обратиться к самым истокам математики и вспомнить аксиому неделимости единицы, на которой была построена вся пифагорова арифметика, не применявшая ни десятичных, ни обыкновенных дробей. Казалось бы, в XVI веке вместе с широким распространением десятичных дробей эта аксиома была окончательно вычеркнута из оснований математики, но, как заметил в философском трактате «О науке» А.Пуанкаре, аксиомы продолжают жить в теоремах, которые были доказаны с их помощью. [6] Одну из некорректных пифагорейских теорем, основанную на аксиоме неделимости единицы, выявил П.Ферма, давший правильную формулировку теореме о сумме двух степеней с одинаковыми показателями. Другой такой теоремой, которая основана на аксиоме неделимости единицы и которая до сих пор считается корректной, является знаменитая теорема о несоизмеримости стороны и диагонали единичного квадрата, утверждающая иррациональность числа $\sqrt{2}$.

Доказательство этой теоремы звучит так. Пусть существуют целые числа m и n, $n\neq0$, такие что $m^2/n^2=2$. Тогда можно записать, что $m^2=2n^2$, следовательно, m^2 – четное число, а значит, m тоже четное (то есть $m=2k$). Подставляя 2k в выражение $m^2=2n^2$, получаем выражение $4k^2=2n^2$,

---

[6] Пуанкаре А. О науке. М., 1983. С.36

откуда $n^2=2k^2$. Это значит, что числа n^2 и n – тоже четные! Раз оба числа m и n четные, то любое отношение m/n, какое бы мы ни взяли, будет сократимым. Следовательно, подобрать несократимое отношение m/n невозможно, а значит, число $\sqrt{2}$ несоизмеримо. Для того, чтобы убедиться в некорректности данного доказательства, рассмотрим следующее геометрическое построение:

$$AC^2 = \frac{2 \cdot AB^2}{AB^2} \quad \text{или} \quad AC = \sqrt{\frac{2 \cdot AB^2}{AB^2}},$$

где AC – диагональ единичного квадрата ABCD, по которой строится диагональный квадрат ACEF, вдвое больший квадрата ABCD. То же самое можно записать следующим образом:

$$m^2 = \frac{2 \cdot n^2}{n^2} \quad \text{или} \quad m = \sqrt{\frac{2 \cdot n^2}{n^2}}.$$

Отдавая себе отчет, что n обозначает сторону квадрата, которая равна единице (то есть равна *нечетному* числу, которое не делится нацело на 2), весьма сложно признать справедливость доказательства пифагорейцев, так как в нем утверждается, что оба числа m и n – четные. Зато вполне разумное геометрическое построение получается в том случае, если отбросить аксиому неделимости единицы. Тогда число k, принятое в пифагоровой арифметике за целое, мы запишем в виде дроби $k=\sqrt{2}/2$, и тогда выражение $n^2=2k^2$ примет вид тождества $1^2=2(\sqrt{2}/2)^2$. Следовательно, отношение целых чисел m/n будет несократимым – и это неопровержимый арифметический и геометрический факт!

Таким образом, признавая корректность теоремы несоизмеримости, мы невольно включаем аксиому неделимости единицы в систему современных арифметических аксиом, среди которых содержится противоположное утверждение, согласно которому единицу можно делить до бесконечности (именно благодаря этой аксиоме становится возможным применение десятичных дробей).

Но если вся пифагорейская теория несоизмеримости некорректна, некорректной будет и вся теория иррациональных чисел, некорректной будет и теория бесконечных множеств Г.Кантора, которая появилась лишь потому, что такие числа как $\sqrt{2}$ считались неупорядоченными последовательностями (что противоречит аксиоме выбора и гипотезе Э.Цермело, согласно которой любое множество можно вполне упорядочить). Это значит, что требуется пересмотр всего формального языка, которым пользуется математическая наука, это значит, что принятый в настоящее время математический канон фатально или, выражаясь словами Л.Брауэра, «патологически» противоречив сверху донизу, начиная с самых оснований математики (арифметики), заканчивая ее наивысшим абстрактным достижением (теорией бесконечных множеств).

Вот почему математика гармонии не сформирована до такого уровня, чтобы принять канонические формы. Непротиворечивая теория, освобожденная от парадоксов теории множеств и пифагорейской теории несоизмеримостей, возможно, еще только начинает зарождаться. Если пифагорейская теория несоизмеримостей некорректна, то, очевидно, должна существовать другая теория, подтверждающая, что отрезки, считающиеся несоизмеримыми, на самом деле вполне соизмеримы, то есть являются рациональными числами. И такая теория существует.

Основная заслуга в ее построении принадлежит математику-интуиционисту Л.Брауэру. Благодаря его теореме о невозможности топологического отображения, связующего две величины разных размерностей, задача о соизмерении √2 сводится к задаче на построение диагонального квадрата конгруэнтного ортогональному и состоящему из элементов одинаковой размерности. Наиболее простой пример такого диагонального квадрата представляет собой фигура, построенная по диагонали квадрата со стороной из 4 клеток и конгруэнтная ортогональному квадрату со стороной из 5 клеток.

Брауэрово разбиение единичного квадрата на бесконечную дискретную решетку, кратную десятичной разрядности, позволяет вывести для √2 периодическое значение, которое можно записать дробью: 1,414_(707_), где нижнее подчеркивание _ обозначает пропущенные члены конечной последовательности. Во всей брауэровой решетке для √2 будет существовать одно и только одно решение, выразимое отношениям целых чисел m/n:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{(1414\_707\_-1414\_)^2}{999\_000\_^2} = \frac{199\_700000\_1000\_}{99\_800\_1000000\_} = 2{,}00\_1.$$

Интервал, отделяющий значение 2,00_1 от абсолютного значения числа 2 соответствует в этой записи первому периоду десятичной дроби 1,414_(707_). По мере увеличения числа периодов этот интервал можно приблизить как угодно близко к абсолютному значению, однако он никогда не будет в точности равен числу 2 (иначе число 2 оказалось бы «квадратным»). Данный арифметически выделенный интервал служит подтверждением теоремы Л.Брауэра, ведь если бы такого рационального интервала не существовало, арифметические корни различных размерностей $\sqrt{2}^2$, $\sqrt[3]{2}^3$ и т.д. оказались бы равными одному и тому же числу 1,(9), а значит, между пространствами разных размерностей существовал бы арифметический и топологический переход.

Чтобы исключить путаницу с евклидовыми представлениями, в соответствии с которыми √2 считается иррациональным числом, такую геометрию, в которой √2 и многие другие дробные арифметические корни принимаются в качестве, пусть невообразимо больших, но все-таки периодических десятичных дробей, в совместной статье А.П.Стахова и Д.С.Клещева [7] было

[7] А.П.Стахов, Д.С.Клещев, Проблема Бесконечного в математике и философии от Аристотеля до А.Зенкина // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15680, 03.12.2009

предложено называть евдоксовой геометрией, по имени древнегреческого математика, впервые предложившего формулировку аксиомы измерения Евдокса-Архимеда.

Что же конкретно дает евдоксова геометрия математике гармонии? Это, прежде всего, представление, каким образом осуществляется непрерывность построения самоподобных структур на основе числа Ф. В евдоксовой геометрии $\sqrt{5}$ определется периодической десятичной дробью 2,23_(118_). Разделив это число на 2 и прибавив 1/2, мы получим евдоксово значение числа Ф=1,68_(590_).

Если раньше, наблюдая за построением фибоначчиевых фракталов в живой и неживой природе, мы знали только то, что в каждой определенной точке самоподобной структуры содержится позиционная информация о числе Ф, но не имели представления о механизме передачи информации от локального порядка к интегральному, то теперь у нас у нас появляется возможность показать, каким образом каждая точка фрактала может нести в себе информацию о потенциально бесконечном эволюционировании сложных систем. Ведь оказывается, что из одного евдоксового числа Ф в различных локальных точках поля возможно построение бесконечного количества других фибоначчиевых структур. Потому что каждый из бесконечно удаленных периодов числа Ф можно легко трансформировать в Фn.

Для этого достаточно привести любой из периодов в такое гармоническое состояние, в котором находится число Ф. А именно, любой из периодов (590_) может образовать новую точку поля фибоначчиевой структуры при резонансе со вторым таким же периодом и получении дополнительного гармонического импульса: 0,590_ (295_) х 2 + 1/2 = 1,68_(590_). Такое представление позволяет моделировать самосогласованные пространственно-временные поля, способные вести себя как единое целое, то есть содержать голографическую информацию о состоянии всей фибоначчиевой структуры.

Как верно отмечает проф. С.К.Абачиев, именно в построении самоподобных структур математика гармонии содержит огромный эвристический потенциал. Но не следует думать, что для появления прорывных фундаментальных открытий нужно просто немного подождать, когда относительно небольшая группа единомышленников, объединенная проф. А.П.Стаховым, предложит вполне завершенный методологический канон. Для того, чтобы сложилась современная каноническая математика, пускай даже содержащая в своих основаниях серьезные аксиоматические противоречия, потребовалось несколько веков непрерывного научного прогресса, потребовалось многократно улучшить систему образования, привлечь в науку миллионы талантливейших умов.

Теперь, когда скрывать существование аксиоматических проблем становится все труднее, многие части величественного здания канонической математики, еще недавно казавшиеся несокрушимыми, рискуют обратиться в руины, чего нельзя сказать о математике гармонии. Она уже пережила крушение многих математических канонов, существовавших в древнеиндийской, шумеро-аккадской, древнеегипетской, древнекитайской, древнегреческой культурах, в культуре индейцев майя. Несомненно, математика гармонии переживет и современную каноническую математику, потому что она в значительной мере основана на закономерностях объективного мира, а не фиксированных предустановленных догматах.

В беспощадном, варварском разрушении столпов современной канонической математики, содержащих в себе противоречия, не заинтересован ни автор этой статьи, ни, тем более, проф. А.П.Стахов. Весь смысл развития конструктивной математики можно свести к исключению аксиоматических противоречий, то есть к решению задачи, поставленной Д.Гильбертом, который верил в неограниченность возможностей человеческого познания. Если кто-то предпочитает искать математическую истину в теории бесконечных множеств, никто не собирается его переубеждать, хотя результаты К.Геделя и П.Коэна убедительно свидетельствуют, что в рамках теоретико-множественного канона нельзя доказать ни гипотезу континуума Г.Кантора, ни гипотезу упорядоченности любого множества Э.Цермело, ни решить вторую проблему Д.Гильберта о противоречиях в системе аксиом арифметики, а значит, устранить разделение арифметики и геометрии.

На данном этапе методологической задачей конструктивной математики и математики гармонии является достижение относительного паритета с теоретико-множественным направлением, которое в XX веке добилось установления фактической монополии на преподавание математики. Если каждый ученый будет получать достоверную информацию о кризисном состоянии современной математики и отчетливо представлять, что после введения Г.Кантором понятия актуальной бесконечности в математике произошел методологический раскол на теоретико-множественное и конструктивное направление, то возможен эволюционный путь преобразования современной математики. При этом главной заслугой Г.Кантора и теоретико-множественной школы с точки зрения конструктивной математики будет являться именно то, что теория множеств позволила вскрыть острые противоречия в основаниях математики. В этом смысле концепцию актуальной бесконечности можно рассматривать как точную аналогию создания *perpetuum mobile*. Как заметил в своем докладе на II Международном Конгрессе математиков Д.Гильберт, после многих безуспешных попыток построения вечного двигателя исследователи сформулировали обратную задачу, которая привела к открытию закона сохранения энергии и доказательству невозможности построения *perpetuum mobile* в первоначальном понимании его смысла. [8]

---

[8] Д.Гильберт. Математические проблемы / Перев. М.Г.Шестопала и А.В.Дорофеевой, под ред. П.С.Александрова. М., 1969.

В самом деле, не появись теория множеств в XIX-XX веке, то проблема нахождения противоречий в аксиомах арифметики могла бы вообще никогда не возникнуть или возникнуть спустя сотни лет. Поэтому нельзя сказать, что возникновение теоретико-множественной школы было абсолютно бессмысленной исторической ошибкой. Как подчеркивает в своих работах А.П.Стахов, необходимо говорить лишь о стратегических ошибках, допущенных в развитии математики, которые можно и нужно исправлять. Необходимо, наконец, признать, что завышенные ожидания от теории бесконечных множеств себя не оправдали и привели к тому, что некоторые математики после доказательств П.Коэна отреклись от выполнения программы, состоящей из решения 23 гильбертовых задач. К счастью, конструктивный подход позволяет решать те задачи, которые не имеют разрешения в теории бесконечных множеств, а значит, нет никаких оснований сомневаться в возможностях познания и в знаменитом высказывании Д.Гильберта, выбитом на его памятной плите «Мы должны знать, мы будем знать»!