В.Л. Владимиров

Еще раз об энтропии золотого сечения (ответ на полемическую статью С.В. Василенко и В.С. Белянина «Золотоносные наносы (сокрытие тайны "экстремальной" энтропии)»)

22.05.2011 на сайте АТ была опубликована статья В.Л. Владимирова, А.П. Стахова «ЭНТРОПИЯ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (РАСКРЫТА ЕЩЕ ОДНА ТАЙНА ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ)» (далее для краткости – **статья**). Через месяц, 21.06.2011, на сайте АТ была опубликована полемическая статья С.Л. Василенко, В.С. Белянина «ЗОЛОТОНОСНЫЕ НАНОСЫ (СОКРЫТИЕ ТАЙНЫ «ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ» ЭНТРОПИИ)» с рецензией на статью В.Л. Владимирова, А.П. Стахова (далее для краткости – **рецензия**).

Алексей Петрович Стахов доверил мне ответить рецензентам, и я благодарен редакции сайта АТ за публикацию ответа.

Далее будем называть **авторами** В.Л. Владимирова и А.П. Стахова, а **рецензентами** – С.В. Василенко и В.С. Белянина. Ниже приведены ответы на **основные** замечания рецензентов.

1. ***Бумаг всё терпит.*** (Текст рецензентов здесь и далее выделен курсивом и полужирным шрифтом, цитаты из рецензии приводятся без изменения орфографии - ВВ).

Авторы представляли статью на электронном носителе. Видимо, рецензия была написана на бумаге. (Ответ авторов здесь и далее не выделен курсивом).

2. ***Исходные предпосылки учёных [1] весьма неоднозначны, местами противоречивы. Это не могло не отразиться на ходе последующего изложения.***

Прямым следствием "борьбы с заблуждениями" стала нетвердая расстановка акцентов и приоритетов, когда освещение энтропии и тем более раскрытие её тайны как-то незаметно оказались на втором плане, а само упоминание о них – ближе к тезисному изложению».

Интересно, что без всяких усилий со стороны авторов, статья об энтропии ЗС получилась точно соответствующей «золотому сечению». В статье 22 страницы (в формате .doc). А теперь дважды разделим это количество страниц на золотую константу с округлением результата до ближайшего большего целого числа: 22:1,618=13,597≈**14**; 13,597:1,618=8,4≈**9**. Получили числа 9 и 14. Раздел об энтропии ЗС находится в статье на страницах **9–14** и занимает 6 страниц, то есть 27 %, или – **более четверти объема** статьи. Поэтому утверждение «***освещение энтропии и тем более раскрытие её тайны как-то незаметно оказались на втором плане***» не имеет под собой никаких оснований. А какие конкретно «***предпосылки учёных [1] весьма неоднозначны, местами противоречивы***» – остается загадкой.

3. ***Авторы утверждают*** *[1, п. 3.1]: «О золотой пропорции сейчас пишут в школьных учебных пособиях и математических справочниках большинства стран мира». –* ***Такие широковещательные заявления желательно подтверждать. В России, например, ни в одном школьном учебном пособии о ЗС не говорится ни слова.***

Подтверждаем, что в других европейских странах – гораздо более уважительное отношение к ЗС. Например, в Германии каждый школьник старших классов обязан пользоваться «Сборником формул, таблиц и данных по математике, физике, астрономии, химии, биологии, информатике». В качестве примера такого пособия укажем на «Formel sammlung. Formeln. Tabellen. Daten. DUDEN PAETEC Schulbuchverlag. Berlin – Mannheim. 2010. ISBN 978-3-89818-700-8», где на стр. 13 в разделе «Пропорции и их применение» есть подраздел Goldener Schnitt (stetige Teilung einer Strecke), то есть «**Золотое сечение (устойчивое деление отрезка)**». Отметим, что в любом «свежем» сборнике формул для школьников имеется подробное алгебраическое и геометрическое определение и описание ЗС. Есть такой материал о ЗС и в любом «взрослом» справочнике по математике. Например, даже в малоформатном справочнике «Taschenbuch Mathematik. Formeln, Regeln, Merksaetze. Sonderausgabe. ISBN 3-8174-5097-4» золотому сечению посвящена целая страница 194, а в солидном (832 стр.) справочнике «Taschenbuch Mathematischer Formeln. Fachbuchverlag Leipzig, 20. Auflage. 2004. ISBN 3-446-22891-8» золотому сечению посвящена стр. 142.

Так что отсутствие информации о ЗС в справочных материалах РФ адекватно отношению самих рецензентов к ЗС.

4. ***Далее записывается [1, п. 3.1] очевидное тождество*** $\frac{a+b}{b}=\frac{b}{b-h/2}$, ***где*** $h=\frac{2ab}{a+b}$***. … То есть пропорция отражает обычное тождество! Так можно договориться, что и очевидное тождество $1/a = a/a^2$ тоже будет пропорцией***.

Как это ни парадоксально для рецензентов звучит, но $1/a = a/a^2$ – **это действительно пропорция!** Пропорция – это равенство двух отношений. Верную пропорцию всегда можно привести к тождеству. Например, рецензенты пишут:

«А древние вавилоняне и позднее пифагорейцы уже знали теорему на пропорцию … «из двух чисел a и b одно относится к их среднему арифметическому так, как их среднее гармоническое относится к другому числу» [2, с. 307] $a:\frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}:b$ ***».***

Так вот, «***теорему на пропорцию***» пифагорейцы, видимо, действительно знали, но не опровергали ее, хотя и она «***отражает обычное тождество»***. Действительно, каждый школьник может убедиться, что если в обеих частях указанной пропорции произвести деление, или если применить основное свойство пропорции и приравнять произведения ее крайних и средних членов, то получим либо $\frac{2a}{a+b}=\frac{2a}{a+b}$, либо $ab=ab$. То есть **приведенная рецензентами в качестве «образцовой» древняя пропорция также обращается в тождество, если произвести указанные в ней действия или учесть ее свойства**.

5. ***Определение – отец учения. …*** *[1,* ***п. 1.1****] – «Золотая пропорция – равенство отношений…Число Фидия Ф=(1+√5)/2≈1,618 в современной науке называется "золотой пропорцией"».* ***– Нам не приходилось, кроме цитируемой статьи, встречать, чтобы число Ф называли "золотой пропорцией", видимо, потому, что число и пропорция – разные математические понятия. К тому же к Фидию это число имеет весьма отдалённое отношение… Слово "пропорция" – устоявшееся со времён Древней Греции математическое понятие, которое никогда не теряло первоначальный смысл и не может приобрести новый.***

Рецензенты не правы. В Интернете читаем первый попавшийся текст, содержащий слова «число Фидия»:

« Тест на совместимость. COC.RU (http://www.coc.ru/). ***Для начала мы объясним, почему адрес сайта www.1618.ru. 1.618 - это число "золотого сечения" (****золотая пропорция****, гармоническое деление,** *число Фидия***, фи)».**

То есть термины «золотая пропорция» и «число Фидия» здесь отождествляются.

Кроме того, сам С. Василенко в работе [12] (здесь и далее 12 – работа С.Л. Василенко. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПРОПОРЦИИ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ) пишет: «***Автор обращает внимание на то, что в работе [1] понятие «обобщенных золотых сечений (ЗС)» предложено квалифицировать некорректным, поскольку в математике под ЗС принято считать вполне конкретное число Ф***». То есть для ярого поборника точной терминологии ЗС и Ф – это одно и то же…

И еще из работы С. Василенко [12]: «***Само "золотое" сечение, как уникальная математическая константа, никоим образом не обобщается***…». Сечение – это константа??

Вот еще одна цитата из Интернета (http://coo.siteedit.ru/page40) :
«Золотое сечение (золотая **пропорция**, деление в крайнем и среднем отношении, гармоническое деление, **число Фидия**, φ) — деление отрезка на части в таком соотношении, при котором большая часть относится к меньшей, как сумма к большей. … Эту **пропорцию принято обозначать греческой буквой φ** (встречается также обозначение τ) и она равна:
$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887498948\ldots$»

А с Интернетом сейчас считаться нужно… К сожалению, молодежь пользуется в основном Интернетом, а не книгами.

6. ***По установившимся правилам образования понятий, терминов и определений, если произносится "классическое ЗС", сразу подразумевается антипод "неклассического ЗС". На "гармоническое ЗС" напрашивается возможность альтернативного существования некого "негармонического ЗС". Но разве они существуют? И не много ли довесок для одной фундаментальной математической константы? – Налицо алогичность и математическое противоречие.***

Существует же, например, термин «геометрические построения», однако термин «негеометрические построения» не используется. Кроме того, в статье мы пояснили:
«Термин «**гармонические** уравнения золотого сечения», применимый к уравнениям типа $\mathbf{f_{n+2}=0{,}5hf_{n+1}+(0{,}5h)^2f_n}$ и $\mathbf{f_{n+2}=1{,}5hf_{n+1}-(0{,}5h)^2f_n}$, необходим лишь для того, чтобы отличать эти уравнения от классического золотого сечения: $\mathbf{h=2;\ f_{n+2}=f_{n+1}+f_n}$».

7. «*Первое заблуждение*: *деление на неравные части в произвольном отношении пропорцию не образует... Это заблуждение мешало развитию теории золотого сечения в приложении к системному синтезу*». ***Подобного заблуждения в теории пропорции никогда не было.***

Ошибочные утверждения типа «если отрезок делится части не по правилу золотого сечения, то пропорцию составить нельзя» получили в последнее время широчайшее распространение. Пример такого неверного утверждения, проникшего даже в отличную книгу Коробко В.И., Коробко Г.Н. («Основы структурной гармонии природных и искусственных систем. - Ставрополь, 1995. - 350 с.»), авторы приводили в своей статье. Вот другие примеры:

Виктор ЛАВРУС «Золотое сечение – гармоническая пропорция» (http://www.nashekodom.ru/index.php?option=com_content&view=article&id=85&Itemid=85):
«…Отрезок прямой АВ можно разделить на две части следующими способами:

- на две равные части – АВ : АС = АВ : ВС;
- на две неравные части в любом отношении (**такие части пропорции не образуют**);
- таким образом, когда АВ : АС = АС : ВС». (Цветным шрифтом выделено мной – ВВ).

Эта выдержка повторяется (слово в слово) в материалах по таким адресам:
«Золотое сечение в живописи, математике, архитектуре, искусстве» (http://www.abc-people.com/data/leonardov/zolot_sech-txt.htm);
http://chudesa.by.ru/gold.html;
http://forumishka.net/nauka/14162-zolotoe-sechenie.html;
«Все секреты о Форекс» (http://www.adamaz.ru/2008/03/03/zolotoe-sechenie.html);
«Золотое сечение в изобразительном искусстве»
http://skymasters.com.ua/index.php/ru/component/banners/images/phocagallery/index.php?option=com_content&view=article&id=62&Itemid=64&lang=ru);
и так далее…

8. *[**1, п. 1.4**]* – ***Уравнение вида*** $z_{n+1} = mz_n + qz_{n-1}$ ***неверно представляется как «****уравнение с переменными коэффициентами****»*** **m, q.** ***Возможность их априорного назначения вовсе не означает переменность, поскольку в процессе образования рекурсии они строго неизменны. Поэтому в математике это возвратное уравнение с постоянными (!) коэффициентами.***

В статье рассмотрено уравнение вида
$\mathbf{f_{n+2}=(h(a,b)-d(a,b))\cdot f_{n+1}+0{,}5h(a,b)\cdot d(a,b)\cdot f_n}$.

Для упрощения записи скобка (a,b) опускалась, но в тексте были даны исчерпывающие пояснения. Процесс образования рекурсии в статье рассмотрен как следствие процесса сечения произвольного отрезка на две произвольные части «a» и «b». Изменение параметров «a» и «b» сечения влечет за собой перемену значений коэффициентов рекурсии, которые поэтому считаются переменными. **Переменные коэффициенты в математике зависят не только от времени.**

Пример: Будем производить сечения отрезков произвольной длины произвольным образом. Пусть, например, a=1,78; b==2,28. Тогда рекурсия имеет вид $\mathbf{f_{n+2}=1{,}5f_{n+1}+0{,}5f_n}$.

Пусть a=3,236; b= 5,236. Тогда рекурсия имеет другой вид: $\mathbf{f_{n+2}=2f_{n+1}+4f_n}$. Коэффициенты m, q в нашей статье не назначаются априорно, а являются функциями случайных значений «a» и «b».

9. [**1, п. 1.7**] **«**Аттрактор рекурсии, или просто – аттрактор (от англ. attract – привлекать, притягивать) – таким коротким термином теперь всё чаще называют максимальный по модулю корень характеристического уравнения рекурсии». ***– Понятие аттрактора в рекуррентных последовательностях впервые стало использоваться в работах С. Василенко. … явно не достаёт ссылки.***

Авторы упоминают теорему Бернулли. Однако неясно как она сформулирована и когда была опубликована. Мимоходом упоминать имена великих людей в научной литературе не принято.

То есть не достаёт ссылки на работы С. Василенко. Прозрачный намек на то, что следует «***упоминать имена великих людей***». Что ж, в следующий раз исправимся… Однако, об аттракторах читаем не только в работах рецензента: «…**аттракторы** определяют устойчивое состояние, и если система попадает в поле его притяжения, то она обязательно эволюционирует к этому устойчивому состоянию (структуре). Будущее состояние системы (среды) как бы «притягивает», организует, формирует, изменяет ее настоящее состояние»; «Точки, притягивающие траекторию развивающейся динамической системы, получили название аттракторов (от английского attract — привлекать, притягивать)» (**Горбачев В. В. Учебное пособие «Концепции современного естествознания»**:—М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование », 2003. — 592 с: ил.)

Аттракторы упоминаются при анализе рекурсий по адресам:

http://www.numbernautics.ru/content/view/528/44/,
http://fivt.fizteh.ru/conf/reports08/f_3rjcq9/f_3ro2qh/c_3rqgjh.html,
http://www.rae.ru/snt/?section=content&op=show_article&article_id=2643,
http://www.q02.ru/trub/s/481/index.html,
http://www.mce.su/rus/archive/abstracts/authors/person60247/doc62427/ и многим другим.

Теорема Бернулли широко известна, она рассмотрена (с доказательством) в известном учебном материале «Интерактивная информационно-консультационная среда (http://pmpu.ru/vf4/)», в разделе: Утешев А.Ю. Разностное уравнение и рекуррентная последовательность (http://pmpu.ru/vf4/recurr).

10. «*Любая возвратная последовательность 2-го порядка с аттрактором* $a \neq 1$ *способны генерировать геометрическую прогрессию, если начальные условия приведены к степеням аттрактора*». – ***Только одних начальных условий мало. Необходим также соответствующий вид возвратного уравнения и значения его коэффициентов***.

Рецензенты, к сожалению, не поняли сути доказанного нами свойства рекурсий 2-го порядка. Методом математической индукции в статье было **доказано**, что специфические начальные условия **всегда** преобразуют возвратную последовательность 2-го порядка в геометрическую прогрессию, если аттрактор последовательности не равен единице. Последняя оговорка относится к единственному случаю $f_{n+2}=2f_{n+1}-f_n$, генерирующему при $f_0=1$, $f_1=2$ **арифметическую** прогрессию – натуральный ряд чисел.

11. [**1, п. 1.10**] – ***«Экстремальные виды сечения – это "бисекция" a = b; d = b – a = 0 и "редукция" d = h; b = (1+√2)a». – Редукция в логике и математике – логико-методологический приём сведения сложного к простому (лат. reductio возвращение, приведение обратно).***

Режим "редукции" в статье соответствует переходу от «сложной» рекурсии 2-го порядка к «простой» рекурсии 1-го порядка. В этом смысле режим "редукции" аналогичен режиму "бисекции". Так что с терминологией тут всё в порядке.

12. ***А теперь несколько слов о математических преобразованиях авторов.***

После несложной замены или масштабирования параметров пропорции $(a, b) \Rightarrow (h, d) = \left(\frac{2ab}{a+b},\ |a-b|\right)$ ***возвратное уравнение второго порядка, приводящее к большему аттрактору a, приобретает вид*** $f_{n+1} = (h-d)f_n + 0{,}5hd \cdot f_{n-1}$.

Слагаемые в правой части умножаются и делятся на h: $f_{n+1} = \left(1 - \frac{d}{h}\right) h f_n + \frac{d}{h} 0{,}5h^2 f_{n-1}$, ***или*** $f_{n+1} = p_1(hf_n) + p_2\left(0{,}5h^2 f_{n-1}\right)$, ***где***

$p_2 = d/h$, $p_1 = 1 - p_2$***. А сейчас, – внимание, – самый главный математический "трюк". Правая часть рассматривается как «сумма двух слагаемых с априорными вероятностями p₁ и p₂ "участия" которых в синтезе переменны и выражены через отношение d/h». Равенство вероятностей*** $p_1 = p_2 = 0{,}5$ ***в информационной системе соответствует максимальной энтропии. Но к этому равенству приводит и условие ЗС h = 2d. Отсюда делается вывод, что «****золотому сечению соответствует максимум энтропии****». Отменно! Правда, в своих окружных числовых манипуляциях авторы упустили из виду, что вероятности теперь "пристёгнуты" не к событиям f, а к совершенно иным величинам*** hf_n, $0{,}5h^2 f_{n-1}$ ***с неотчётливым физическим содержанием.***
…числа p_1, p_2 ***не имеют здесь реального вероятностного смысла (содержания).***
Простой вопрос «вероятности чего?», – остаётся без ответа.

Несмотря на недопустимый тон дискуссии (какой пример подают рецензенты молодым ученым? Не поняли – спрашивайте!), мы благодарны за это замечание, поскольку в нем отмечен непонятный момент статьи. Стремясь к лаконичности и доступности изложения, мы сократили первоначальный вариант статьи, в котором разъяснялся физический смысл слагаемых hf_n, $0{,}5h^2 f_{n-1}$. Ниже приводим выдержку из первоначального варианта статьи.

Экстремальные виды сечения – «бисекция» (a=b; d=b–a=0) и «редукция» (d=h; b=(1+√2)a) – преобразуют гармоническое уравнение 2-го порядка в простейшее уравнение 1-го порядка – уравнение геометрической прогрессии. При экстремальных видах сечения слагаемые в правой части уравнения приобретают свои максимальные значения S_1 и S_2: $S_1=((h-d)f_{n+1})_{max}$; $S_2=(0{,}5hdf_n)_{max}$.

В режимах бисекции и редукции сумма S двух слагаемых уравнения 2-го порядка вырождается в единственное слагаемое (S_1 или S_2), представляющее собой произведение постоянной (не зависящей от d) величины на текущий элемент рекуррентного ряда. С учетом принятой области определения $0 \le d \le h$ имеем: $S_1=hf_{n+1}$ при d=0 и $S_2=0{,}5h^2f_n$ при d=h. Числовой ряд (геометрическая прогрессия) в этих крайних режимах не имеет никаких аддитивных свойств: аддитивные свойства полностью уступили место мультипликативным. А мерой Хаоса у нас является наличие аддитивных свойств, то есть наличие суммы двух слагаемых, принимающих случайные значения. Бисекция и редукция не создают Хаоса, им свойственен лишь абсолютный Порядок.

Приведем каждое слагаемое в правой части уравнения $S=(h-d)f_{n+1}+0{,}5hdf_n$ к произведению его экстремального значения на индивидуальную «весовую функцию» – переменную (зависящую от d) вероятность вклада этого слагаемого в сумму.

Для этого **умножим и разделим** 1-е слагаемое **на его максимальное значение** $S_1=hf_{n+1}$:

$(h-d)f_{n+1}=[(h-d)f_{n+1}/(hf_{n+1})]S_1=(1-d/h)S_1=p_1S_1$,

где $\mathbf{p_1=1-d/h}$ – весовая функция 1-го слагаемого, или вероятность участия 1-го элемента в синтезе системы.

То же проделаем со 2-м слагаемым: умножим и разделим его на $S_2=0{,}5h^2f_n$:

$0{,}5hdf_n =[0{,}5hdf_n/(0{,}5h^2f_n)]S_2=(d/h)S_2=p_2S_2$,

где $\mathbf{p_2=d/h}$ – весовая функция 2-го слагаемого, или вероятность участия 2-го элемента в синтезе системы. Отметим, что $p_1+p_2=1$.

Подставив слагаемые в рекурсию, с учетом обозначения $S=f_{n+2}$ получаем:

$S = (1–d/h)S_1+(d/h)S_2 = p_1S_1+p_2S_2$.

Таким образом, в последнем выражении сумма S двух элементов выражена через экстремальные значения этих элементов S_1 и S_2 и их весовые коэффициенты (вероятности участия слагаемых в суммировании) p_1 и p_2. Если и $p_1\neq 0$, и $p_2\neq 0$, имеет место Хаос. Максимальный Хаос (максимальная энтропия) наступает при $p_1=p_2$. При этом **информация не исчезает, а, наоборот, становится максимальной.** Информация (негэнтропия) – это энтропия с обратным знаком.

Чтобы повысить наглядность результата, перепишем последнее выражение, подставив в него первоначальные значения S, S_1 и S_2:

$\mathbf{f_{n+2} = (1–d/h)(hf_{n+1}) + (d/h)(0{,}5h^2f_n) = p_1(hf_{n+1}) + p_2(0{,}5h^2f_n)}$.

Приведение слагаемых к норме – их максимальному значению – широко применяется в естественных науках.

Таким образом, физическое содержание слагаемых $\mathbf{hf_{n+1}}$ и $\mathbf{0{,}5h^2f_n}$ совершенно ясно. **Это значения f_{n+2} в режимах бисекции и редукции, когда сумма f_{n+2} вырождается в единственное слагаемое**.

13. ***Максимальной энтропии соответствует состояние, близкое к хаосу, и практически исчезающая информация. Другими словами, если принять авторскую точку зрения о том, что «****гармоническое золотое сечение****» имеет максимум энтропии, то в таком случае оно практически не несёт информации. Получается некая бесполезная "пустышка" с информационной точки зрения… Вопрос, как определена энтропия, которая возрастает при делении отрезка, авторы оставляют без ответа.***

Выше (в п. 12) нами было отмечено, что мы рассматриваем информацию как негэнтропию, то есть энтропию с обратным знаком (см., например, Фельдбаум А.А., Дудыкин А.Д., Мановцев А.П., Миролюбов Н.Н. Теоретические основы связи и управления. Под редакцией А.А.Фельдбаума – М.: Физматгиз, 1963, 932 с., стр. 746-768, или Лапа В.Г. Математические основы кибернетики. К.: «Вища школа»,1974, 452 с., стр. 324-330). Информация обратна (по знаку) неопределенности. **Поэтому гармоническое золотое сечение с информационной точки зрения обладает не только максимумом энтропии, но и максимумом информации**.

Выдержка из нашей статьи:

«С 1948 г. энтропия H ансамбля событий (у нас – двух событий) рассчитывается по формуле Клода Шеннона (1916-2001):

$\mathbf{H=H_1+H_2= –p_1\cdot\log p_1–p_2\cdot\log p_2= –p_1\cdot\log p_1–(1–p_1)\cdot\log(1–p_1)}$,

где H_1 и H_2 – соответственно энтропии 1-го и 2-го слагаемых». Вот по этой формуле в статье и определялась ИНФОРМАЦИОННАЯ энтропия (***разность значений безусловной и условной энтропий***), о чем в тексте статьи неоднократно упоминалось.

Отметим также, что выражение рецензентов «***энтропия, которая возрастает при делении отрезка***» лишено какого-либо смысла.

14. «*Если считать золотым такое сечение, которое подчиняется золотой пропорции, то любому значению гармонического среднего h соответствует* <u>*свое золотое сечение*</u> *с разностью аттракторов d* = 0,5*h и соотношением аттракторов b*/*a* = Ф».

Вольно или невольно, но здесь обнаруживается ложный посыл на множество золотых сечений, хотя в действительности оно одно-единственное. При золотом

сечении единичного отрезка a + b = 1 величина $h = 2b(1-b) = 2\phi^3$ ***строго фиксирована, и любое гармоническое среднее h не может образовать любое ЗС!***

Так происходит передёргивание акцентов и смыслов. Якобы отрезки разной длины (именно это вытекает из "любого значения" h) имеют своё золотое сечение (?).

Рецензенты опять не поняли главного. В нашей статье показано, что известное еще с «допифагоровых» времен классическое ЗС с характеристическим уравнением $a^2=a+1$ не одиноко. Любое характеристическое уравнение вида

$$\mathbf{a^2=\lambda a+\lambda^2} \qquad (1.14)$$

отвечает так называемому «гармоническому ЗС», для которого также соблюдается золотая пропорция и которому присущи все особенности классического ЗС с $\lambda=1$.

Кратчайший вывод уравнения (1.14) несложен. Всё начинается с золотой пропорции, то есть с равенства отношений целого к большему и большего к меньшему: (a+b)/b=b/a. Ведь именно в золотой пропорции заключена многовековая мудрость. Используя основное свойство пропорции (произведения крайних и средних членов равны), получаем: $a=b^2/(a+b)=b–ab/(a+b)=b–0{,}5h$, где h=2ab/(a+b) – это гармоническое среднее двух чисел – аттракторов «a» и «b», то есть частей целого. Подставив вместо «a» в правую часть золотой пропорции (a+b)/b=b/a его новое значение b–0,5h, получаем «гармоническую» пропорцию (a+b)/b=b/(b–0,5h).

А если в «гармоническую» пропорцию (a+b):b=b:(b–0,5h) ввести подстановку и вместо разности «большего» и «меньшего» использовать параметр «d» (d=b–a), получаем общее характеристическое уравнение гармонической рекурсии 2-го порядка с переменными коэффициентами:

$$\mathbf{a^2=(h–d)a+0{,}5hd}. \qquad (2.14)$$

Выше из золотой пропорции было получено: a=b–0,5h. С учетом b–a=d отсюда получаем основное условие ЗС: **d**=b–a=**0,5h**. А подставив d=0,5h в (2), располагаем равенством (1), в котором $\lambda=0{,}5h$. То есть (1) можно записать и так: $\mathbf{a^2=0{,}5ha+(0{,}5h)^2}$. Вот и весь вывод характеристического уравнения гармонического ЗС.

Сколько же может быть Золотых Сечений? Судя по (1.14) – бесконечно много. Ведь каждому положительному (рациональному, иррациональному, даже комплексному) значению h соответствует «своё» ЗС! И действительно, если отрезок **заданной** длины разделить на две части в золотой пропорции, то такому сечению соответствует только одно характеристическое уравнение: $a^2=a+1$. Если же в золотой пропорции b/a=Ф делится отрезок **произвольной** длины, то такому сечению соответствует бесконечное множество характеристических уравнений $\mathbf{a^2=\lambda a+\lambda^2}$ с произвольными значениями $\lambda=0{,}5h$.

Таким образом, (2.14) – это общее уравнение гармонической рекурсии 2-го порядка, а (1.14) – это уравнение для частного, но чрезвычайно важного и широко распространенного ее случая, случая Золотого Сечения.

15. ***Стоит в (1) вместо h подставить 2d, и от псевдовероятностей не остаётся и следа:***

$$f_{n+1} = 0{,}5(2df_n) + 0{,}5\left(0{,}5\cdot 4d^2 f_{n-1}\right) = df_n + d^2 f_{n-1}.$$

Естественно! Равенство h=2d справедливо только для ЗС. Поэтому после такой подстановки получается уравнение ЗС (равенство (1.14) из п. 14). Рецензенты ходят по кругу между трех берез. Не вижу способа, как помочь им выйти на дорогу…

16. ***Авторы делают допущение [1, п. 4.1]***: «*Гармоническое среднее h двух аттракторов будем считать постоянной величиной, разность d – случайной переменной величиной*». – ***В их обозначениях*** $h=2ab/(a+b)$, $d=b-a$. ***Из постоянства величины h следует 1/a + 1/b = const, и непонятно, как должно выполняться это равенство при случайных (!) переменных величинах a и b.***

Если учесть d=b – a, то из равенства h=2ab/(a + b) следует, что d=2a(h–a)/(2a–h). При фиксированном h и случайным образом выбираемом (в интервале h≥a>0,5h) значении меньшего аттрактора «a» разность d вполне можно считать случайной переменной величиной.

17. ***Понятно, ни о каком обобщении ЗС как числа говорить не приходится.***

ЗС – это не число, а золотое сечение. Число – это золотая константа Ф, и авторы согласны, что эта константа единственная в своем роде. Ее обобщать нельзя. А вот грамотно выражаться (хотя бы в научных статьях) просто необходимо.

18. ***Параллельно в аннотации озвучивается, заинтриговывая своим названием, «энтропия суммы двух слагаемых разностного уравнения (иначе: системы, синтезированной из двух элементов)». Поскольку со «слагаемыми уравнения» не всё понятно, то второе разъяснение (синтез системы из двух элементов) сразу навеивает ассоциации, связанные с бинарным кодом. Хотя, как потом окажется, это вовсе не так.***

Связь с бинарным кодом есть. Вот выдержка из статьи: «Проще всего представить себе, что сумма, представленная этой рекурсией, – это система сообщений, передаваемых с помощью алфавита из двух символов, например, с помощью азбуки Морзе. Допустим, **тире – это первое слагаемое hf_{n+1}, точка – второе слагаемое $0{,}5h^2f_n$**. Если p_1=1, передаются только тире, поскольку p_2=0. Из такой передачи (одни тире) нельзя почерпнуть никакой информации. … Аналогичная ситуация будет при передаче одних только точек, когда p_2=1». Азбука Морзе аналогична бинарному коду.

19. ***В работе [1] даётся необычное определение гармонической пропорции (отличное от устоявшегося тысячелетиями аналога) с коэффициентом 0,5 $(a+b) : b = b : (b-0{,}5h)$ и заявляют, что она обращается «в тождество при любых положительных значениях a и b». Ввиду того, что по их определению h = h(a, b), которое предшествовало определению пропорции, то это и есть тождество, а не пропорция, которую надо решать.***

О пропорции и тождестве мы ответили в п. 4. Здесь же еще раз подчеркнем, что авторы предлагают различать два термина: «гармоническая пропорция» и «золотая пропорция». Первый термин – более «широкий», второй же относится лишь к частному случаю «гармонической пропорции» – классическому случаю ЗС.

20. [**1, п. 1.11**] – «*Гармоническое золотое сечение – деление отрезка произвольной длины на части a и b = aФ... Классическое золотое сечение – частный случай гармонического золотого сечения, для которого... a = Ф*». – ***Никакого различия не наблюдается.***

Различие есть, и оно указано в статье. В общем случае гармонического золотого сечения $a=\lambda\Phi$, то есть аттрактор «а» **в λ=0,5h раз больше** золотой константы $\Phi\approx1{,}618$. При классическом ЗС, когда h=2, аттрактор «а» равен золотой константе Ф.

21. ***Здесь мы также видим истоки частого использования "гармонического среднего":*** *«само название термина "гармоническое среднее" подсказывало возможность использования его в теоретическом исследовании золотого сечения, как неиссякаемого источника вселенской гармонии».*

Заметим, что упомянутый термин не имеет столь близкого отношения к гармонии.

Термин "гармонического среднее" ранее, до нашей работы, действительно не имел отношения к гармонии.

22. «*Четвертое заблуждение: рекуррентное уравнение золотого сечения* 2*-го порядка – это единственное уравнение вида* $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, *о чём можно прочитать в любой* (?) *публикации, посвященной золотому сечению*».

То есть заблуждением считается единственность возвратного уравнения ЗС аддитивной формы (по Фибоначчи). – Довольно категоричное утверждение, и вдобавок ошибочное. Можно порекомендовать для ознакомления работу [12]: «Исходное алгебраическое уравнение, которое назовем обобщенным уравнением гармонической пропорции ("золотого" сечения), … при m=1 действительно приводит к квадратному уравнению "золотого" сечения $x^2-x-1=0$***».***

Еще раз отметим, что вместо $x^2-x-1=0$ у нас – иное, новое квадратное уравнение ЗС ($a^2=\lambda a+\lambda^2$), и ему вполне соответствует «***требование полезности или получения новых знаний и возможного практического применения***» [12].

23. Общее замечание ко всей рецензии: не нужно стремиться оскорбить коллег в дискуссии. Нужно внимательнее изучать рецензируемую работу. От ошибок никто не застрахован. Любить читателя не обязательно, но уважать его – необходимо.