Валериан Владимиров, Алексей Стахов

Энтропия золотого сечения
(раскрыта еще одна тайна золотого сечения)

Аннотация

Каждому из бесконечных вариантов деления произвольного отрезка на части «a» и «b≥a» соответствует своя «гармоническая пропорция» и своя рекурсия. Если разность b–a равна половине гармонического среднего h чисел «a» и «b», получаем «гармоническое золотое сечение». Доказано, что такому сечению (частный его случай – классическое золотое сечение, h=2) соответствует максимальная энтропия суммы двух слагаемых разностного уравнения (иначе: системы, синтезированной из двух элементов). Но замкнутая система с максимальной энтропией обладает динамической устойчивостью (2-й закон термодинамики), что и объясняет широкую распространенность золотого сечения в природе и творениях человека. Приведены примеры, подтверждающие «энтропийную закономерность» золотого сечения.

Содержание:

Общепризнанные мнения о том, что каждый считает делом
давно решённым, чаще всего заслуживают исследования
(Г. Лихтенберг, 18-й век)

1. Основные термины и их определения

1.1. ***Золотая пропорция*** – равенство отношений целого к большему и большего к меньшему: (a+b):b=b:a=Ф. Число Фидия Ф=(1+√5)/2≈1,618 в современной науке называется «золотой пропорцией». До 2010 года для случая деления целого на две неравные части была известна лишь одна пропорция – «золотая», и слово «пропорция» утеряло первоначальный смысл (равенство двух отношений). Поэтому число Фидия Ф≈1,618 будем называть «***золотой константой***».

1.2. ***Гармоническое среднее*** n чисел – число h, определяемое из формулы $1/h=(1/n)*(1/x_1+\ldots+1/x_n)$ [1]. Гармоническое среднее h(a,b) двух чисел «a» и «b» равно h=2ab/(a+b) [1; 3]. Дадим геометрические определения гармонического среднего двух чисел (соответственно новое и известное):

1) Это удвоенная длина стороны квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами «a» и «b» таким образом, что квадрат и треугольник имеют общий угол;

2) Это длина отрезка прямой, проходящей параллельно основаниям трапеции «a» и «b» через точку пересечения диагоналей трапеции между ее боковыми сторонами.

Парадоксально, но до сих пор гармоническое среднее не использовалось в математике гармонии. Этот пробел мы пытаемся устранить в данной работе.

1.3. ***Гармоническая пропорция*** – обращающаяся в тождество при любых положительных значениях «a» и «b» пропорция, включающая гармоническое среднее h чисел «a» и «b», например: (a+b):b=b:(b–0,5h).

1.4. ***Рекурсия 2-го порядка, или гармоническое уравнение 2-го порядка*** – линейное однородное разностное (иначе – возвратное, или рекуррентное) уравнение с переменными коэффициентами вида $f_{n+2}=(h-d)f_{n+1}+0{,}5hdf_n$ или $f_{n+2}=(h+d)f_{n+1}-0{,}5hdf_n$ (где h – гармоническое среднее «a» и «b», d – разность d=b–a).

1.5. ***Возвратная последовательность 2-го порядка*** – рекурсия 2-го порядка с заданными начальными условиями $\mathbf{f_0}$ **и** $\mathbf{f_1}$. Каждой такой последовательности отвечает бесконечный рекуррентный ряд чисел, целых или дробных, действительных или комплексных. Например, рекурсии $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ отвечает ряд Фибоначчи (1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; … для единичных начальных условий $f_0=f_1=1$ или 0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; … для условий $f_0=0$; $f_1=1$).

1.6. ***Характеристическое уравнение рекурсии 2-го порядка*** – уравнение вида

$a^2=(h–d)a+0,5hd$ или $b^2=(h+d)b–0,5hd$, где «a» и «b» – аттракторы. Характеристическое уравнение однозначно связано с уравнением рекурсии. Переход от характеристического уравнения к разностному осуществляется путем формальной замены «a^2» на f_{n+2}, «a» на f_{n+1} и «1» на f_n.

1.7. ***Аттрактор*** рекурсии, или просто – аттрактор (от англ. attract – привлекать, притягивать) – таким коротким термином теперь всё чаще называют максимальный по модулю корень характеристического уравнения рекурсии. К значению этого корня в пределе (при $n\to\infty$) стремится, согласно теореме Бернулли**,** отношение последующего элемента к предыдущему элементу рекуррентного ряда чисел. В данной работе аттрактор равен либо «a», либо «b» (в зависимости от знаков в характеристическом уравнении: для аттрактора «b» знаки в правой части уравнения противоположны знакам в той же части уравнения с аттрактором «a»). Отметим, что ранее аттракторами называли только точки, к которым стремятся траектории развивающихся динамических систем.

1.8. ***Сечение*** – деление отрезка произвольной длины на две произвольные части «a» и «b», разность которых равна d=b–a. Одна из частей отрезка – «a» или «b» – становится ***аттрактором*** рекурсии.

1.9. ***Гармоническая последовательность, приведенная к аттрактору*** – рекурсия 2-го порядка с начальными условиями f_0 и f_1, равными двум последовательным целым степеням аттрактора (обычно $f_0=a^0=1$; $f_1=a^1=a$. Тогда рекуррентный ряд чисел – это геометрическая прогрессия 1, a, a^2, a^3, …, a^n).

1.10. ***Экстремальные виды сечения*** – это «***бисекция***» (a=b; d=b–a=0) и «***редукция***» (d=h; $b=(1+\sqrt{2})a$). Они преобразуют ***рекурсию 2-го порядка*** в простейшее уравнение 1-го порядка - уравнение геометрической прогрессии.

1.11. ***Гармоническое золотое сечение*** – деление отрезка произвольной длины на части «a» и «b=aФ», разность которых равна половине ***гармонического среднего*** чисел «a» и «b»: **d=**b–a=**0,5h**. Для гармонического золотого сечения соблюдается ***золотая пропорция***. Классическое золотое сечение – частный случай гармонического золотого сечения, для которого h=2; d=1; a=Ф.

1.12. ***Вероятностная рекурсия 2-го порядка*** – линейное однородное разностное **(**иначе **–** возвратное, или рекуррентное**)** уравнение с переменными коэффициентами, выраженными через вероятностные доли слагаемых: $\mathbf{f_{n+2}=p_1hf_{n+1}+p_2 0,5h^2f_n}$**,** где p_1 и p_2 – вероятностные доли слагаемых.

1.13. ***Вероятностное характеристическое уравнение рекурсии 2-го порядка*** – уравнение вида $\mathbf{a^2=p_1ha+p_2 0,5h^2}$, где $p_1=(h–d)/h=1–d/h$ и $p_2=d/h$ – вероятностные доли слагаемых или, иначе, их весовые коэффициенты.

1.14. ***Уравнение гармонического золотого сечения*** – линейное рекуррентное уравнение вида $\mathbf{f_{n+2}=0,5hf_{n+1}+(0,5h)^2f_n}$ (аттрактор «a») или вида $f_{n+2}=1,5hf_{n+1}–(0,5h)^2f_n$ (аттрактор «b>a»), где h - гармоническое среднее аттракторов «a» и «b». Уравнение гармонического золотого сечения мы получаем либо из ***вероятностной рекурсии 2-го порядка*** при d=0,5h и $p_1=p_2=0,5$, либо как среднее арифметическое рекурсий крайних режимов – ***бисекции*** и ***редукции***.

2. Постановка проблемы

Благодаря многим новым научным открытиям, основанным на золотом сечении, «золотая пропорция» рассматривается в настоящее время как главная пропорция мироздания, как некий универсальный Код Природы. Поэтому требуется глобальная переоценка роли золотого сечения [2].

В то же время золотое сечение остается величайшей загадкой природы [3].

Чрезвычайно актуальной стала задача исследования **причины** широкой распространенности золотого сечения в живой и неживой природе. Это прекрасно выразил А.И. Иванус: «…наука о золотом сечении только сейчас начинает свои первые шаги как наука. Трудами многих современных исследователей, во-первых, доказывается, что золотое сечение существует не только как эмпирический факт. Во-вторых, масштабы задачи, как оказалось, настолько велики, что официальной науке, вместо ироничного и предвзятого к ней отношения, полезней было бы… ринуться на решение проблем только-только нарождающегося действительно нового видения мира. …Самое главное здесь — это ответить «всего лишь» на один маленький вопрос: ПОЧЕМУ оно существует? Пока однозначного ответа нет» [4].

Действительно, экспериментальные данные показывают, что если две части целого (элементы системы) находятся в соотношении золотого сечения, то они обеспечивают структурно-функциональную целостность и устойчивость этого целого (системы) при взаимодействии с внешней средой [2]. Интуитивно золотое сечение уже давно связывают с системной устойчивостью и энтропией. Но строгого доказательства связи золотого сечения с устойчивостью и максимальной энтропией до сих пор не существовало. Почему? Да потому, что нельзя доказать исключительность золотого сечения в системном смысле, если (как ошибочно считалось) только такое сечение приводит к пропорциональности частей целого, если его невозможно сравнить с другим сечением, также обеспечивающим пропорциональность частей целого.

Основная **цель** данной работы: объяснить широчайшее распространение золотого сечения в природе, связав его с понятием энтропии. Но сначала поставим перед собой более узкую теоретическую задачу: исправить устоявшиеся веками добросовестные заблуждения в теории возвратных последовательностей. Вот эти заблуждения.

2.1. ***Первое*** заблуждение: деление на неравные части в произвольном отношении пропорцию не образует. В 19-м веке известный философ, поэт, естествоиспытатель, исследователь золотого сечения А. Цейзинг сформулировал закон гармонии: «Деление целого на неравные части пропорционально, когда отношение частей… даёт золотое сечение». Цейзинг не утверждал, что, если отношение частей не даёт золотого сечения, то деление целого на неравные части непропорционально. Тем не менее, с тех пор считается делом давно решённым: отрезок прямой AB можно разделить точкой C на две части только следующими тремя способами: на равные части, когда AB:AC=AB:BC (бисекция); на неравные части так, что AB:AC=AC:BC (золотое сечение); на неравные части в любом, произвольном отношении (такие неравные части **пропорцию не образуют**) [5].

Это заблуждение мешало развитию теории золотого сечения в приложении к системному синтезу. Однако, в 2010 году было доказано, что пропорция образуется и при делении целого на две части в произвольном отношении [6].

2.2. ***Второе*** заблуждение: построение сложной структуры может происходить только по двум **взаимоисключающим** правилам, а именно - либо по правилу Фибоначчи, либо по любому другому правилу. «Первое правило – по Фибоначчи – в процессе построения дает нам автоматически золотые пропорции между элементами, …свойства эмерджентности и резонанса проявляются в максимально полной мере. Если же процесс построения происходит по любому другому правилу, то проявления эмерджентности и резонанса будут проявляться в гораздо меньшей мере, что приведет к созданию менее совершенной конечной структуры» [7].

Построение сложной структуры из простых структур, целого из его частей в математике отражено в достаточно хорошо изученных возвратных последовательностях. Но, все же, почему не предположить, что правила сложения вовсе не взаимоисключающие, что есть только одно общее правило, и сложение «по правилу Фибоначчи» - его частный случай? Если такое «общее правило» было неизвестно, то это не значит, что такого правила нет в природе.

Какова же причина столь долгого поиска общего метода синтеза, для которого «сложение по-Фибоначчи» - лишь частный случай? Разве мало выдающихся исследователей работало в этой области науки? Причина – в традиционном подходе к анализу рекуррентных уравнений. Еще одно добросовестное заблуждение состоит в том, что коэффициенты рекуррентного и характеристического уравнений должны быть постоянными. Ученые – «золотоискатели» Шпинадель, Газале, Пелли, Якобстал, Капрафф, Татаренко, Фалкон, Плаза и другие применяли **постоянные коэффициенты**, не связывая эти коэффициенты с аттракторами рекурсии [8].

Если же в отдельных случаях некоторые выдающиеся математики использовали разностные уравнения с переменными коэффициентами, то эти коэффициенты зависели от порядкового номера «n» рекурсии (пример - континуанты). Такими линейными разностными уравнениями с **переменными коэффициентами** занимался Жак Ф.М. Бине (1786-1856), а его предшественником был Джеймс Стирлинг (1692-1770). Правда, Стирлинг еще в 1730 году назвал рекуррентные ряды рядами, возникающими при **делении** друг на друга целых рациональных **функций** [9]. Однако, несмотря на это, разностные уравнения с постоянными (или зависящими от «n») коэффициентами приводили ко мнению, что существует сложение «по-Фибоначчи» и «по другим законам». А это еще более укрепляло позицию сторонников применения постоянных коэффициентов в разностных уравнениях. Такая бесконечная «рекурсия» (или банальное зацикливание в исследованиях) и послужило причиной некоторого отставания теории «обычного золотого» сечения (с уравнениями 2-го порядка) от его бесчисленных практических приложений.

Таким образом, до настоящего времени между произвольным сечением целого на части «a» и «b» и рекуррентным уравнением не было однозначного соответствия. Никто не рассматривал части «a» и «b» ни как аттракторы характеристического и разностного уравнений, ни как аргументы функций, входящих в переменные коэффициенты этих уравнений. Отметим, что в данной работе таких функций две: это разность d=b–a (п. 1.1) и гармоническое среднее h(a,b) (п. 1.3). Интересно, что само название термина «**гармоническое** среднее» подсказывало возможность использования его в теоретическом исследовании золотого сечения, как неиссякаемого источника вселенской **гармонии**…

2.3. ***Третье*** заблуждение: геометрическая прогрессия – это только рекуррентное уравнение (возвратная последовательность) 1-го порядка вида $f_{n+1}=a*f_n$. Это показал, например, ещё в 1950 году А.И. Маркушевич [10, с. 6].

2.4. ***Четвертое*** заблуждение: рекуррентное уравнение золотого сечения 2-го порядка – это единственное уравнение вида $\mathbf{f_{n+2}=f_{n+1}+f_n}$, о чем можно прочитать в любой публикации, посвященной золотому сечению.

3. Устранение заблуждений

3.1. *Гармоническая пропорция для произвольного сечения*

О золотой пропорции сейчас пишут в школьных учебных пособиях и математических справочниках большинства стран мира. Обычно ее представляют в следующей форме:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}, \qquad (1)$$

где 0<a<b и оба отношения больше единицы: (a+b)/b=a/b+1>1; b/a>1.

Считается, что если отрезок длины a+b разделить на неравные части не по правилу (1), то составить пропорцию невозможно (п. 2.1).

Заменим в знаменателе правого отношения из (1) «меньшее» («a») на другую величину, тоже меньшую «b». Пусть это будет b–z, где 0<z<b:

$$a \Rightarrow b–z; \qquad \frac{a+b}{b}=\frac{b}{b-z}. \qquad (2)$$

Таким образом, мы ввели в пропорцию (1), кроме «a» и «b», третью величину «z», которая должна быть функцией первых двух. Найдем эту функцию, воспользовавшись основным свойством пропорции (произведение крайних членов равно произведению средних членов):

$$(a+b)(b–z)=b^2; \quad ab+b^2–az–bz=b^2; \quad z=\frac{ab}{a+b}. \qquad (3)$$

Следовательно, «z» равно отношению произведения чисел «a» и «b» к их сумме, то есть «z» равно половине гармонического среднего «большего» и «меньшего» (п. 1.2): z=0,5h(a,b)=0,5h. С учетом этого перепишем пропорцию (2):

$$\frac{a+b}{b}=\frac{b}{b-0{,}5h}. \qquad (4)$$

Назовем новую пропорцию (4) **гармонической**, так как в нее входит гармоническое среднее h. Отметим универсальность гармонической пропорции, которая справедлива при любых b≥a>0. Даже при бисекции (b=a) пропорция (4) превращается в тождество 2=2. А при **b–0,5h=a** пропорция (4) преобразуется в золотую пропорцию (1).

Обозначив разность между «большим» и «меньшим» через **d=b–a**, из сопоставления (4) и (1) сформулируем **основное условие гармонического золотого сечения**:

$$b–0{,}5h=a; \quad d=b–a; \quad \mathbf{d=0{,}5h}. \qquad (5)$$

Если разность между «большим» и «меньшим» равна половине гармонического среднего «большего» и «меньшего», то деление целого на «большее» и «меньшее» является золотым гармоническим. Гармоническому золотому сечению соответствует золотая пропорция.

Скрепы в обшивке корабля во времена Гомера называли гармониями. Без гармоний корабль разваливался на отдельные доски. Таким образом, гармоническое среднее выполняет роль «скрепы» и обеспечивает гармонию произвольной триады «целое, большее, меньшее». Без гармонического среднего такая триада не создает пропорцию и разваливается на отдельные, ничем не скрепленные части.

Пример 1. Пусть триада «меньшее; большее; гармоническое среднее» равна {a;b;h}={15;30;20}, где гармоническое среднее h=20 получено из равенства h=2ab/(a+b), приведенного в п. 1.2. Тогда из равенства (4) (a+b):b=b:(b–0,5h) следует обращающаяся в тождество **гармоническая** пропорция 45:30=30:(30–10)=1,5. Пусть триада «меньшее; большее; гармоническое среднее» равна $\{\Phi^{-1};1;\ 2\Phi^{-2}\}$ Тогда эти данные отвечают гармонической золотой пропорции: они обращают в тождество и **гармоническую** пропорцию (4), и **золотую** пропорцию (1) (a+b):b=b:a. Действительно, Ф:1≈1:(1–0,382)≈1:0,618≈Ф, так как здесь **d**≈0,382**=0,5h**; h≈0,764; b/a=Ф.

Таким образом, деление целого на две неравные части в произвольном отношении всегда образует **гармоническую** пропорцию (4). Новая пропорция справедлива для любых положительных ненулевых значений «меньшего» и «большего» («a» и «b»).

3.2. *Гармоническое разностное уравнение с переменными коэффициентами, зависящими от параметров сечения*

Параметров сечения должно быть два, т.к. мы пока рассматриваем уравнения не выше 2-го порядка. В качестве таких **параметров** используем гармоническое среднее h(a,b) из п. 1.2 и разность d=b–a из (5). Начальных условий для возвратных последовательностей 2-го порядка тоже должно быть два: f_0 и f_1.

Учтем основное свойство пропорции (произведение крайних членов равно произведению средних членов) и вместо «b» подставим в пропорцию (4) равенство b=a+d. Получим (a+b)(b–0,5h)=b^2; (2a+d)(a+d–0,5h)=$(a+d)^2$. После простейших преобразований приходим к квадратному (относительно «меньшего» «а») характеристическому уравнению и выражению для расчета аттрактора «а» (большего по модулю корня характеристического уравнения – п. 1.7):

$$a^2=(h-d)a+0{,}5hd, \quad a=\frac{h-d}{2}+\sqrt{\frac{(h-d)^2}{4}+0{,}5hd}\,. \qquad (6)$$

Если в пропорцию (4) вместо «а» подставить a=b–d, придем к характеристическому гармоническому уравнению, квадратному относительно «b», и к его большему по модулю корню (второму потенциальному аттрактору):

$$b^2=(h+d)b-0{,}5hd; \qquad b=\frac{h+d}{2}+\sqrt{\frac{(h+d)^2}{4}-0{,}5hd}\,. \qquad (7)$$

Сравнение (7) и (6) показывает, что смена аттрактора сопровождается лишь формальным изменением знаков перед разностью d в характеристическом уравнении.

Перейдем от характеристического уравнения к разностному. Этот переход осуществляется путем формальной замены «a^2» на f_{n+2}, «а» на f_{n+1} и «1» на f_n. На основе (6) и (8) представим **гармоническое уравнение 2-го порядка с аттрактором «а»**:

$$\mathbf{f_{n+2}=(h-d)f_{n+1}+0{,}5hdf_n}. \qquad (8)$$

Аналогично, на основе (7), представим **гармоническое уравнение 2-го порядка** для случая, когда **аттрактор равен «b»**:

$$\mathbf{f_{n+2}=(h+d)f_{n+1}-0{,}5hdf_n}\ . \qquad (9)$$

Пример 2. Пусть **h=2**, и, в соответствии с основным равенством **гармонического золотого сечения** (5), **d=0,5h=1**. Из (6) находим a=(1+√5)/2=Ф; b=a+d=Ф+1=$Ф^2$. Характеристическое уравнение (6) принимает вид $\mathbf{a^2=a+1}$, разностное уравнение (8): $\mathbf{f_{n+2}=f_{n+1}+f_n}$. Это **классические уравнения золотого сечения** с **аттрактором «а»**, так как именно при классическом золотом сечении имеем **h=2**. Для единичных начальных условий $f_0=f_1=1$ этим уравнениям соответствует рекуррентный ряд Фибоначчи **1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89;…** Отношение последующего члена ряда к предыдущему в пределе стремится к аттрактору a=Ф≈1,618.

Продолжим пример 2 переходом **к аттрактору «b»**, для чего те же значения **h=2, d=1** подставим в (9). Разностное уравнение принимает вид $\mathbf{f_{n+2}=3f_{n+1}-f_n}$, и для единичных начальных условий $f_0=f_1=1$ получаем «просеянный» ряд Фибоначчи **1; 1; 2; 5; 13; 34; 89; …** Здесь после $F_2=2$ элементы обычного ряда Фибоначчи идут через один. Элементы ряда Фибоначчи рассчитывают с помощью формулы Бине [3, с. 53]. Модифицированная **формула Бине** для n-го члена нашего «просеянного» ряда Фибоначчи выглядит так: $F_n=(Ф^{2n-1}+Ф^{-(2n-1)})/\sqrt{5}$. Например, $F_4=(Ф^7+Ф^{-7})/\sqrt{5}=13$; $F_5=(Ф^9+Ф^{-9})/\sqrt{5}=34$. Отношение последующего члена «просеянного» ряда к предыдущему стремится к аттрактору b=$Ф^2$≈2,618. В этом примере, безусловно, соблюдается **золотая** пропорция (a+b):b=b:a=Ф. Ведь a=Ф; b=$Ф^2$.

Пример 3. Заданы **h=2**, **d=0,5**. Из (6) определяем a≈1,78; b=a+d≈2,28. Характеристическое уравнение (6) – это a^2=(h–d)a+0,5hd=1,5a+0,5, разностное уравнение (8): $\mathbf{f_{n+2}=1{,}5f_{n+1}+0{,}5f_n}$. Для $f_0=f_1=1$ получаем **дробный** рекуррентный ряд **1; 1; 2; 3,5; 6,25; 11,125; 19,8125; …** Предел отношения элементов ряда равен a≈1,78. В этом примере соблюдается **гармоническая** пропорция (a+b):b=b:(b–0,5h)≈1,78.

Пример 4. Заданы a=Ф и b=1. Находим разность d=b–a=1–Ф, гармоническое среднее h=2ab/(a+b)=2/Ф, коэффициенты уравнения (8): h–d=Ф+2/Ф–1≈1,854; 0,5hd=1/Ф–1≈–0,382.

При начальных условиях $f_0=Ф^{-2}$, $f_1=Ф^{-1}$ получаем геометрическую прогрессию – рекуррентный ряд последовательных целых степеней золотой константы $Ф^{-2}$, $Ф^{-1}$, 1, Ф, $Ф^2$, $Ф^3$, … Здесь соблюдается **гармоническая** пропорция (a+b):b=b:(b–0,5h)=$Ф^2$.

Сделаем промежуточные выводы.

1) Обе части («a» и «b»), на которые делится отрезок произвольной длины при сечении, могут быть аттракторами. Чтобы сменить аттрактор, достаточно поменять знаки перед разностью аттракторов d в характеристическом уравнении.

2) Построение рекурсивной структуры происходит не по двум взаимоисключающим правилам [7], а по одному и тому же правилу, предписанному гармоническим уравнением 2-го порядка нового типа $\mathbf{f_{n+2}=(h–d)f_{n+1}+0,5hdf_n}$, частным случаем которого является классическое уравнение $\mathbf{f_{n+2}=f_{n+1}+f_n}$ Фибоначчи. Новое гармоническое уравнение – это разностное уравнение с переменными коэффициентами, зависящими от основных параметров сечения.

3.3. *Рекурсия 2-го порядка с аттрактором a≠1 генерирует геометрическую прогрессию, если ее начальные условия f_0 и f_1 – степени аттрактора*

А.И. Маркушевич утверждал [10, с. 6]: «…геометрическая прогрессия является возвратной последовательностью первого порядка. …арифметическая прогрессия является возвратной последовательностью второго порядка». Однако, Пример 4 показал, что, если начальные условия f_0 и f_1 приведены к целым последовательным степеням аттрактора, возвратная последовательность **2-го порядка** $f_{n+2}=1,854f_{n+1}–0,382f_n$ также генерирует геометрическую прогрессию.

Методом математической индукции **докажем**, что именно такие специфические начальные условия **всегда** преобразуют возвратную последовательность 2-го порядка в геометрическую прогрессию, если аттрактор последовательности не равен единице. Последняя оговорка относится к единственному случаю $f_{n+2}=2f_{n+1}–f_n$, генерирующему при $f_0=1$, $f_1=2$ **арифметическую** прогрессию – натуральный ряд чисел.

Из равенства (8) следует: $f_{n+2}=(h–d)f_{n+1}+(a^2–(h–d)a)f_n$. Примем $f_0=a^0=1$; $f_1=a^1=a$. Убедимся, что при **n=0** равенство $f_{n+2}=a^{n+2}$ справедливо:

$f_2=(h–d)f_1+(a^2–(h–d)a)f_0=(h–d)\ a+(a^2–(h–d)a)=a^2$.

Теперь докажем, что если выражение $f_{n+2}=a^{n+2}$ справедливо при **n=p** и **n=p+1**, то оно справедливо и при **n=p+2**. Действительно, если $f_p=a^p$ и $f_{p+1}=a^{p+1}$, то

$f_{p+2}=(h–d)f_{p+1}+(a^2–(h–d)a)f_p=(h–d)a^{p+1}+(a^2–(h–d)a)a^p=a^{p+2}$.

Следовательно, при начальных данных $f_0=a^0=1$; $f_1=a^1=a$, приведенных к последовательным целым степеням аттрактора, равенство $\mathbf{f_{n+2}=\boldsymbol{a}^{n+2}}$ **справедливо для любых натуральных n,** что и требовалось доказать.

Пример 5. Пусть h=√7+1, d=√7–1. Из (6) находим a=3; b=a+d=2+√7. Коэффициенты уравнений (6) и (8) равны: h–d=2; 0,5hd=3. Разностное уравнение (8) имеет вид: $\mathbf{f_{n+2}=2f_{n+1}+3f_n}$. Для $f_0=f_1=1$ получаем рекуррентный ряд чисел 1, 1, 5, 13, 41, … Предел отношения элементов ряда равен a=3. Но если принять начальные условия равными последовательным целым степеням аттрактора ($f_0=a^0=1$; $\mathbf{f_1=\boldsymbol{a}^1=3}$), – получаем **геометрическую прогрессию** 1, 3, 9, 27, 81, … с формулой n-того элемента $f_n=3^n$.

Уравнением геометрической прогрессии может быть любое рекуррентное уравнение 2-го порядка вида $\mathbf{f_{p+2}=(h–d)f_{p+1}+0,5hdf_p}$, кроме $\mathbf{f_{n+2}=2f_{n+1}–f_n}$, если начальные условия приведены к последовательным целым степеням аттрактора $\mathbf{a=g+(g^2+0,5hd)^{0,5}}$, где g=(h–d)/2.

Таким образом, уравнение геометрической прогрессии – это не только рекуррентное уравнение 1-го порядка f(n+1)=*a**f(n).

3.4. ***Уравнение гармонического золотого сечения 2-го порядка – это рекуррентное уравнение вида*** $f_{n+2}=0{,}5hf_{n+1}+(0{,}5h)^2f_n$ ***или*** $f_{n+2}=1{,}5hf_{n+1}-(0{,}5h)^2f_n$

Подставим основное условие гармонического золотого сечения (5) d=0,5h в гармоническое уравнение 2-го порядка (8) **с аттрактором «a»**:

$$f_{n+2}=(h-d)f_{n+1}+0{,}5hdf_n=(h-0{,}5h)f_{n+1}+(0{,}5h)^2f_n; \quad \mathbf{f_{n+2}=0{,}5hf_{n+1}+(0{,}5h)^2f_n}. \qquad (10)$$

Аналогично, подставим d=0,5h из (5) в гармоническое уравнение 2-го порядка (9) **с аттрактором «b»**:

$$f_{n+2}=(h+d)f_{n+1}-0{,}5hdf_n=(h+0{,}5h)f_{n+1}-(0{,}5h)^2f_n; \quad \mathbf{f_{n+2}=1{,}5hf_{n+1}-(0{,}5h)^2f_n}. \qquad (11)$$

Рекуррентные уравнения (10) и (11) – это **уравнения гармонического золотого сечения 2-го порядка.**

Подставив d=0,5h из (5) в выражения (6) и (7) для расчета аттракторов, получим, что для гармонического золотого сечения справедливы равенства:

$$\mathbf{d=0{,}5h}; \qquad \mathbf{a=0{,}5h\Phi}; \qquad \mathbf{b=0{,}5h\Phi^2}; \qquad \mathbf{b/a=\Phi}, \qquad (12)$$

то есть, **меньший аттрактор пропорционален половине гармонического среднего аттракторов и золотой константе, а больший аттрактор пропорционален половине гармонического среднего аттракторов и квадрату золотой константы**.

Отношение большего аттрактора к меньшему при гармоническом золотом сечении всегда равно золотой константе Ф.

Отсюда следует, что любой прямоугольный треугольник, у которого длина одного катета превышает длину другого катета в Ф≈1,618 раз, может быть назван **гармоническим золотым треугольником**.

Пример 6. Пусть **h=4**, и, в соответствии с (5), **d=0,5h=2**. Из (6) находим: a=2Ф≈3,236, $b=a+d=2\Phi^2\approx5{,}236$. Характеристическое гармоническое уравнение (6) принимает вид $\mathbf{a^2=2a+4}$, разностное уравнение (8): $\mathbf{f_{n+2}=2f_{n+1}+4f_n}$. Это **гармонические уравнения золотого сечения** с **аттрактором «a»**. Для единичных начальных условий $f_0=f_1=1$ получаем рекуррентный ряд **1; 1; 6; 16; 56; 176; 576; 1856; …**, отношение последующего члена ряда к предыдущему в пределе стремится к аттрактору a=2Ф≈3,236. Для начальных условий $f_0=1$; $f_1=$**a** получаем геометрическую прогрессию **1; a;** $\mathbf{a^2}$**;** $\mathbf{a^3}$**; …** Для значений a≈**3,236** и b ≈**5,236**, естественно, соблюдается **золотая** пропорция (a+b):b=b:a=Ф.

Продолжим пример 6 переходом **к аттрактору «b»**. Характеристическое гармоническое уравнение принимает вид $\mathbf{b^2=6b-4}$. Разностное уравнение (9) принимает вид $\mathbf{f_{n+2}=6f_{n+1}-4f_n}$. Это **гармонические уравнения золотого сечения** с **аттрактором «b»**. Для единичных начальных условий $f_0=f_1=1$ получаем рекуррентный ряд **1; 1; 2; 8; 40; 208; 1088; …** В пределе отношение последующего члена ряда к предыдущему стремится **к аттрактору b ≈5,236**. Для начальных условий $f_0=1$; $f_1=$**b** получаем геометрическую прогрессию **1; b;** $\mathbf{b^2}$**;** $\mathbf{b^3}$**; …** Значения a и b не изменились, поэтому **золотая** пропорция по-прежнему соблюдается.

Таким образом, рекуррентное уравнение **золотого** сечения 2-го порядка – это не только уравнение вида $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$. Золотой пропорции подчиняется любое сечение, которому соответствует равенство **b=aФ** из (12), т.к. в этом случае **d=0,5h**. Ведь если b=aФ, то d=a/Ф, h=2a/Ф, то есть, d=0,5h. Термин «**гармонические** уравнения золотого сечения», применимый к уравнениям типа $\mathbf{f_{n+2}=0{,}5hf_{n+1}+(0{,}5h)^2f_n}$ и $\mathbf{f_{n+2}=1{,}5hf_{n+1}-(0{,}5h)^2f_n}$, необходим лишь для того, чтобы отличать эти уравнения от классического золотого сечения: h=2; $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$.

Если считать золотым такое сечение, которое подчиняется золотой пропорции, то любому значению гармонического среднего h соответствует свое золотое сечение с разностью аттракторов $d=0,5h$ и соотношением аттракторов $b/a=Ф$.

4. Разгадка тайны природы: не эмерджентность, не резонанс, а энтропия

Возможно, в будущем будет доказано, что гармоническое золотое сечение от других сечений отличают и эмерджентность, и резонанс (см. п. 2.2). Но сейчас мы приближаемся к тому, чтобы доказать: не эмерджентность, не резонанс отличают гармоническое золотое сечение от других сечений, а, в первую очередь, **энтропия**.

4.1. *Вероятностная рекурсия 2-го порядка*

Итак, мы рассматриваем механизм слияния (синтеза) двух подсистем в систему, математической моделью которой является рекурсия 2-го порядка (8) или (9) с переменными коэффициентами, зависящими от h и d. При этом под левой частью уравнения подразумеваем арифметическую (а не алгебраическую) СУММУ. Тогда в правой части уравнений (8) и (9) стоят слагаемые, которые могут принимать любые, но только **неотрицательные** значения.

Чтобы исследовать, как h и d влияют на слагаемые в правой части уравнений (8) и (9), воспользуемся следующим приемом. **Гармоническое среднее h двух аттракторов будем считать постоянной величиной, а разность d — случайной переменной величиной**.

Итак, оба слагаемых в правой части уравнений положительны. Исходя из этого, запишем области определения переменной d для каждого из аттракторов. Для меньшего аттрактора «a»:

$0 \le d \le h.$ (13)

Для большего аттрактора «b»:

$-h \le d \le 0.$ (14)

Области определения разности d из (13) и (14) симметричны относительно нуля; с учетом этой симметрии уравнения (8) и (9) эквивалентны. Поэтому далее анализируем только уравнение (8): $\mathbf{f_{n+2}=(h-d)f_{n+1}+0,5hdf_n}$. Выводы справедливы для обоих аттракторов.

Приведем уравнение (8) **к вероятностному** виду. Для этого **сумму в правой его части умножим и разделим на аттрактор h**: $f_{n+2}=hf_{n+1}(h-d)/h+0,5h^2f_nd/h$. В технике часто используют такой прием для нормализации формальных выражений, поскольку нормированные соотношения легче поддаются анализу. Учтем, что $(h-d)/h=1-d/h$ и d/h – это **безразмерные выражения, сумма которых равна единице**. Следовательно, их можно рассматривать как **весовые коэффициенты** или как **вероятностные** доли слагаемых в их общей сумме. Тогда **вероятностная форма уравнения (8)** (включая характеристическое уравнение) будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{f_{n+2}=p_1(hf_{n+1})+p_2(0,5h^2f_n);\quad a^2=p_1ha+p_20,5h^2;\quad a^2=p_1ha+(1-p_1)0,5h^2}. \qquad (15)$$

где вероятности равны $\mathbf{p_1}=(h-d)/h=\mathbf{1-d/h}$ и $\mathbf{p_2=d/h}$.

Уравнение (15) в принципе отличается от уравнения (8) тем, что в нем произведена замена переменной. Место переменной d теперь заняла безразмерная **вероятность** p_1 (или p_2, т.к. $p_2=1-p_1$), функция переменного отношения **d/h**.

4.2. *Гармоническое золотое сечение обеспечивает максимум энтропии рекурсии*

Рассмотрим уравнение (15) $f_{n+2}=p_1(hf_{n+1})+p_2(0,5h^2f_n)$ $(a^2=p_1ha+p_20,5h^2)$ как сумму двух слагаемых, априорные вероятности p_1 и p_2 «участия» которых в синтезе переменны и выражены через отношение d/h. Проще всего представить себе, что сумма, представленная этой рекурсией, – это система сообщений, передаваемых с помощью алфавита из двух символов, например, с помощью азбуки Морзе. Допустим, **тире – это первое слагаемое $\mathbf{hf_{n+1}}$, точка – второе слагаемое $\mathbf{0,5h^2f_n}$**.

Если p_1=1, передаются только тире, поскольку p_2=0. Из такой передачи (одни тире) нельзя почерпнуть никакой информации. Хаос=0, в передаче полный Порядок, но такой Порядок не обеспечивает никакой информативности сообщений, энтропия (равная информации с обратным знаком) также будет нулевой.

Аналогичная ситуация будет при передаче одних только точек, когда p_2=1.

Известно, что наибольший Хаос, наибольшую информативность передачи и наибольшую энтропию ($H=H_{max}$) мы получим при равенстве вероятностей: $p_1=p_2=0{,}5$ [11, с.750]. Но ведь к равенству вероятностей $p_1=p_2=0{,}5$ приводит и основное условие (5) гармонического золотого сечения **d=0,5h**, из которого следует, что $d/h=0{,}5$, $p_1=p_2=0{,}5$.

Таким образом, **гармоническому золотому сечению соответствует максимум энтропии**! В принципе, на этом раскрытие еще одной тайны золотого сечения можно было бы и закончить. Но мы получили настолько важное заключение, что его следует проанализировать, понять физический смысл, научиться применять во множестве практических приложений. Например, мы должны ответить на вопрос: «Как считать энтропию различных рекурсий?».

Науке известны многие виды энтропии. Нас далее будет интересовать только ИНФОРМАЦИОННАЯ энтропия, которую иначе называют энтропией Шеннона. С 1948 г. энтропия H ансамбля событий (у нас – двух событий) рассчитывается по формуле Клода Шеннона (1916-2001):

$$\mathbf{H=H_1+H_2=-p_1\cdot\log p_1-p_2\cdot\log p_2=-p_1\cdot\log p_1-(1-p_1)\cdot\log(1-p_1)}, \qquad (16)$$

где H_1 и H_2 – соответственно энтропии 1-го и 2-го слагаемых.

Отметим сразу одну важную для нас особенность расчета **информационной энтропии**. Информационная энтропия – это мера неопределённости, непредсказуемости информации, выраженной случайными величинами. «Отец теории информации» Клод Шеннон предположил, что приращение информации равно утраченной неопределённости. Ему было безразлично, какой алфавит используется при передаче информации: английский, русский, азбука Морзе или другой. Символы любого алфавита К.Шеннон считал случайными величинами, и его интересовала лишь частота (вероятность) появления этих символов в сообщении. Выше, при выводе уравнения (15), элементы рекурсии считались случайными величинами. При этом мы могли бы даже не принимать во внимание, **какие элементы суммируются** в рекурсии. Для расчета энтропии нам достаточно знать отношение d/h, то есть знать, с какими вероятностями $p_2=d/h$ и $p_1=1-p_2$ элементы рекурсии представлены в сумме. Ведь в формулу Шеннона (16) **подставляются только значения вероятностей, сумма которых обязана быть равной единице**.

Итак, в случае равенства в (16) двух вероятностей $p_1=p_2=0{,}5$ имеем максимальную энтропию $H=-0{,}5\cdot\log_2 0{,}5-0{,}5\cdot\log_2 0{,}5=-\log_2 0{,}5=1$ бит/слагаемое. Это отражено на Рис. 1. Здесь по горизонтали отложены значения безразмерного аргумента – отношения $0\le d/h\le 1$ из уравнения (15), а по вертикали – безразмерные значения линейных функций вероятностей p_1 и p_2, нелинейных функций энтропии слагаемых H_1 и H_2 и суммарной энтропии H, нелинейной функции энтропийной избыточности $R`=(H_{max}-H)/H_{max}$, убывающей функции нормализованного аттрактора $a_0=a/h$.

Рис. 1. Вероятности p, энтропия H, её избыточность R\` и аттрактор a_0 сечений как функции отношения d/h

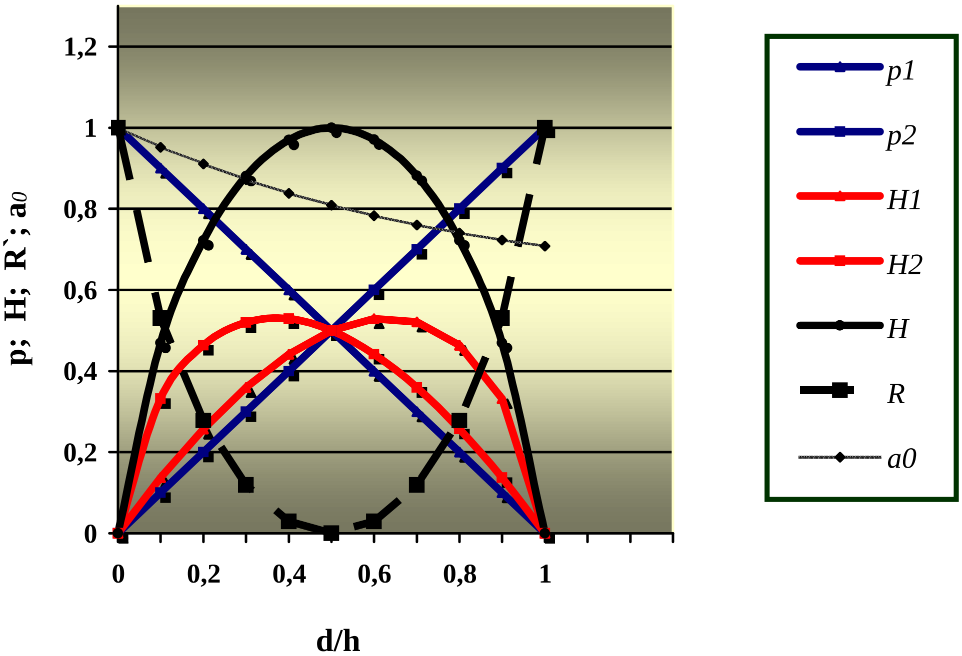

График суммарной энтропии H(d/h) может быть получен не только расчетным путем из соотношения (16), но и путем суммирования графиков частных энтропий слагаемых H_1(d/h) и H_2(d/h), у которых максимумы расположены симметрично относительно значения аргумента d/h=0,5. Кривая H(d/h) также симметрична относительно того же значения аргумента d/h=0,5.

Минимальному значению аргумента d/h=0 соответствуют режим бисекции (п. 1.10) и значения энтропии и её избыточности H=0, R\`=1. Максимальному значению d/h=1 соответствуют режим редукции (п. 1.10) и те же значения H=0, R\`=1. Чем меньше энтропийная избыточность 0≤R\`≤1, тем оптимальнее синтез системы. Нулевую избыточность R\`=0 имеем при d/h=0,5.

Энтропия максимальна при $p_1=p_2$, то есть при 1–d/h=d/h; d/h=0,5, или d=0,5h. **Гармоническому золотому сечению, которому соответствует равенство разности d аттракторов и половины их гармонического среднего 0,5h, отвечает максимальная хаотичность (максимальная энтропия H) процесса суммирования**. Это утверждение относится не только к случаю h=2 (классическое золотое сечение с рекуррентным уравнением $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$), но и к любому другому значению h=2d и уравнению (10) $f_{n+2}=(0,5h)f_{n+1}+(0,5h)^2f_n$.

Как известно, замкнутые (с оговорками – и открытые) системы стремятся к самоорганизации, то есть стремятся к устойчивому динамическому состоянию при максимальной энтропии системы [12]. Следовательно, **золотое сечение широко распространено в природе и творениях человека именно потому, что оно соответствует второму закону термодинамики, то есть, устойчивому динамическому состоянию систем**.

Таким образом, на основе вышеизложенного можно сформулировать «Закон элементарного синтеза»: **Система, синтезированная из двух элементов по закону рекурсии, обладает максимальной энтропией и динамической устойчивостью в случае, когда в качестве математической модели имеет разностное уравнение гармонического золотого сечения $f_{n+2}=(0,5h)f_{n+1}+(0,5h)^2f_n=\lambda f_{n+1}+\lambda^2 f_n$, то есть, когда коэффициент k характеристического уравнения рекурсии $a^2=\lambda a+k$ равен квадрату коэффициента λ: $k=\lambda^2$.**

Этот закон вполне соответствует закону гармонического развития систем Э.М. Сороко [13]. Заключение Э.М. Сороко «Любая система стремится к равномерному распределению всех возможных состояний» выше было уточнено для случая, когда моделью системы является рекурсия 2-го порядка.

Пример 7. Воспользуемся данными Примера 6. Рассматриваем то же гармоническое золотое сечение с **h=4**, **d=0,5h=2**, отличающееся от классического тем, что $h\neq 2$. Для любого золотого сечения (d=0,5h) имеем $p_1=p_2=0{,}5$. Энтропия равна $\mathbf{H=-0{,}5}\cdot\log_2$ **0,5–0,5**$\cdot\log_2$ **0,5=1**. Уравнение с аттрактором «а»: $f_{n+2}=(0{,}5h)f_{n+1}+(0{,}5h)^2f_n$, то есть $f_{n+2}=2f_{n+1}+4f_n$. Для единичных начальных условий $f_0=f_1=1$ генерируется рекуррентный ряд 1; 1; 6; 16; 56; 176; 576; 1856; …, отношение последующего члена ряда к предыдущему в пределе равно а≈3,236. А теперь рассчитаем значения элементов ряда не так, как в Примере 6, то есть, не подстановкой начальных условий в разностное уравнение (8), а с помощью вероятностного уравнения (15). Подставив в уравнение (15) начальные условия, получаем: $f_2=\mathbf{0{,}5}(4f_1)+\mathbf{0{,}5}(8f_0)=2+4=6$; $f_3=\mathbf{0{,}5}(4f_2)+\mathbf{0{,}5}(8f_1)=12+4=16$; $f_4=\mathbf{0{,}5}(4f_3)+\mathbf{0{,}5}(8f_2)=32+24=56$ и т.д. Получили **тот же рекуррентный ряд**, что и в Примере 6. При каждом сложении элементов hf_{n+1} и $0{,}5h^2f_n$ рекурсии учитывалась равновероятность этих значений (каждое слагаемое умножалось на коэффициент 0,5).

Пример 8. Воспользуемся некоторыми данными Примера 7. Пусть **h=4**, но **d=1,** то есть новые данные не отвечают золотому сечению**.** Меняется рекуррентное уравнение (8) $f_{n+2}=(h-d)f_{n+1}+0{,}5hdf_n$: $f_{n+2}=3f_{n+1}+2f_n$. Подставляя в него начальные условия $f_0=f_1=1$, получаем рекуррентный ряд 1; 1; 5; 17; 61; 217; 773; 2753; … А теперь рассчитаем ряд с помощью вероятностного уравнения (15) $f_{n+2}=p_1(hf_{n+1})+p_2(0{,}5h^2f_n)$. Здесь $p_2=d/h=0{,}25$; $p_1=1-p_2=0{,}75$. Подставляем в (15): $f_2=\mathbf{0{,}75}(4f_1)+\mathbf{0{,}25}(8f_0)=3+2=\mathbf{5}$; $f_3=\mathbf{0{,}75}(4f_2)+\mathbf{0{,}25}(8f_1)=15+2=\mathbf{17}$; $f_4=\mathbf{0{,}75}(4f_3)+\mathbf{0{,}25}(8f_2)=51+10=\mathbf{61}$; … Получили тот же рекуррентный ряд, что и рассчитанный с помощью уравнения (8). При каждом сложении элементов рекурсии hf_{n+1} и $0{,}5h^2f_n$ учитывались их весовые функции $\mathbf{p_1=0{,}75}$ и $\mathbf{p_2=0{,}25}$. Энтропия Н, рассчитанная по формуле (16) $H=-p_1\cdot\log_2 p_1-p_2\cdot\log_2 p_2$ с применением двоичных логарифмов, равна Н=**–0,75**$\cdot\log_2$ **0,75–0,25**$\cdot\log_2$ **0,25**=**0,811** бит/слагаемое. Таким образом, **результаты расчетов** элементов числового рекуррентного ряда как при золотом сечении, у которого энтропия максимальна (Н=1), так и при произвольном сечении (Н<1), **не зависят от того, каким уравнением мы пользуемся: параметрическим уравнением (8) с переменными коэффициентами или вероятностным уравнением (15) с коэффициентами p_1 и p_2.**

Пример 9. Произвольный отрезок имеет 9 единиц длины (размерности величин для упрощения не указываем). Произвольное сечение разделило отрезок на две части: a=3 и b=6 – потенциальные аттракторы. От них зависят основные параметры сечения: гармоническое среднее **h=2ab/(a+b)=4** и разность **d=b–a=3**. Меньшее a=3 и Большее b=6 в совокупности с гармоническим средним h=4 входят в гармоническую пропорцию (a+b):b=b:(b–0,5h). Действительно, (3+6):6=6:(6–0,5·4)=1,5.

Подставим h=4 и d=3 в разностное уравнение $f_{n+2}=(h-d)f_{n+1}+0{,}5hdf_n$: $f_{n+2}=f_{n+1}+6f_n$. Это уравнение превращается в возвратную последовательность, как только мы зададим $f_0=f_1=1$. Последовательность генерирует ряд чисел: 1; 1; 7; 13; 55; 133; 463; … Отношение последующего члена ряда к предыдущему в пределе стремится к значению аттрактора **a=3**. Если же привести начальные условия к последовательным степеням аттрактора ($f_0=a^0=1$, $f_1=a$), генерируется геометрическая прогрессия a^0; a; a^2; a^3; …, или 1; 3; 9; 27; …

Подставим h=4 и d=3 в разностное уравнение $f_{n+2}=(h+d)f_{n+1}-0{,}5hdf_n$ для аттрактора «b»: $f_{n+2}=7f_{n+1}-6f_n$. При $f_0=1$, $f_1=2$ последовательность генерирует ряд чисел: 1; 2; 8; 44; 260; 1556; … Отношение элементов ряда в пределе стремится к **b=6**. Если же $f_0=b^0=1$, $f_1=b$, генерируется геометрическая прогрессия 1; 6; 36; …, то есть b^0; b; b^2; b^3; …

Рассмотренное сечение не является золотым. Ведь $d/h=p_2=3/4=0{,}75$; $p_1=1-d/h=0{,}25$. Из (16) находим энтропию: $H=-p_1\cdot\log_2 p_1-p_2\cdot\log_2 p_2$=**–0,25**$\cdot\log_2$ **0,25–0,75**$\cdot\log_2$ **0,75**=**0,811.** Получено то же значение, что и в Примере 8. Почему? И в Примере 8, и в Примере 9 **h=4**. В Примере 8 имеем d=0,5h–1=**2**–1=1, в Примере 9 d=0,5h+1=**2**+1=3. Таким образом, в этих примерах значения переменного параметра d симметричны относительно «золотой середины» d=0,5h=**2**. Поэтому значения энтропии равны.

А теперь рассчитаем для того же Примера 9, на какие части следует разделить тот же отрезок длиной в 9 единиц, чтобы получить **золотое сечение**. Воспользовавшись полученными ранее соотношениями для золотого сечения, запишем: $a=0{,}5h\Phi$; $b=0{,}5h\Phi^2$; $a+b=9$; $0{,}5h(\Phi+\Phi^2)=0{,}5h\Phi^3=9$; $h=18/\Phi^3\approx4{,}249$; $d=0{,}5h\approx2{,}125$; $h–d\approx2{,}125$; $(0{,}5h)^2\approx4{,}514$; $a=0{,}5h\Phi\approx$**3,438**; $b=0{,}5h\Phi^2\approx$**5,562**.

Наш отрезок длиной в 9 единиц разделился на части $a\approx3{,}438$ и $b\approx5{,}562$ с разностью $d\approx2{,}125$ и гармоническим средним $h\approx4{,}249$. Этому гармоническому золотому сечению соответствует золотая пропорция $(a+b):b=b:a$, т.к. $9:5{,}562\approx5{,}562:3{,}438\approx\Phi$. Ему отвечает разностное уравнение $f_{n+2}=0{,}5hf_{n+1}+(0{,}5h)^2f_n$, то есть $f_{n+2}=2{,}125f_{n+1}+4{,}514f_n$. При $f_0=1$, $f_1=1$ генерируется ряд чисел: **1; 1; 6,638; 18,618; 69,523; 231,753**; …

Рассчитаем этот ряд с помощью вероятностного уравнения (15). Считаем, что гармоническое среднее не изменилось и равно $h\approx4{,}249$. Для золотого сечения имеем: $d/h=2{,}125/4{,}249=0{,}5$, вероятности $p_1=1–d/h=0{,}5$; $p_2=d/h=0{,}5$. Естественно, из (16) получаем энтропию **H=1**. При $f_0=f_1=1$ находим: $f_2\approx\mathbf{0{,}5}(4{,}249f_1)+\mathbf{0{,}5}(9{,}028f_0)\approx6{,}638$; $f_3\approx\mathbf{0{,}5}(4{,}249f_2)+\mathbf{0{,}5}(9{,}028f_1)\approx18{,}618$; $f_4\approx\mathbf{0{,}5}(4{,}249f_3)+\mathbf{0{,}5}(9{,}028f_2)\approx69{,}523$; … Получили тот же рекуррентный ряд **1; 1; 6,638; 18,618; 69,523**; … Но при каждом сложении слагаемых рекурсии hf_{n+1} и $0{,}5h^2f_n$ учитывались их равные весовые коэффициенты, каждое слагаемое умножалось на коэффициент **0,5**.

Последний дробный ряд, рассчитанный двумя вариантами, по праву можно называть гармоническим **золотым** рядом. Ведь золотая пропорция $(a+b):b=b:a$ здесь соблюдается; отношение последующего члена ряда к предыдущему в пределе стремится к значению аттрактора $a=3{,}438$, а этот **аттрактор пропорционален золотой константе**: $a=0{,}5h\Phi$. Если принять $f_0=1$, $f_1=a$, генерируется геометрическая прогрессия a^0; a; a^2; a^3; …

Чтобы сменить аттрактор «a» на аттрактор «b», нужно перейти к разностному уравнению $f_{n+2}=1{,}5hf_{n+1}–(0{,}5h)^2f_n$, которое при $f_0=1$, $f_1=b$ генерирует геометрическую прогрессию b^0; b; b^2; b^3; … Аттрактор «b» в Ф раз больше аттрактора «a».

Пример 10. Инвестиции, планируемые для вложения в новое производство в течение первых четырех месяцев, равны (в миллионах условных единиц): $f_0=$**1**; $f_1=$**3**; $f_2=$**5,40**; $f_3=$**11,16**. Определим, является ли оптимальной такая инвестиционная политика и, если не является, предложим другой инвестиционный план.

Дважды подставим наши данные в разностное уравнение (8) $f_{n+2}=(h–d)f_{n+1}+0{,}5hdf_n$:

$5{,}40 = (h–d)\cdot3 + 0{,}5hd\cdot1;$

$11{,}16 = (h–d)\cdot5{,}40 + 0{,}5hd\cdot3.$

Решив полученную систему из двух уравнений с двумя неизвестными, находим значения основных параметров рекурсии $h=2{,}4$; $d=1$. Следовательно, инвестиционная система подчиняется разностному уравнению $\mathbf{f_{n+2}}=(h–d)f_{n+1}+0{,}5hdf_n=\mathbf{1{,}4f_{n+1}+1{,}2f_n}$ и характеристическому уравнению $a^2=1{,}4a+1{,}2$. При информационном подходе для определения энтропии достаточно знать значение отношения d/h. Здесь $d/h=p_2=1/2{,}4=0{,}41(6)$; $p_1=1–d/h=0{,}58(3)$. Согласно (16), энтропия $\mathbf{H}=–0{,}58(3)\cdot\log_2 0{,}58(3)–0{,}41(6)\cdot\log_2 0{,}41(6)\approx\mathbf{0{,}98}$. Это хороший, но не самый лучший вариант.

Чтобы инвестиционный план соответствовал гармоническому золотому сечению, внесем в него изменения. Пусть общая тенденция роста инвестиций сохраняется. Тогда аттрактор $a=0{,}7+(0{,}49+1{,}2)^{0{,}5}=2$ – наибольший по модулю корень уравнения $a^2=1{,}4a+1{,}2$ – оставим неизменным. Пусть также останутся прежними и значения инвестиций в первые два месяца: $f_0=$**1**; $f_1=$**3**. Разностное уравнение гармонического золотого сечения (10) представим в виде $f_{n+2}=\lambda f_{n+1}+\lambda^2f_n$. В характеристическое уравнение $a^2=\lambda a+\lambda^2$ подставим **a=2** и найдем из полученного уравнения $\lambda^2+2\lambda–4=0$ значение $\boldsymbol{\lambda}\approx$**1,236**. Следовательно, разностное уравнение гармонического золотого сечения (10) в числовом виде для данного примера выглядит так: $\mathbf{f_{n+2}=1{,}236f_{n+1}+1{,}5279f_n}$. Вот соответствующий этой рекурсии «золотой» рекуррентный ряд инвестиций: $f_0=$**1;** $f_1=$**3;** $f_2=$**5,236;** $f_3=$**11,05;** $f_4=$**21,66; …** Этому скорректированному ряду отвечает значение энтропии **H=1**, так как $d/h=p_1=p_2=0{,}5$. Новый инвестиционный план наиболее устойчив и жизнеспособен.

Пример 11. Изучая изменение физической величины во времени, экспериментатор получил значения, соответствующие арифметической прогрессии: f_0=**1**; f_1=**3**; f_2=**5**; f_3=**7**. Могут ли такие значения соответствовать рекурсии? Можно ли для них рассчитать энтропию? Дважды подставим данные в разностное уравнение (8) $f_{n+2}=(h–d)f_{n+1}+0{,}5hdf_n$:

$7 = (h–d) \cdot 5 + 0{,}5hd \cdot 3;$

$5 = (h–d) \cdot 3 + 0{,}5hd \cdot 1.$

Решив полученную систему из двух уравнений с двумя неизвестными, находим значения основных параметров рекурсии: h=1,972; d=1,4. Тогда h–d=1,572; 0,5hd=1,3804. Следовательно, экспериментальные данные подчиняются рекурсии $\mathbf{f_{n+2}=1{,}572f_{n+1}+1{,}3804f_n}$ с характеристическим уравнением $a^2=1{,}572a+1{,}3804$. При информационном подходе для определения энтропии достаточно знать лишь отношение d/h: $d/h=p_2=1{,}4/1{,}972\approx0{,}71$; $p_1=1–d/h\approx0{,}29$. Согласно (16), энтропия равна $H\approx–0{,}29\cdot\log_2 0{,}29–0{,}71\cdot\log_2 0{,}71\approx$**0,868.**

Пример 12. Пусть экспериментальные данные соответствуют геометрической прогрессии: f_0=**1**; f_1=**3**; f_2=**9**; f_3=2**7**. Могут ли такие значения соответствовать рекурсии 2-го порядка? Дважды подставим данные в разностное уравнение (8) $f_{n+2}=(h–d)f_{n+1}+0{,}5hdf_n$:

$27 = (h–d) \cdot 9 + 0{,}5hd \cdot 3;$

$9 = (h–d) \cdot 3 + 0{,}5hd \cdot 1.$

Разделив первое равенство на 3, убеждаемся, что получили не систему уравнений, а одно уравнение с двумя неизвестными, которому соответствует бесконечное множество пар значений h и d. Таким образом, задача неоднозначна. Заданные значения геометрической прогрессии, не несущие никакой неопределенности, соответствуют либо любой рекурсии 2-го порядка с аттрактором a=3 и с приведенными к аттрактору начальными условиями, либо рекурсии 1-го порядка. Поэтому энтропия H=0.

Еще раз вернемся к разностному уравнению (15). Ему отвечает характеристическое уравнение $a^2=(1–d/h)ha+(d/h)0{,}5h^2$. Найдем его **частный случай**: подставим в него значение гармонического среднего **h=2** для классического золотого сечения. Считаем разность d (точнее – отношение d/h) переменной величиной. **Вероятностный вариант характеристического уравнения классического золотого сечения**, который нам пригодится в дальнейшем изложении, представим следующим образом:

$$\mathbf{a^2 = a\,\lambda + k}, \text{ где } \quad \boldsymbol{\lambda = 2(1–d/h);\ \ k = 2(d/h).} \qquad (17)$$

Из (17) следует, что сумма простых функций λ и k отношения d/h разности аттракторов к их гармоническому среднему здесь должна равняться двойке: $\lambda+k=2(1–d/h)+2(d/h)=2$. Применим требование **λ+k=2** к уравнению гармонического золотого сечения (10) $f_{n+2}=0{,}5hf_{n+1}+(0{,}5h)^2f_n$. Тогда $\lambda=0{,}5h$; $k=(0{,}5h)^2$, и $0{,}5h+(0{,}5h)^2=2$. Положительный корень такого квадратного уравнения, как и следовало ожидать, равен **h=2**.

Таким образом, **возможности применения уравнения (17) ограничены двумя взаимозависимыми требованиями: λ+k=2 и h=2, то есть и сумма коэффициентов характеристического уравнения, и гармоническое среднее аттракторов должны равняться двум**.

4.3. ***Любая монета имеет две стороны (англ.–There are two sides to every question), или экстремальные виды сечения – это «бисекция» и «редукция»***

Для области определения (13) $0\le d\le h$ существуют такие значения нашей переменной d/h, которым соответствует нулевое значение одного из слагаемых рекурсии. Это крайние значения d/h=0 и d/h=1, при которых редукция 2-го порядка трансформируется в редукцию 1-го порядка. Мы назвали такой режим, при котором d=b–a=0, **бисекцией** (равновеликой дихотомией), а режим, при котором d=h, **редукцией.**

Пусть $f_{n+2}(d/h)$ – это обозначение рекурсии при определенном значении аргумента d/h. Тогда обозначения $f_{n+2}(0)$, $f_{n+2}(1)$ и $f_{n+2}(0,5)$ отвечают соответственно режимам бисекции, редукции и гармонического золотого сечения. Из равенства (8) находим $f_{n+2}(0)=hf_{n+1}$ и $f_{n+2}(1)=0,5h^2f_n$. Нетрудно заметить, что

$$\mathbf{f_{n+2}}(0,5)=0,5(f_{n+2}(0)+f_{n+2}(1))\mathbf{=0,5hf_{n+1}+0,5\cdot 0,5h^2f_n}.$$

Последнее равенство – это знакомое нам уравнение гармонического золотого сечения (10).

Таким образом, **уравнение гармонического золотого сечения (10) – это среднее арифметическое рекурсий крайних режимов – бисекции и редукции**!

Уточним некоторые параметры крайних режимов. При бисекции – делении целого на две равные части a=b – согласно (8) имеем: $f_{n+2}(0)=hf_{n+1}=af_{n+1}$; $a(0)=h$. А из равенства (15) при d=0 следует, что $p_1=1$; $p_2=0$.

При редукции (d=h) из равенства (8) следует: $f_{n+2}(1)=0,5h^2f_n=a^2f_n$; $0,5h^2=a^2$; $a(1)=h/\sqrt{2}$; $b=a+d=(1+\sqrt{2})a$. Из равенства (15) при d=h имеем $p_1=0$; $p_2=1$. При этом режиме рекурсия 2-го порядка преобразуется в рекурсию 1-го порядка $f_{n+2}=0,5h^2f_n$, где $h=a\sqrt{2}$.

Итак, **экстремальные виды сечения** – «бисекция» (a=b; d=b–a=0) и «редукция» (d=h; $b=(1+\sqrt{2})a$) – **снижают порядок гармонического уравнения** со 2-го на 1-й. В режимах бисекции и редукции сумма вырождается в единственное слагаемое (hf_{n+1} или $0,5h^2f_n$), представляющее собой произведение постоянной (определяющей масштаб и не зависящей от переменной d) величины на текущий элемент рекуррентного ряда. Числовой ряд (геометрическая прогрессия) в этих крайних режимах не имеет аддитивных свойств: **аддитивные свойства уступили место мультипликативным**. Масштабный множитель постоянен, поэтому в этих режимах нет никакого беспорядка. Говоря языком физиков, здесь нет Хаоса, здесь царит полнейший Порядок. Можно выразиться и языком лириков: масштабирование без каких-либо изменений – это статические изменения, это копирование, здесь отсутствует динамика, нет никакого развития.

Каждое из слагаемых без участия другого приносит Порядок. И только при участии обоих слагаемых, когда $0<p_1<1$, $p_2=1-p_1\neq 0$, наступает некоторый Хаос. Ведь нужно сочетать оба слагаемых, а они зачастую в чем-то **противоречат**. Но Хаос и противоречия необходимы для движения в Будущее. Жизнь невозможна ни при полном Порядке, ни при полном Хаосе.

Таким образом, мерой Хаоса в нашей вероятностной рекурсии являются аддитивные свойства слагаемых. Бисекция и редукция не создают Хаоса, им свойственен лишь абсолютный Порядок. Хаос есть только при наличии суммы двух слагаемых, принимающих случайные значения.

Благодаря уравнению (15) стало ясно, что для перехода к вероятностной и «золотой» форме уравнений могут быть использованы экстремальные виды сечения с «крайними» значениями (0 и h) переменной d из области существования $0\leq d\leq h$. Ведь гармоническому золотому сечению соответствует как раз арифметическое **среднее значение** переменной: $d=(0+h)/2=0,5h$. Существует строгая симметрия уравнений (8) и (15) относительно значения переменной **d=0,5h**.

Итак, гармоническое золотое сечение находится точно посредине между крайними, экстремальными видами сечения. Не зря в древнем Риме говорили: "Сила и доблесть – между крайностями".

4.4. *О двойственности аддитивных и мультипликативных свойств*

Гармоническое уравнение (8) $f_{n+2}=(h-d)f_{n+1}+0,5hdf_n$ генерирует бесконечный числовой ряд, который может представлять собой арифметическую или геометрическую прогрессию, а также может обладать свойствами обеих прогрессий. Действительно, если h–d=2; 0,5hd= –1; $f_0=1$; $f_1=2$ – генерируется арифметическая прогрессия – натуральный ряд чисел. При начальных данных $f_0=a^0=1$; $f_1=a^1=a$, приведенных к последовательным целым степеням аттрактора, генерируется геометрическая прогрессия a^0, a^1, a^2, …a^n. Если ряд обладает свойствами обеих прогрессий, то **в начале ряда преобладают аддитивные свойства, а в конце ряда – мультипликативные**. При этом в начале ряда наблюдаются существенные колебания вокруг тех значений, которые соответствовали бы геометрической прогрессии.

Именно золотое сечение обеспечивает равновесие аддитивных и мультипликативных свойств. Проанализируем это на примере ряда Фибоначчи. Вот первые элементы ряда: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Разность между значениями 3-го и 2-го, а также 4-го и 3-го элементов ряда равна 1, то есть сначала ряд ведет себя как строгая арифметическая прогрессия. Затем приращения соседних значений равны самим элементам ряда 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Поэтому чем дальше от начала ряда, тем меньше он соответствует арифметической прогрессии.

И наоборот: отношения значений 3-го и 2-го, 4-го и 3-го элементов ряда соответственно равны 2 и 1,5, то есть далеки от Ф=1.618. Но затем отношения соседних значений 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, ... всё меньше отличаются от Ф. И чем дальше от начала ряда, тем больше ряд соответствует геометрической прогрессии со знаменателем Ф.

Итак, **чем сильнее аддитивные свойства, тем слабее мультипликативные**. И наоборот: чем сильнее мультипликативные свойства, тем слабее аддитивные. Но и те, и другие свойства присущи ряду Фибоначчи. Эти свойства постоянно противоборствуют друг с другом. В крайних режимах (бисекции и редукции) побеждают мультипликативные свойства. Сумма здесь превращается в одночлен, равный произведению постоянного множителя на текущий член ряда. Но такая полная «победа» Порядка над Хаосом возможна лишь в двух точках: $d=0$ и $d=h$, то есть на границах диапазона изменения переменной $0 \leq d \leq h$.

При любых других значениях d исследуемое рекуррентное уравнение не снижает своего порядка, то есть остается биномом. Это не значит, что аддитивные свойства полностью побеждают. Всё зависит от начальных условий. Выше было показано, что любая возвратная последовательность 2-го порядка с аттрактором $a \neq 1$ способна генерировать геометрическую прогрессию, если начальные условия приведены к степеням аттрактора. Кроме того, при любых начальных условиях последующий член ряда в пределе стремится быть равным предыдущему, умноженному на аттрактор. Значит, мультипликативные свойства, соответствующие Порядку, в рекуррентных последовательностях неистребимы.

Что касается аддитивных свойств, символизирующих Хаос, то, как было показано выше, эти свойства наибольшим образом проявляют себя в средней, «золотой» точке диапазона изменения переменной, то есть при $d=0{,}5h$. Здесь участие слагаемых в сумме равновероятно, Хаос максимален, и он «на равных правах» конкурирует с Порядком. Равенство $d=0{,}5h$ определяет гармоническое золотое сечение, а его частный случай ($h=2$, $d=1$) известен как классическое золотое сечение.

Такой подход, когда **мерой Хаоса считаются аддитивные свойства**, позволяет не считаться с начальными условиями. Ведь **если мерой Хаоса выбрать колебания отношения последующего члена ряда к предыдущему** (как иногда и принято делать), то при начальных условиях, приведенных к степеням аттрактора, этих колебаний вообще не будет, и **последует ложный вывод: Хаос=0.**

Наибольший Хаос (наиболее проявленные аддитивные свойства обоих слагаемых) получаем при $p_1=p_2=0{,}5$. Здесь мы имеем и наибольшую информацию. И только в этом случае рекурсия динамически устойчива. Закон самоорганизации любых замкнутых систем отвечает второму закону термодинамики: в процессе развития системы вероятности p_1 и p_2 стремятся к значению 0,5, и, достигнув этого состояния, остаются постоянными. Иначе говоря, согласно второму закону термодинамики, энтропия системы монотонно возрастает до установления равновесного состояния. Напомним, что второй закон термодинамики был открыт Р. Клаузиусом (1865г.) и статистически обоснован Л. Больцманом (1870-е годы).

… Красивое лицо особенно привлекает внимание, если к его строгим чертам Природа добавила едва уловимую асимметрию, живинку. Потому что в любом Порядке желательна доля Хаоса. И не зря русская пословица гласит: «Мешай дело с бездельем, проживешь век с весельем».

5. Примеры, подтверждающие «энтропийную закономерность» золотого сечения

5.1. ***Психологические опыты Владимира Лефевра***

Мы очень привыкли к мысли, что, подбрасывая многократно монету, неизбежно получим в 50% случаях «герб», а в 50% - «решку». Американский психолог Владимир Лефевр задумался: а можно ли эту уверенность перенести в психологию? Для этого он провел следующий эксперимент. Испытуемым предлагалось разделить кучу фасолей на две кучки. В первой из них должны находиться «хорошие» фасоли, а во второй - «плохие», причем все фасоли очень похожи друг на друга, и никаких объективных критериев для разделения вроде бы не было. Казалось бы, в этой ситуации испытуемые должны были бы разделить фасоли примерно поровну. Реальный результат разрушил все ожидания: число «хороших» фасолей устойчиво составляло 62% (0,62) от общего числа фасолей. Но ведь 62% – это «золотое сечение» (ЗС) от 100%! Результат эксперимента удивителен: испытуемые делили фасоли на две кучки, числа фасолей в которых находятся в золотой пропорции! «Энтропийная закономерность» ЗС дает объяснение опытам Лефевра. Золотая пропорция соответствует максимальной энтропии, следовательно, она наиболее информативна и устойчива. Подсознательно испытуемые стремились к максимальной информативности и устойчивости результата.

5.2. ***Волны Эллиотта.***

Суть *Закона волн*, открытого американским бухгалтером Ральфом Эллиоттом (1871-1948), основывается на том, что поведение общества или толпы развивается и изменяется в виде распознаваемых моделей. В качестве основного объекта применения своего открытия Эллиотт выбрал фондовый рынок. Он показал, что постоянно меняющаяся траектория цен фондового рынка образуют некоторый структурированный рисунок, который отражает гармонию «золотого сечения», найденную в природе. Эллиотт писал: *«Законы Природы» охватывают наиболее важный из всех элементов, синхронизацию. Законы Природы - не система, или метод игры рынка, но это - явление, которое появляется, чтобы отметить прогресс всей человеческой деятельности. Его приложение к прогнозированию носит революционный характер»*.

Открытия Эллиотта основываются на законах природы. Он замечает: *«Этот закон за пределами рынка может быть обнаружен только тогда, когда рынок просматривается в его подходящем освещении и затем анализируется на основе этого подхода. Выражаясь просто, фондовый рынок - создание человека и поэтому он отражает все странности человеческого поведения»*.

И еще одно его замечательное высказывание: *«Все человеческие действия имеют три особенности, модель, время и отношение, все они подчиняются числам Фибоначчи»*.

Почему фондовый рынок подчиняется закономерности «золотого сечения»? Объяснение этому дает «энтропийный подход к золотому сечению».

5.3. ***Фибоначчиевые резонансы генетического кода.***

В 1990 г. французский исследователь Jean-Claude Perez сделал весьма неожиданное открытие в области генетического кодирования. Он открыл математический закон, управляющий самоорганизацией азотистых оснований *T, C, A, G* внутри ДНК. Он обнаружил, что последовательные множества нуклеотидов ДНК организованы в структуры дальнего порядка, называемые *РЕЗОНАНСАМИ*. *Резонанс* представляет собой особую пропорцию, обеспечивающую разделение ДНК в соответствии с числами Фибоначчи (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …).

Ключевая идея открытия Jean-Claude Perez, названного *ДНК SUPRA-кодом*, состоит в следующем. Рассмотрим любой отрезок генетического кода, состоящий из базисов типа *T, C, A, G*, и пусть длина этого отрезка равна числу Фибоначчи, например, 144. Если число оснований типа *T* в рассматриваемом отрезке ДНК равно 55 (число Фибоначчи) и суммарное число оснований типа *A, C* и *G* равно 89 (число Фибоначчи), то рассматриваемый отрезок генетического кода образует *резонанс*, то есть, *резонанс* есть пропорция между тремя соседними числами Фибоначчи (55-89-

144). Открытие состоит в том, что каждая ДНК образует множество *резонансов* рассмотренного вида, то есть, как правило, отрезки генетического кода длиной, равной числу Фибоначчи F_n, разбиваются золотым сечением на множество оснований типа T (число которых в рассматриваемом отрезке генетического кода равно F_{n-2}) и суммарное множество остальных оснований (число которых равно F_{n-1}). Если произвести систематическое исследование всех возможных «фибоначчиевых» отрезков генетического кода, тогда получим некоторое множество *резонансов*, называемое *SUPRA-кодом ДНК*.

Несомненно, что рассматриваемое открытие относится к разряду выдающихся в области ДНК, определяющих развитие генной инженерии. По мнению автора открытия Jean-Clode Perez, **SUPRA-код ДНК является универсальным био-математическим законом, который указывает на высочайший уровень самоорганизации нуклеотидов в ДНК согласно принципу «золотого сечения».**

«Энтропийный подход» и здесь объясняет, почему самоорганизация нуклеотидов в ДНК приводит к «золотому сечению».

5.4. *Сердечная деятельность млекопитающих (исследования В.Д. Цветкова)*

Равномерно бьется сердце человека - около 60 ударов в минуту в состоянии покоя. Сердце, как поршень, сжимает, а затем выталкивает кровь и гонит ее по телу. Давление крови изменяется в процессе работы сердца. Наибольшей величины оно достигает в левом желудочке сердца в момент его сжатия (систолы). В артериях во время систолы желудочков сердца кровяное давление достигает максимальной величины, равной 115-125 мм ртутного столбца у молодого, здорового человека. В момент расслабления сердечной мышцы (диастола) давление уменьшается до 70-80 мм рт. ст. Отношение максимального (систолического) к минимальному (диастолическому) давлению равно в среднем 1,6, то есть близко к золотой пропорции. Случайное ли это совпадение или закономерное, отражающее гармоническую организацию сердечной деятельности?

Работа сердца обусловлена законами самоорганизации биологических систем. А так как золотая пропорция является одним из критериев самоорганизации в живой природе, естественно было предположить, что и в работе сердца возможно проявление этого критерия. Эта гипотеза и лежит в основе исследований сердечной деятельности млекопитающих, в течение многих лет проводимых русским биологом В.Д. Цветковым.

О деятельности сердца судят по электрокардиограмме (Рис. 2) - кривой, отражающей различные циклы работы сердца. На кардиограмме сердца выделяется два участка различной длительности, соответствующие систолической (T) и диастолической (F) деятельности сердца. В.Д. Цветков установил, что у человека и у других млекопитающих имеется оптимальная ("золотая") частота сердцебиения, при которой длительности систолы, диастолы и полного сердечного цикла (T) соотносятся в пропорции золотого сечения. Далее В. Д. Цветков установил, что если взять за единицу среднее давление крови в аорте, то систолическое давление крови в аорте составляет 0,382, а диастолическое - 0,618, то есть их отношение соответствует золотой пропорции. Это означает, что работа сердца в отношении временных циклов и изменения давления крови оптимизированы по одному и тому же принципу - закону золотой пропорции.

Рис. 2. Электрокардиограмма

По мнению В.Д. Цветкова, организация сердечного цикла в соответствии с золотой пропорцией является результатом длительной эволюции млекопитающих, эволюции в направлении оптимизации структуры и функций, обеспечения жизнедеятельности при минимальных затратах энергии и "живого строительного материала".

В исследованиях Цветкова также проявляются выводы «энтропийного подхода» к золотому сечению.

5.5. *Ритмы мозга*

Но не только деятельность сердца человека, но и деятельность мозга также подчиняется закону золотой пропорции. И этот факт был обнаружен русскими физиологами Соколовыми.

Мозг человека представляет собой сложнейшую самонастраивающуюся систему, основным назначением которой является регуляция деятельности различных органов человеческого тела, осуществления связи человека с окружающей средой. Конфигурации нейронных сетей представляют собой колебательные электрические сети. Различным состояниям мозга соответствуют электрические колебания с различными частотами, которые можно обнаружить на электроэнцефаллограммах мозга. Многочисленные исследования показали, что в мозгу здорового человека при различных его состояниях преобладают электрические колебания определенных частот. Изменение активации мозга происходит не непрерывно, а только дискретно, скачками, от одного уровня к другому. Каждому состоянию мозга соответствуют свои специфические волны электрических колебаний.

Состоянию покоя отвечает наиболее устойчивый α-ритм с частотами колебаний преимущественно от 8 до 13 герц. Умственной работе соответствует так называемый β-ритм с граничными частотами 14-35 герц; наиболее медленные колебания с частотой 0,5 - 4 Гц характерны для Δ-ритма, который соответствует состоянию глубокого сна. Наконец при появлении ощущения неприятности или опасности в мозгу доминирует Θ-ритм с частотами от 4 до 7 Гц.

Кроме значений граничных частот электрических колебаний мозга различных ритмов, они характеризуются и другими величинами. Одной из таких характеристик является среднее геометрическое значение крайних частот, определяемое по формуле $f = \sqrt{f_1 f_2}$, где f_1, f_2 - крайние (граничные) частоты колебаний. Средняя геометрическая частота делит диапазон частот любой волны мозга на высокочастотную и низкочастотную области. Отношение этих полос есть постоянная величина для данной волны - инвариант мозга. Этот инвариант был принят Соколовыми за основную характеристику ритмов мозга. Исследователи обнаружили, что для β-ритма, то есть для состояния умственной работы, этот инвариант совпадает с золотой пропорцией! Для других ритмов инварианты отличаются от золотой пропорции, но они также являются характерными числами 1,324 (для Θ-ритма), 1,272 (для α-ритма), 1,232 (для Δ-ритма), которые совпадают с так называемыми обобщенными золотыми пропорциями.

Что же является причиной таких инвариантов волн мозга? Это вопрос, который требует еще более тщательных исследований в этой интересной области, и эти исследования могут привести к раскрытию одной из наиболее тщательно охраняемых тайн природы – тайны организации и работы мозга человека, закономерностей его эволюции. И «энтропийный подход» к золотому сечению может быть использован для разгадки тайн работы мозга.

5.6. *«Закон структурной гармонии систем» Эдуарда Сороко* [13]

О связи этого закона с «энропийной закономерностью» ЗС писалось выше. Подчеркнем еще раз, что «энтропийная закономерность» ЗС является своеобразным методологическим обоснованием «закона Сороко» и справедливости его проявления в различных самоорганизующихся системах. Равномерное распределение возможных состояний системы, соответствующее золотому сечению и максимальной энтропии, делает систему наиболее информативной и устойчивой ко внешним и внутренним возмущениям.

5.7. ***Экспериментальное доказательство проявления «золотого сечения» в квантовом мире***

В Международном журнале "Science" от 9-го января 2010 опубликована сенсационная информация об экспериментальном обнаружении золотого сечения в квантовом мире. Это - результат многолетних исследований, выполненных в Helmholtz-Zentrum Berlin für Materialien und Energie (HZB) (Германия), Oxford and Bristol Universities и Rutherford Appleton Laboratory (Великобритания). Суть эксперимента состояла в следующем. Ученые сосредоточились на исследовании на наноуровне магнитных свойств кобальта ниобата. Если воздействовать на этот материал магнитным полем, то удается перевести магнитную цепь в новое квантовое состояние, называемое критическим.

Настраивая систему и искусственно вводя большую квантовую неопределенность, исследователи заметили, что цепочки атомов действуют подобно нано-гитаре, генерирующей колебания различных тонов. При этом первые два тона находятся в совершенном отношении друг к другу. **Их частоты находятся в отношении 1,618, известном в искусстве и архитектуре под названием "золотое сечение"!** Это открытие дает основания ведущим физикам высказать предположение, что **на самом деле в основе квантового, атомного мира лежит совершенный порядок, гармония, основанная на "золотом сечении".**

Нет никаких сомнений, что обнаружение «золотого сечения» в квантовом мире объясняется проявлением «энтропийной закономерности» ЗС. Именно при «золотом» соотношении частот квантовая система достигает максимальной неопределенности и состояния динамического равновесия.

5.8. ***Экономические процессы и системы***

Значительная часть докладов, сделанных на пленарных заседаниях Международного Конгресса по Математике Гармонии (Одесса, 8-10 октября 2010 г.), была посвящена проблемам использования «золотого сечения» для анализа экономических процессов. Среди них, в первую очередь, необходимо выделить доклады И.В. Крючковой [17], А.С. Харитонова [18], А.И. Ивануса [19], Т.И. Егоровой-Гудковой [20]. Общим для всех этих работ является то, что «золотое сечение» априори принимается в качестве «критерия гармонии» систем без какого-либо обоснования, почему именно «золотое сечение» выступает в роли такого критерия. Ссылки на Пифагора, Платона, Евклида и «законы природы» при этом не всегда убеждают. «Энтропийная закономерность» ЗС, обоснованная в настоящей работе, играет важную методологическую роль в подобного рода исследованиях. Она подтверждает (с точки зрения термодинамики), что именно «золотая константа», а не какая-либо другая математическая константа, является наиболее эффективным критерием гармонии экономических процессов и систем.

6. Заключение

Итак, разгадана еще одна из тайн «золотого сечения». Сочетание элементов, находящихся в «золотой» пропорциональности друг к другу, динамически устойчиво, потому что соответствует максимальной энтропии. Любое развитие характеризуется взаимодействием порядка и хаоса. Нормой же хаотичности является та норма аддитивных свойств, которая отвечает равновесному состоянию системы, её максимальной энтропии и золотому сечению суммируемых элементов системы.

Золотое сечение соответствует максимуму **энтропии** (степени хаотичности), занимая место среднего арифметического ($d=0{,}5h$) двух экстремальных, упорядоченных процессов: бисекции ($d=0$) и редукции ($d=h$).

Эволюция и самоорганизация жизнеспособных систем характеризуются наращиванием количества неравными порциями с соотношениями, пропорциональными золотой константе. Природные и вызванные деятельностью человека процессы кумулятивного накопления и системных преобразований жизнеспособны лишь в том случае, если они отвечают гармоническому золотому сечению, частным случаем которого является классическое золотое сечение.

Расширено само понятие золотого сечения: если разность d=b–a равна половине гармонического среднего h, или если b/a=Ф, то Целое, Большее и Меньшее обязательно связаны золотой пропорцией. Рекуррентное уравнение золотого сечения – это не только $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ (h=2), но и любое другое уравнение типа $f_{n+2}=(0,5h)f_{n+1}+(0,5h)^2f_n$. Например, $f_{n+2}=2f_{n+1}+4f_n$; $f_{n+2}=1,5f_{n+1}+2,25f_n$; $f_{n+2}=10f_{n+1}+100f_n$ – это тоже уравнения золотого сечения, но для иных значений (4; 3; 20) гармонического среднего h.

В работе сформулирован закон элементарного синтеза: система, синтезированная по закону рекурсии, обладает максимальной энтропией и динамической устойчивостью в случае, когда в качестве математической модели имеет разностное уравнение гармонического золотого сечения. Широко известен лишь частный случай этой математической модели – уравнение Фибоначчи.

Почему же разгадка тайны золотого сечения не наступила раньше? Ведь, скорее всего, золотое сечение было известно еще до Пифагора. Но второй закон термодинамики был обоснован лишь в 1870-е годы. Формула для расчета энтропии была предложена в работах Клода Шеннона лишь в 1948 г. В теории возвратных последовательностей господствовали веками устоявшиеся заблуждения. И только в 2010 г. была установлена взаимосвязь между переменными коэффициентами рекуррентного уравнения и параметрами произвольного сечения.

Стремление к «золотой» пропорциональности взаимодействующих характеристик системы приводит к её устойчивости и равновесию. Чем больше пар взаимодействующих характеристик системы складываются по закону золотого сечения, тем ближе система к состоянию общего динамического равновесия, тем она идеальнее. Видимо, это утверждение относится не только к замкнутым, но и к открытым системам. В этом убеждают и приведенные в статье примеры, подтверждающие «энтропийную закономерность» золотого сечения.

Итак, будем стараться не впадать в крайности. Будем стремиться к устойчивости, равновесию, золотой середине, то есть (пусть это для многих и прозвучит парадоксально) – в своем поведении будем стремиться к максимальной энтропии.

Литература:

1. Weisstein, Eric W. "Harmonic Mean." From MathWorld - A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/HarmonicMean.html.
2. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009.
3. Scott Olsen. The golden section. Nature`s greatest secret. Walker&Company, New York, 2006.
4. Иванус А.И. О Золотом Сечении и колбасе // «Академия Тринитаризма», М.: Эл № 77-6567, публ.14606, 16.10.2007.
5. Коробко В.И., Коробко Г.Н. Основы структурной гармонии природных и искусственных систем. - Ставрополь, 1995. - 350 с.
6. Владимиров В.Л. Ряды Фибоначчи, Люка и степеней золотой константы – частные случаи дивизорных возвратных последовательностей. Доклад на Международном Конгрессе по Математике Гармонии (Одесса, 8-10 октября 2010). http://www.goldensectionclub.net/home/congress/speeches.
7. Иванус А.И. О системообразующих свойствах Золотого сечения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13764, 08.09.2006.
8. Стахов А.П. Металлические Пропорции – новые математические константы Природы. Академия Тринитаризма. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321079.htm.
9. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Под редакцией А.П.Юшкевича. — М.: Наука. Том 3-й: Математика XVIII столетия.
10. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. Серия «Популярные лекции по математике». Гос. изд-во технико-теоретической литературы. – М.: 1950, 48 с.
11. Фельдбаум А.А., Дудыкин А.Д., Мановцев А.П., Миролюбов Н.Н. Теоретические основы связи и управления. Под редакцией А.А.Фельдбаума – М.: Физматгиз, 1963, 932 с.

12. Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем. Физика. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 1996. http://yandex.ru/infected?url=http%3A%2F%2Fwww.pereplet.ru%2...

13. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. - Минск: Наука и техника, 1984. - 264 с.

14. Alexey Stakhov, Samuil Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part I. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions and “Golden” Fibonacci Goniometry. Applied Mathematics, 2011, 2, 74-84, doi:10.4236/am.2011.21009. Published Online January 2011 (http://www.SciRP.org/journal/am).

15. Мартыненко Г.Я. Числа Стахова как предельное обобщение рекурсий Газале и Трибоначчи // «Академия Тринитаризма», М.: Эл № 77-6567, публ.14842, 10.07.2008.

16. A. Stakhov, B. Rozin. The «golden» algebraic equations // «Академия Тринитаризма», М.,Эл. № 77-6567, публ.13248, 24.04.2006 (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321040.htm).

17. Крючкова И.В., Проявление действия закона золотого сечения в структурировании экономики. Доклад на Международном Конгрессе по Математике Гармонии (Одесса, 8-10 октября 2010).

18. Харитонов А.С. Золотая пропорция в эволюции систем с распределенной структурой. Доклад на Международном Конгрессе по Математике Гармонии (Одесса, 8-10 октября 2010).

19. Иванус А.И. О гармонизирующем воздействии функциональной ассиметрии головного мозга на структуру экономической системы. Доклад на Международном Конгрессе по Математике Гармонии (Одесса, 8-10 октября 2010).

20. Егорова-Гудкова Т.И. Использование фундаментальных констант Математики Гармонии при обосновании инвариант стратегии экономического роста. Доклад на Международном Конгрессе по Математике Гармонии (Одесса, 8-10 октября 2010).