Алексей Стахов

Системы счисления с иррациональными основаниями и новые свойства натуральных чисел

1. Введение

Публикация книги [1] вызвала довольно бурную и неоднозначную реакцию научного сообщества – от восторженных публикаций до обвинений в некорректности использования словосочетания «математика гармонии» и даже в лженауке. Новая атака на «математику гармонии», которую начал всем известный «доктор тех. наук», ведется под лозунгом: никаких новых научных результатов в рамках «математики гармонии» не получено, все эти результаты давно известны в рамках «классической математики».

Настоящая статья открывает серию статей по оригинальным математическим результатам «математики гармонии», которые не существовали в рамках «классической математики». В заметке использованы материалы статьи [2], опубликованной в «Украинском математическом журнале» по рекомендации главного редактора этого журнала, выдающегося математика академика **Юрия Митропольского.**

2. Системы счисления с иррациональными основаниями

Наиболее революционным предложением в современной теории систем счисления по праву можно считать систему счисления, предложенную в 1957 г. американским математиком **Джорджем Бергманом** [3]. Математическое выражение для системы Бергмана имеет очень простой вид:

$$A = \sum_i a_i \Phi^i \tag{1}$$

где A – любое действительное число, a_i – двоичные цифры, 0 или 1 (i = 0, ±1, ±2, ±3, …), Φ^i – вес i-й цифры в системе счисления (1), $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - основание системы счисления (1).

На первый взгляд, из-за простоты выражения (1) может показаться, что нет никакой новизны в системе счисления (1) по сравнению с известными позиционными системами счисления, в частности, двоичной системой счисления, но это только на первый взгляд.

Главная особенность состоит в том, что Бергман использовал иррациональное число $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ («золотая пропорция») в качестве основания своей системы счисления (1).

Именно ее основание $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ определяет все необычные свойства системы (1) с точки зрения представления чисел.

Хорошо известно следующее свойство «золотой пропорция»:

$$\Phi^i = \Phi^{i-1} + \Phi^{i-2} = \Phi \times \Phi^{i-1}, \tag{2}$$

где i = 0, ±1, ±2, ±3, … .

Рассмотрим представления чисел в системе Бергмана (1). Ясно, что сокращенная цифровая запись числа A в системе (1) имеет следующий вид:

$$A = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}. \tag{3}$$

Из (3) вытекает, что сокращенная запись числа A представляет собой двоичную кодовую комбинацию, разделенную запятой на две части, левую часть $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$, соответствующую «весам»: $\Phi^n, \Phi^{n-1}, ..., \Phi^1, \Phi^0 = 1$, и правую часть $a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}$, соответствующую «весам»: $\Phi^{-1}, \Phi^{-2}, ..., \Phi^{-m}$. Заметим, что «веса» Φ^i (i =0, ±1, ±2, ±3, …) связаны между собой математическими соотношениями (2).

Например, рассмотрим двоичную кодовую комбинацию 100101. Ясно, что в системе Бергмана (1) она представляет следующее действительное число:

$$A = 100101 = \Phi^5 + \Phi^2 + \Phi^0. \tag{4}$$

Известно следующее тождество, связывает i-ю степень «золотой пропорции» Φ^i с числами Фибоначчи и Люка:

$$\Phi^i = \frac{L_i + F_i\sqrt{5}}{2} \left(i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\right) \tag{5}$$

Используя тождество (5), мы можем установить, что число A, задаваемое кодовой комбинацией (4), равно:

$$A = 100101 = \frac{11+5\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{16+6\sqrt{5}}{2} = 8 + 3\sqrt{5}. \tag{6}$$

Существенно подчеркнуть, что число (6) является иррациональным числом. Это означает, что мы представили иррациональное число (6) в системе Бергмана (1), в виде кодовой комбинации 100101, состоящей из конечного числа бит!

В частности, основание системы (1) («золотая пропорция») представляется в системе Бергмана (1) традиционным образом, то есть:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 10.$$

Но из нашего предыдущего опыта мы знаем, что невозможно представить иррациональное число в виде цифровой записи, использующей конечное число цифр.

Именно поэтому возможность представления некоторых иррациональных чисел (степеней «золотой пропорции» и их сумм), а также, как будет показано ниже, всех натуральных чисел с использованием конечной совокупности двоичных цифр есть *первый неожиданный результат* системы Бергмана (1), который вступает в противоречие с нашими традиционными представлениями о системах счисления.

Покажем теперь, как можно получить все «золотые» представления натуральных чисел в системе Бергмана (1). Для этого введем две специфические операции над сокращенными кодовыми изображениями чисел типа (3) в системе Бергмана (1). Эти операции основаны на тождестве (2) и называются **«сверткой»** (**011=100**) и **«разверткой»** (**100=011**) двоичных разрядов. Заметим, что выполнение «свертки» и «развертки» не приводит к изменению числа, представляемого кодовой комбинацией (3).

Начнем с числа 1. Оно может быть представлено в системе Бергмана следующим образом:

$$1=\Phi^0=1{,}00. \qquad (7)$$

Заметим, что в «золотом» представлении (7) запятая отделяет 0-й разряд, имеющий вес Φ^0, от разрядов с отрицательными индексами.

Затем, используя «развертку» (**100=011**), мы можем представить число (7) следующим образом:

$$1=\Phi^0=0{,}11=\Phi^{-1}+\Phi^{-2}. \qquad (8)$$

А теперь добавим бит 1 в 0-й разряд «золотого» представления (8). В результате получим «золотое» представление числа 2:

$$2 = 1{,}11. \qquad (9)$$

Применяя операцию «свертки» (**011=100**) к старшим разрядам «золотого» представления (9), мы получаем новое «золотое» представление числа 2:

$$2=10{,}01=\Phi^1+\Phi^{-2}. \qquad (10)$$

Применяя подобную процедуру, к последующим числам натурального ряда получим следующие «золотые» представления чисел 3, 4 и 5:

$$3=100{,}01=\Phi^2+\Phi^{-2}.$$

$$4=101{,}01=\Phi^2+\Phi^0+\Phi^{-2}$$

$$5=1000{,}1001=\Phi^3+\Phi^{-1}+\Phi^{-4}$$

Продолжая этот процесс до бесконечности, можно получить «золотые» представления всех натуральных чисел в системе Бергмана (1), что дает нам основание сформулировать следующее утверждение:

Теорема 1. Любое натуральное число в системе Бергмана представляется в виде конечной суммы степеней золотой пропорции.

Это утверждение, возможно, представляет собой ***второй неожиданный результат,*** который задает ни что иное, как новое свойство натуральных чисел.

А теперь возвратимся на 2,5 тысячелетия назад и представим себе реакцию пифагорейцев на это утверждение. Согласно главной доктрине пифагорейцев **«Все есть число»** в основе мироздания лежат натуральные числа и их отношения, так как любую вещь в природе можно выразить как отношение двух натуральных чисел (хотя после открытия «несоизмеримых отрезков» это представление пифагорейцев и было подвергнуто сомнению, в результате чего и появилось понятие *иррационального числа*). Но согласно Теореме 1 любое натуральное число N может быть представлено в виде конечной суммы степеней «золотой пропорции» в виде:

$$N = \sum_i a_i \Phi^i \qquad (11)$$

Из этого рассуждения с необходимостью вытекает новая доктрина, которую пифагорейцы немедленно сформулировали бы, если бы знали о Теореме 1: **«Все есть золотая пропорция»!**

Таким образом, выражение (11) объединяет две наиболее важные концепции пифагорейцев: «Все есть число» и «золотое сечение», которое было одним из выразителей гармонии мироздания!

Возникает вопрос: могло ли это математическое открытие появиться в рамках «классической математики», весьма критически относящейся к «золотой пропорции»? Ответ однозначный: нет, конечно!

До Бергмана систем счисления с иррациональными основаниями в математике не существовало. Поэтому мы должны признать, что система Бергмана является крупнейшим современным открытием в области систем счисления, сравнимым разве что с открытием позиционного принципа представления чисел, а также десятичной и двоичной систем счисления. Она переворачивает наши представления о системах счисления; более того - соотношение между рациональными и иррациональными числами. В этой системе на первый план выдвигается иррациональное число «золотая пропорция», которое становится основанием всех чисел, так как с его помощью может быть представлено любое действительное число! Но в этом утверждении уже содержатся начала новой («золотой») теории чисел [2]!

3. Коды золотой пропорции

В 1980 г. автором получено следующее обобщение системы Бергмана, изложенное в статье [4].

Рассмотрим бесконечное множество геометрических отрезков, являющихся степенями золотой *p*-пропорции Φ_p:

$$G_p = \left\{\Phi_p^i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\right\} \qquad (12)$$

Напомним, что золотая *p*-пропорция Φ_p, введенная в [5], есть положительный корень следующего алгебраического уравнения:

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0. \qquad (13)$$

При $p=1$ уравнение (13) сводится к следующему алгебраическому уравнению:

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0, \qquad (14)$$

корнем которого является «золотая пропорция» $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Заметим, что все степени Φ_p^i в выражении (12) связаны между собой математическим тождеством:

$$\Phi_p^i = \Phi_p^{i-1} + \Phi_p^{i-p-1} = \Phi_p \times \Phi_p^{i-1} \qquad (15)$$

Используя множество (12), можно «сконструировать» следующий способ позиционного представления чисел [4,6]:

$$A=\sum_i a_i \Phi_p^i, \qquad (14)$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ и $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Заметим, что выражение (14) «генерирует» бесконечное количество позиционных способов представления чисел (систем счисления), так как каждому p (p=0, 1, 2, 3, …) соответствует своя система счисления типа (14). В частности, при p=0 основание $\Phi_p = \Phi_0 = 2$ и система счисления (14) сводится к классической двоичной системе:

$$A=\sum_i a_i 2^i, \qquad (15)$$

которая лежит в основе современной информационной технологии.

Для случая p=1 основанием системы счисления (14) является классическая «золотая пропорция» $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и система (14) сводится к системе Бергмана (1).

Таким образом, мы можем рассматривать позиционный способ представления чисел, задаваемый (14), как весьма широкое обобщение как двоичной системы (15), так и системы Бергмана (1).

4. Z-свойство натуральных чисел

Но еще больший восторг у пифагорейцев вызвало бы новое свойство обожаемых ими натуральных чисел, доказанное в [2].

Для доказательства этого свойства рассмотрим еще раз представление натуральных чисел в виде (11), которое мы будем называть Φ*-кодом натурального числа N* [2].

Согласно Теореме 1 сумма (11) для любого натурального N является конечной, и этот далеко не тривиальный математический результат сам по себе представляет определенный интерес и приоткрывает еще одну «тайну» натуральных чисел.

Рассмотрим еще раз выражение (5), связывающее числа Фибоначчи F_n и числа Люка L_n с «золотой пропорцией» Φ.

Напомним, что числа Фибоначчи и Люка представляют собой две бесконечные числовые последовательности, простирающиеся от -∞ до +∞, то есть, задаваемые как для положительных, так и для отрицательных значений индексов n (см. Табл. 1).

Таблица 1. Числа Фибоначчи и Люка

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
L_{-n}	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	47	-76	123

А теперь подставим выражение (5) вместо Φ^i в выражении (11). В результате получим следующую формулу:

$$N = \frac{1}{2}\left(A + B\sqrt{5}\right), \tag{16}$$

где

$$A = \sum_i a_i L_i \tag{17}$$

$$B = \sum_i a_i F_i\ . \tag{18}$$

Выражение (16) может быть также записано в виде:

$$2N = A + B\sqrt{5}\ . \tag{19}$$

Заметим, что двоичные цифры a_i в выражениях (17), (18) совпадают с соответствующими двоичными цифрами в выражении (11), задающем Φ-код натурального числа N.

Рассмотрим теперь выражение (19). Если принять во внимание, что суммы (17), (18) всегда являются целыми числами, то возникает вопрос: при каких условиях выражение (19) может быть справедливым в общем случае, то есть, для любого натурального N? Ответ очень простой: это возможно только в том случае, если член A, задаваемый (17), является четным числом, равным $2N$, а член B, задаваемый (19), тождественно равен 0, то есть:

$$A = \sum_i a_i L_i = 2N \tag{20}$$

$$B = \sum_i a_i F_i = 0\ . \tag{21}$$

А теперь сравним выражения (11) и (21). Так как двоичные цифры a_i в рассмотренных выражениях совпадают, то это означает, что выражение (21) получается из выражения (11) путем простой замены всех степеней золотой пропорции Φ^i в формуле (11) соответствующими числами Фибоначчи F_i.

Сформулируем результат, вытекающий из сравнения выражений (11) и (21), в виде следующей теоремы.

Теорема 2 (*Z*-свойство натуральных чисел). Если в выражении для Φ-кода любого натурального числа N, задаваемого (11), заменить все степени золотой пропорции Φ^i соответствующими числами Фибоначчи F_i (i=0, ±1, ±2, ±3, …), то возникающая при этом сумма $\sum_i a_i F_i$ тождественно равна нулю независимо от исходного натурального числа N, то есть, $\sum_i a_i F_i = 0$.

Примем без доказательства еще одну теорему [2], которая является обобщением Теоремы 2.

Теорема 3 (Z_p-свойство натуральных чисел). Если представить в виде (14) некоторое натуральное число N, то есть, записать $N=\sum_i a_i\Phi_p^i$, где $a_i\in\{0,1\}$, Φ_p – золотая p-пропорция, i=0, ±1, ±2, ±3, …, p=1, 2, 3, … , а затем в этом выражении заменить все степени золотой p-пропорции Φ_p^i соответствующими p-числами Фибоначчи $F_p(i)$, то возникающая при этом сумма $\sum_i a_i F_p(i)$ всегда тождественно равна нулю независимо от исходного натурального числа N, то есть, $\sum_i a_i F_p(i)=0$.

Существенно подчеркнуть, что Теоремы 2 и 3 справедливы только для натуральных чисел!

Это означает, что спустя 2,5 тысячелетия после начала изучения натуральных чисел нам удалось открыть новые свойства натуральных чисел, названных *Z*- или *Z_p-свойством* (от слова «Zero» - нуль) [2]. И это стало возможным только благодаря введению новых способов представления натуральных чисел, задаваемых (1) и (14). Это означает, что сформулированный выше новый подход к геометрическому определению действительных чисел, задаваемый (1) и (14), может стать началом нового направления в теории чисел [2].

Заключение

Изложенные в статье новые математические результаты затрагивают основания математики, так как являются началом новой («золотой») теории чисел [2]. Новые системы счисления не просто «математическая забава». Как показано в [7], эти системы счисления могут стать основой «микропроцессоров Фибоначчи» как одной из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем.

Автор настоящей заметки надеется, что каждый студент, прослушавший курс высшей математики, вполне способен понять и оценить новизну и оригинальность научных результатов, изложенных в настоящей статье и в статье [7].

«Математика гармонии» содержит новые математические результаты, которые не были получены в рамках «классической математики».

В настоящее время происходит сближение «математики гармонии» с «классической математикой», что станет началом процесса «гармонизации математики», о котором говорит Денис Клещев в статье [8]. И если наш «доктор тех. наук» не способен понять оригинальность и значение «математики гармонии» для дальнейшего развития науки и математики, то это говорит лишь о его профессиональной непригодности. И я рекомендовал бы ему заняться какой-то другой полезной деятельностью, не связанной с математикой: бизнесом, торговлей, выращиванием огурцов и т.д.

Литература

1. Alexey Stakhov. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science”. World Scientific, 2009
2. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
3. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
4. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г.
5. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
6. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
7. А.П. Стахов, Микропроцессоры Фибоначчи - как одна из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16759, 16.08.2011
8. Д. Клещев, О былых и грядущих богах, жрецах и пророках науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16762, 17.08.2011