

ФИЗИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА «ЗОЛОТОЙ КОНСТАНТЫ»

Математическая энциклопедия дает определение «золотому сечению» как процедуре гармонического деления отрезка длиной a на две части, большая из которых обозначена буквой x , а меньшая часть – разностью отрезков $(a - x)$. Пропорция между длинами отрезков имеет вид

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{(a - x)}, \quad (1)$$

квадратное уравнение, следующее из пропорции (1), приводится ниже

$$x^2 + ax - a^2 = 0. \quad (2)$$

Величина большей части отрезка a равна положительному корню уравнения (2)

$$x = a \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} = a \varphi - 1, \quad (3)$$

где φ - число Фидия (1,618...).

В статье энциклопедии приводится представление длины большего отрезка x непрерывной дробью

$$x = a \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}, \quad (4)$$

подходящие дроби выражения (4) являются отношениями соседних членов

ряда Фибоначчи [1]
$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \dots \quad (5)$$

Итак, мы познакомились с тем, каким образом в математике формально постулируется понятие «золотого сечения». Отметим, что для представителя прикладных наук выражения (1) – (5) выглядят просто набором аксиом, так как эти соотношения не связаны с математическим моделированием какого-

либо физического объекта, то есть являются пусть и красивыми, но вполне абстрактными выражениями. Конечно, число Фидия иногда обнаруживают при анализе некоторых математических моделей, но почти всегда остается определенное сомнение в достоверности такой находки. Ведь мы могли заметить то, что настойчиво искали для подтверждения особых свойств исследуемого объекта. Поэтому предпримем попытку установить замечательное число как необходимый атрибут математической модели конкретного физического объекта.

В теории электрических цепей известен класс, так называемых, лестничных схем, изображение одной из них приведено на рис.1. Составляем математическую модель этой схемы только с помощью законов Ома и Кирхгофа.

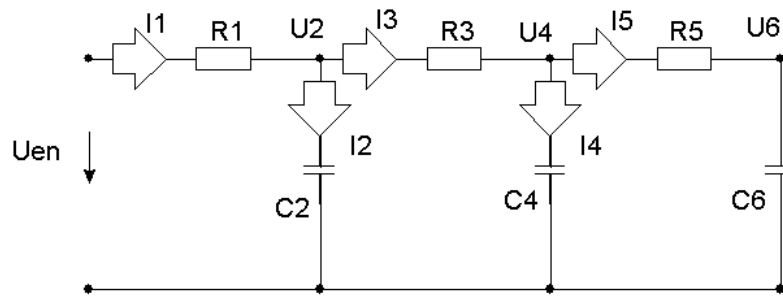


Рис. 1. Пример лестничной схемы.

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{en} &= \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \dot{U}_2; \\
 \dot{I}_1 - \dot{I}_3 &= \dot{U}_2 \underline{Y}_2; \\
 \dot{U}_2 &= \dot{I}_3 \underline{Z}_3 + \dot{U}_4; \\
 \dot{I}_3 - \dot{I}_5 &= \dot{U}_4 \underline{Y}_4; \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

В уравнениях (6) приняты следующие обозначения:

\dot{U}_{en} - комплекс напряжения источника;

\underline{Z}_N - импеданс n -ой ветви;

\dot{I}_N - комплекс тока n -ой ветви;

\underline{Y}_N - адмитанс n -ой ветви;

\dot{U}_N - комплекс напряжения n -го узла.

Число ячеек лестничной схемы может быть неопределенно большим, практически бесконечным, поэтому мы останавливаем запись (6) после двукратного применения второго и первого законов Кирхгофа и записываем математическую модель схемы в матричной форме:

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{c} \text{й} \\ \text{к} \\ \text{к} \\ \text{к} \\ \text{к} \\ \text{к} \\ \text{к} \\ \text{к} \\ \text{к} \\ \text{к} \\ \text{л} \end{array} & \begin{array}{c} \underline{Z}_1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \underline{Y}_2 \\ -1 \\ \underline{Z}_3 \\ -1 \\ \underline{Y}_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \underline{Y}_6 \end{array} & \begin{array}{c} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{U}_6 \end{array} & \begin{array}{c} \text{щ} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \end{array} \dot{U}_{en} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{щ} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \\ \text{ь} \end{array}
 \end{array} = \quad (7)$$

Уравнение (7) содержит ленточную матрицу, определитель которой зависит только от значений элементов главной диагонали [2]. Например,

$$\begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & 1 \\ -1 & \underline{Y}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \underline{Y}_2 + 1. \quad (8)$$

Выражение (8) представляет особый тип определителя, который называется континуантом (кумулянтом). Для вычисления определителей более высоких порядков их разбивают на определители более низких порядков следующим образом:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 1; \\
 C_1 &= \underline{Z}_1; \\
 C_2 &= C_1 \underline{Y}_2 + C_0 = \underline{Z}_1 \underline{Y}_2 + 1; \\
 C_3 &= C_2 \underline{Z}_3 + C_1; \\
 &\dots\dots\dots \\
 C_6 &= C_5 \underline{Y}_6 + C_4.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Для простоты анализа допустим, что значения всех двухполюсников схемы рис.1 (Z_N, Y_N) численно равны. Так как проводимость является обратной величиной сопротивлению, то единственным физически обоснованным общим значением будет единица. Приняв это условие, получим из равенств (9) начальный отрезок ряда Фибоначчи:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13.$$

Любое уравнение (9) следует из общей формулы - рекуррентного соотношения

$$C_N = C_{N-1}A_N + C_{N-2},$$

которое буквально повторяет выражение из работы [3]

$$f_{n+2} = (h-d)f_{n+1} + 0,5hdf_n, \quad (10)$$

где $d = b - a; b > a > 0$ - новая переменная;

$$h = \frac{2ab}{a+b} - \text{гармоническое среднее.}$$

Учтем в уравнении (10) основные условия гармонического золотого сечения:

$h = 2, d = 1$. После подстановки этих значений в уравнение получаем

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n. \quad (11)$$

Рекуррентное соотношение, полученное из уравнений (9), можно также упростить

$$C_N = C_{N-1} + C_{N-2}, \quad (12)$$

ведь мы приняли, что любой элемент главной диагонали уравнения (7) равен единице ($A_N = 1$). Тогда формулы (11), (12) совпадают и служат для вычисления очередного члена ряда Фибоначчи по значениям двух предыдущих.

Итак, было показано, что при описанных выше условиях определители матрицы уравнения (7) порождают ряд Фибоначчи, поэтому можно уверенно

утверждать, что отношение соседних по размеру определителей этой матрицы в пределе дает число Фидия.

Немецкий электротехник Вильгельм Кауэр предложил следующий порядок определения входного сопротивления лестничной схемы [4]:

$$\underline{Z}_{en} = \frac{\dot{U}_{en}}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{\frac{\dot{I}_2 + \dot{I}_3}{\dot{U}_2}} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}_2 + \frac{1}{\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_3}}} = \dots \quad (13)$$

Применяя поочередно второй и первый законы Кирхгофа, мы получаем из равенства (13), так называемую, форму Кауэра. Для нашего примера, рис.1, она будет иметь следующий вид:

$$\underline{Z}_{en} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}_2 + \frac{1}{\underline{Z}_3 + \frac{1}{\underline{Y}_4 + \frac{1}{\underline{Z}_5 + \frac{1}{\underline{Y}_6}}}}} \quad (14)$$

Уравняем по модулю значения параметров всех двухполюсников схемы рис.1 ($\underline{Z}_N, \underline{Y}_N$), тогда цепная дробь (14) трансформируется в выражение аналогичное (4)

$$\Phi \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} \quad (15)$$

Выражение (15) отражает структуру лестничной схемы рис.1, а численное значение этой дроби может служить индексом этой структуры. Интересно, что та же математическая конструкция может быть получена при делении последних членов отрезка ряда Фибоначчи, который получен из уравнений (9), что легко показать на примере.

К отношению членов отрезка ряда Фибоначчи $\frac{13}{8}$ применим алгоритм, действие которого показано с помощью последовательности операций (13). Отметим, что замена одного члена ряда суммой двух предыдущих напоминает применение законов Кирхгофа в алгоритме Кауэра. Несколько шагов алгоритма приводится ниже:

$$\frac{13}{8} = \frac{8+5}{8} = 1 + \frac{1}{\frac{8}{5}} = 1 + \frac{1}{\frac{5+3}{5}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{3}}} = \dots$$

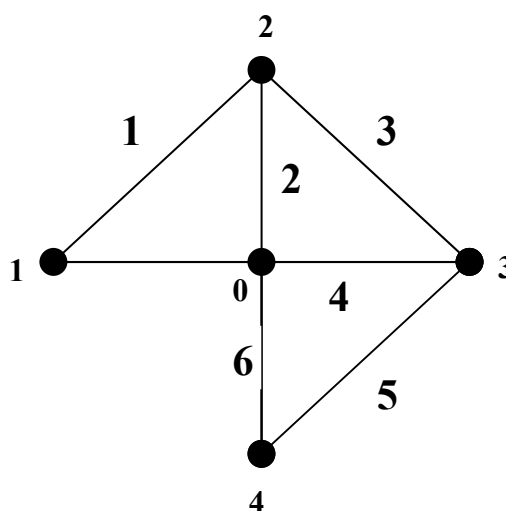


Рис.2. Граф лестничной схемы рис.1.

Изобразим лестничную схему рис.1 в виде графа рис.2. Узлы графа (1, 2, 3, 4) рис.2 лежат на окружности, то есть равно удалены от общего узла (0). Этим подчеркивается численное равенство параметров элементов этих ветвей. Напомним, что параметры четных и нечетных ветвей численно равны. Если увеличивать число ячеек в графе, то рисунок будет постепенно трансформироваться в фигуру, напоминающую колесо. Однако при всех внешних изменениях изображения сохранится тип симметрии графа, что численно может быть подтверждено значением индекса (15).

Бесконечная цепная дробь, в которую легко превратить выражение (15), очень медленно сходится к числу Фидия. Этот факт известен давно, но только сегодня особенность вычислительного процесса объяснили с

помощью понятия информационной энтропии [3]. Отметим, что этот тип структуры предполагает бесконечное уточнение результата. Действительно, в случае большого количества ячеек в графе рис.2 он превращается в многослойное изображение. Каждой ячейке будет соответствовать равносторонний треугольник, слой изображения будет состоять из шести треугольников, слои ячеек связаны между собой электрически. Множество слоев можно представить в виде спирали, что, правда, не является принципиальным. Важно только то, что в любой (по номеру) последней ветви все равно будет течь ток (пусть и бесконечно малый). Таким образом, индекс структуры (15) нельзя вычислить точно даже исходя из физических соображений.

Кроме классического ряда, существуют p -числа Фибоначчи, последовательность которых задается следующим образом [5]:

Для заданного числа $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ последовательности $F_p(n)$ получают с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} F_p(n) &= F_p(n-1) + F_p(n-p-1), & (\text{для } n > p+1) \\ F_p(1) &= F_p(2) = \dots = F_p(p+1) = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Эти числовые последовательности включают в себя как ряд значений 2^N ($p = 0$), так и классический ряд Фибоначчи ($p = 1$). Соотношение соседних членов последовательности можно определить в любой из них:

$$\Phi_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)}. \quad (17)$$

Выражение (17) называют обобщенным «золотым сечением», каждое из которых имеет свой индекс – величину, характеризующую этот тип симметрии. Приведем для сравнения только несколько значений соотношения (17) при $p=0,1,2,3,4$:

$$p = 0, \Phi_0 = 2;$$

$$p = 1, \Phi_1 = 1,618\dots;$$

$$\begin{aligned}
p = 2, \Phi_2 &= 1,465\dots; \\
p = 3, \Phi_3 &= 1,380\dots; \\
p = 4, \Phi_4 &= 1,324\dots
\end{aligned}
\tag{18}$$

Очевидно, что тип симметрии, представляемой второй строчкой (18), соответствует лестничной схеме, рис.1. Вероятно, последующие строчки (18) представляют другие математические (схемные) структуры.

В качестве примера найдем структуру, следующую из последовательности, соответствующей третьей строчке записи (18):

$$1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, \dots \tag{19}$$

Формула, по которой вычисляются члены числовой последовательности, дана ниже:

$$F_2(n) = F_2(n-1) + F_2(n-3). \tag{20}$$

Найдем соотношение двух конкретных членов ряда (19) [6]:

$$\frac{F_2(9)}{F_2(8)} = \frac{13}{9} = \frac{9+4}{9} = 1 + \frac{4}{9} = 1 + \frac{1}{\frac{9}{4}} = 1 + \frac{1}{\frac{4+3+2}{4}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3} + \frac{1}{\frac{4}{2}}}} = \dots \tag{21}$$

Если преобразование (21) довести до логического конца, то получится следующая ветвящаяся цепная дробь [7]:

$$\frac{F_2(9)}{F_2(8)} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}}}}}}}}} = 1,4444\dots \tag{22}$$

Очевидно, что полученная ветвящаяся цепная дробь (22) представляет некоторую структуру схемной функции электрической цепи, граф которой, без сомнения, отличается от графа лестничной схемы, рис.2.

Итак, замечательное число найдено как необходимый атрибут математической модели конкретного физического объекта. Ряды Фибоначчи и индексы, характеризующие определенный тип симметрии, также возникают при математическом описании объектов, обладающих структурой. Соотношение членов ряда (17), стоящих рядом, дает величину, характеризующую тип симметрии исследуемой структуры. Заметим, что это соотношение в процессе непрерывного деления образует структурированный математический объект, производный от структуры изучаемого объекта.

По ряду причин электрическая цепь является удобным объектом для исследования энтропии. В 1891 году Дж. Максвелл сформулировал «минимальную теорему высокой температуры», в которой утверждается, что для линейных резистивных контуров, содержащих постоянные источники, токи распределяются таким образом, что рассеянная мощность (то есть произведенная высокая температура) P является минимальной.

Итак, теорема определяет электрическую цепь как источник энтропии, который благодаря связности своих элементов способен минимизировать свои энергетические потери. Оценка производства энтропии электрической цепью сформулирована вполне традиционно – это отношение «высокой температуры» Q к температуре окружающей среды T

$$\frac{Q}{T} = \frac{dS}{dt} \quad (23)$$

Теорема Максвелла говорит о минимуме произведенной энтропии и связывает эту возможность с наличием структуры у исследуемого объекта.

Энтропия рассматривается как функция времени и ее экстремум возникает при равенстве соотношения (23) нулю. Это может произойти либо при $Q=0$, либо при значении $T = T^*$. Процесс «производства» энтропии обладает абсолютной устойчивостью даже в случае его бесконечно малой скорости. Это следует из формулировки теоремы, где речь идет о резистивных контурах, которые не могут накапливать энергии. Минимум произведенной энтропии (во внешний мир) при условии абсолютной

устойчивости предполагает достижение ее максимума в процессах электрической цепи [8], [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М.Виноградов, т.2. – М.: «Советская Энциклопедия», 1979. – с.466.
2. Херреро Д., Уиллонер Г. Синтез фильтров. – М.: «Советское Радио», 1971. – 232с.
3. Владимиров В., Стахов А. Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения). – «Академия Тринитаризма», М., Эл№77-6567, публ. 16523, 22.05.2011.
4. Cauer W. Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. – Berlin: Akademie Verlag, 1954. – 586 s.
5. Стахов А.П. Обобщенные числа Фибоначчи. – Музей золотого сечения: <http://goldenmuseum.com/> .
6. Ерохов И.В. Получение структур схемных функций.// «Академия Тринитаризма», М., Эл№77-6567, публ. 14700, 24.01.2008.
7. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 312с.
8. Oster G.F., Perelson A.S., Katchalsky A. Network Thermodynamics/ G.F.Oster, A.S.Perelson, A.Katchalsky // Nature /. – 1971. – vol.234, December, No 5329, p.p. 393 – 399.
9. Oster G.F., Desoer C.A. Tellegen's Theorem and Thermodynamic Inequalities/G.F.Oster, C.A.Desoer// Journal of Theoretical Biology/. - 1971. - vol.32, i.2, august, p.p. 219 – 241.

