А. П. Стахов

К обоснованию «золотой» теории чисел: *F*- и *L*-коды натуральных чисел

Аннотация

«Элементарная теория чисел», описанная в «Началах» Евклида, начинается с Евклидового определения натурального числа, которое порождает как сами натуральные числа, так и всю проблематику их теории. В настоящей работе предлагается обоснование «золотой» теории чисел, основанной на системе Бергмана и его обобщении – кодах золотой пропорции. Одним из важных результатов такого исследования является обнаружение новых способов позиционного двоичного представления натуральных чисел, названных *F*- и *L*-кодами. Эти коды могут привести к созданию новой компьютерной арифметики.

1. Введение

Как известно, одним из важнейших начальных разделов математики является **элементарная теории чисел.** Если возвратиться к истокам *элементарной теории чисел,* которая берет свое начало в математике древних греков, то мы увидим, что она начинается со следующего определения натурального числа, основанного на геометрическом подходе и описанного в «Началах» Евклида.

Пусть

$$S = \{1, 1, 1, \ldots\} \tag{1}$$

представляет собой бесконечное множество геометрических отрезков, называемых «*монадами»* или *единицами.* Тогда согласно Евклиду натуральное число N определяется следующим образом:

$$N = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{N} \tag{2}$$

Несмотря на кажущуюся простоту такого определения, оно сыграло огромную роль в развитии теории чисел и лежит в основе многих полезных математических понятий, в частности, понятий *простого* и *составного* числа, *умножения, деления*, а также понятий *делимости* и *сравнения,* которые являются одними из основных понятий элементарной теории чисел, то есть, определение (2) «порождает» как сами натуральные числа, так и всю проблематику их теории.

Любопытно подчеркнуть, что в информатике определение (2) широко используется как простейший способ представления натуральных чисел. Оно имеет прямое отношение к так называемому «унитарному коду».

В статье из Википедии [1] мы находим следующее определение «элементарной теории чисел:

«*В* ***элементарной теории чисел*** *целые числа изучаются без использования методов других разделов математики. Такие вопросы, как делимость целых чисел,* *алгоритм Евклида для вычисления наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, разложение числа на простые множители, построение магических квадратов, совершенные числа, числа Фибоначчи, малая теорема Ферма, теорема Эйлера, задача о четырёх кубах относятся к этому разделу».*

Любопытно, что в этом определении числа Фибоначчи отнесены к «элементарной теории чисел». По-видимому, «золотое сечение» также относится к этому же разделу математики, но при этом новые результаты, основанные на «золотом сечении» и описанные в работах [2-8], могут привести к переосмысливанию элементарной теории чисел.

Настоящая статья является продолжением статьи [6] и в развитие статьи [2] ставит своей задачей дать обоснование новой («золотой») теории чисел.

2. Конструктивный подход к определению числа

Известен «конструктивный подход» к определению числа, согласно которому всякое «конструктивное» действительное число A является некоторым математическим объектом, задаваемым с помощью следующей математической формулы:

$$A = \sum_i a_i 2^i , \tag{3}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ и $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Определение числа, задаваемое (3), имеет следующую геометрическую интерпретацию. Пусть

$$B = \left\{ 2^i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \right\} \tag{4}$$

множество геометрических отрезков длины 2^i. Тогда «конструктивными» действительными числами называются все математические объекты, которые могут быть представлены в виде конечной суммы геометрических отрезков из (4) в виде (3). Заметим, что в определениях (2) и (3) неявно используется понятие *потенциальной бесконечности* или *потенциальной осуществимости,* то есть, количество членов в суммах (2), (3) всегда конечно, но потенциально неограниченно.

Ясно, что определение (3) выделяет из множества действительных чисел только некоторую часть чисел, которые могут быть представлены в виде суммы (3). Такие числа мы будем называть *конструктивными.* Все остальные действительные числа, которые не могут быть представлены в виде конечной суммы (3), являются *неконструктивными* (такие числа нельзя «сконструировать»). Ясно, что к «неконструктивным» числам в смысле (3) относятся, прежде всего, все иррациональные числа, в частности, главные математические константы π и e, число $\sqrt{2}$, «золотая пропорция» и т.д. Но в рамках определения (3) к разряду «неконструктивных» мы должны отнести и некоторые «периодическиt дроби» (например, 2/3, 3/7 и т.д.), которые не могут быть представлены в виде конечной суммы (3).

Заметим, что такой подход к числам, то есть, их деление на «конструктивные» и «неконструктивные», коренным образом отличается от принятого в математике деления чисел на «рациональные» и «иррациональные», так как к разряду «неконструктивных» относится часть рациональных чисел, в частности, «периодические дроби».

Заметим, что хотя определение (3) значительно ограничивает множество действительных чисел, это никак не умаляет его значение с «практической», вычислительной точки зрения. Легко доказать, что любое «неконструктивное» действительное число может быть представлено в виде (3) приближенно, причем ошибка приближения Δ будет неограниченно уменьшаться по мере увеличения числа членов в (3), однако $\Delta \neq 0$ для «неконструктивных» действительных чисел. По существу, в современных компьютерах мы пользуемся только «конструктивными» числами, задаваемыми (3), и это нас вполне устраивает, потому что любое «неконструктивное» число может быть представлено в виде (3) с погрешностью, потенциально стремящейся к 0.

3. Определение Ньютона

В течение многих тысячелетий математики развивали и уточняли понятие действительного числа. В 17-м веке в период зарождения современной науки и математики разрабатывается ряд методов изучения непрерывных процессов, и понятие действительного числа вновь выходит на передний план. Наиболее отчетливо новое определение этого понятия дается одним из основоположников математического анализа **И. Ньютоном** в его «Всеобщей Арифметике»:

«Под числами мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу».

Эта формулировка дает нам единое определение действительного числа, рационального или иррационального. Если теперь рассмотреть «Евклидово определение числа» (2) с точки зрения «определения Ньютона», то в качестве «другой величины того же рода, принятой за единицу», выступает «монада». В двоичной системе счисления (3) роль «единицы», играет число 2, то есть, основание системы счисления.

4. Новое конструктивное определение действительного числа

Рассмотрим теперь бесконечное множество геометрических отрезков, являющихся степенями золотой p-пропорции Φ_p:

$$G_p = \left\{ \Phi_p^i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \right\} \tag{5}$$

где все степени Φ_p^i связаны между собой математическим тождеством:

$$\Phi_p^i = \Phi_p^{i-1} + \Phi_p^{i-p-1} = \Phi \times \Phi_p^{i-1} \tag{6}$$

Используя множество (5), можно «сконструировать» следующий метод позиционного представления чисел:

$$A = \sum_i a_i \Phi_p^i, \tag{7}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ и $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Заметим, что выражение (7) «генерирует» бесконечное количество позиционных способов представления чисел (систем счисления), так как каждому p (p=0, 1, 2, 3, …) соответствует своя система счисления типа (7). Заметим, что при p=0 основание $\Phi_p = \Phi_0 = 2$ и система счисления (7) сводится к классической двоичной системе (3). Для случая p=1 основанием системы счисления (7) является классическая «золотая пропорция» $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и система (7) сводится к системе Бергмана [3]:

$$A = \sum_i a_i \Phi^i \tag{8}$$

Заметим, что выражение (7) разделяет все действительные числа на две группы: «конструктивные числа», которые могут быть представлены в виде конечной суммы степеней золотой p-пропорции в виде (7), и «неконструктивные» числа, которые не могут быть представлены в виде суммы (7).

Ясно, что все степени золотой p-пропорции типа $\Phi_p^i, i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ могут быть представлены в виде (7). Например,

$$\Phi_p^3 = 1000; \quad \Phi_p^2 = 100; \quad \Phi_p^1 = 10; \quad \Phi_p^{-1} = 0{,}1; \quad \Phi_p^{-2} = 0{,}01; \quad \Phi_p^{-3} = 0{,}001$$

Это означает, что все иррациональные числа типа $\Phi_p^i, i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ (степени золотой p-пропорции) являются «конструктивными числами» в рамках определения (7). Из определения (7) также вытекает, что все действительные числа, являющиеся суммами степеней золотой p-пропорции, также являются «конструктивными числами» в смысле (7). Например, действительное число $A = \Phi_p^2 + \Phi_p^{-1} + \Phi_p^{-3}$ в соответствии с (7) может быть представлено в виде следующей кодовой комбинации:

$$A = 100{,}101.$$

В работах [2,6] доказано, что в рамках определений (7), (8) все натуральные числа являются «конструктивными», то есть, каждое натуральное число N может быть представлено в виде конечных сумм (7) и (8). В этих же работах установлено еще одно необычное свойство натуральных чисел, названное Z-свойством. Применительно к системе Бергмана (8) суть этого свойства задается следующей теоремой:

Теорема 1 (*Z*-свойство натуральных чисел). Если в выражении для Φ-кода любого натурального числа *N,* задаваемого выражением

$$N = \sum_i a_i \Phi^i, \; i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \tag{9}$$

заменить все степени золотой пропорции Φ^i соответствующими числами Фибоначчи F_i (i=0, ±1, ±2, ±3, …), то возникающая при этом сумма $\sum_i a_i F_i$ тождественно равна нулю независимо от исходного натурального числа N, то есть,

$$\sum_i a_i F_i = 0. \tag{10}$$

5. *F*- и *L*-коды натуральных чисел

Z-свойство натуральных чисел может быть использовано для создания новых двоичных представлений натуральных чисел. В работах [2,6] показано, что, если воспользоваться известным тождеством

$$\Phi^i = \frac{L_i + F_i\sqrt{5}}{2}\left(i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\right), \tag{11}$$

то выражение (9) может быть представлено в следующем виде:

$$N = \frac{1}{2}\left(A + B\sqrt{5}\right), \tag{12}$$

где

$$A = \sum_i a_i L_i \tag{13}$$

$$B = \sum_i a_i F_i . \tag{14}$$

Однако, принимая во внимание Z-свойство, задаваемое (10), мы можем представить выражение (12) также в следующем виде:

$$N = \frac{1}{2}\left(A + B\right), \tag{15}$$

где A определяется выражением (13), а B - выражением (14). Не будем забывать, что, согласно Z-свойству (10), число B для любого натурального N тождественно равно нулю!

Принимая во внимание выражения (13) и (14), а также тот факт, что все двоичные коэффициенты $a_i\left(i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\right)$ в этих выражениях совпадают, мы можем представить выражение (15) в следующем виде:

$$N = \sum_i a_i \frac{L_i + F_i}{2}. \tag{16}$$

Используя известное тождество

$$F_{i+1} = \frac{L_i + F_i}{2} , \tag{17}$$

мы можем записать выражение (15) в виде:

$$N = \sum_i a_i F_{i+1} . \tag{18}$$

Таким образом, в результате проведенных выше достаточно простых преобразований мы получили новое позиционное представление натурального числа N, которое будем называть *F-кодом натурального числа N* [2]. Таким образом, F-код представляет собой двоичное позиционное представление натурального числа N, в котором весами разрядов являются числа Фибоначчи F_{i+1}.

А теперь сравним выражения (9) и (18). Так как двоичные цифры a_i в этих выражениях совпадают для любого i=0, ±1, ±2, ±3, … , то отсюда вытекает, что F-код числа N может быть получен из Φ-кода (9) того же самого натурального числа N путем простой замены всех степеней золотой пропорции Φ^i в формуле (9) на соответствующие числа Фибоначчи F_{i+1}, где i=0, ±1, ±2, ±3, …

Представим теперь F-код числа N, задаваемый (18), в следующей виде:

$$N = \sum_i a_i F_{i+1} + 2B, \tag{19}$$

где член B определяется выражением (14). Такое представление не изменяет числа N, поскольку B=0. Но тогда выражение (19) может быть представлено в следующем виде:

$$N = \sum_i a_i (F_{i+1} + 2F_i). \tag{20}$$

А теперь обратимся к следующему известному тождеству:

$$L_{i+1} = F_{i+1} + 2F_i. \tag{21}$$

Принимая во внимание тождество (21), выражение (20) может быть представлено в следующем виде:

$$N = \sum_i a_i L_{i+1}. \tag{22}$$

Будем называть выражение (22) *L-кодом натурального числа N* [2]. Таким образом, L-код представляет собой двоичное позиционное представление натурального числа N, в котором весами разрядов являются числа Люка L_{i+1}.

. Так как двоичные цифры в выражениях (9) и (22) совпадают, отсюда вытекает, что L-код числа N может быть получен из Φ-кода (9) того же самого натурального числа N путем замены степеней золотой пропорции Φ^i в формуле (9) соответствующими числами Люка L_{i+1}, где i = 0, ±1, ±2, ±3, ... Ясно, что L-код числа N может быть получен также из F-кода того же самого числа N путем замены чисел Фибоначчи F_{i+1} в формуле (18) числами Люка L_{i+1} .

Таким образом, из проведенных рассуждений вытекает, что существуют три различных способа двоичного позиционного представления одного и того же натурального числа N: Φ-код (9), задающий натуральное число N в виде конечной суммы степеней золотой пропорции, F-код (18), задающий натуральное число N в виде суммы чисел Фибоначчи, и L-код (22), задающий натуральное число N в виде суммы чисел Люка; при этом по форме двоичной записи все эти коды совпадают.

В качестве примера рассмотрим представление десятичного числа 10 (основание десятичной системы) в системе Бергмана (9):

$$10=10100,0101. \tag{23}$$

Для Φ-кода (9) «золотое» представление (23) имеет следующую алгебраическую интерпретацию:

$$10 = \Phi^4 + \Phi^2 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4}. \qquad (24)$$

Используя формулу

$$\Phi^i = \frac{L_i + F_i\sqrt{5}}{2} \left(i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\right), \qquad (25)$$

мы можем представить сумму (24) в следующем виде:

$$10 = \frac{L_4 + F_4\sqrt{5}}{2} + \frac{L_2 + F_2\sqrt{5}}{2} + \frac{L_{-2} + F_{-2}\sqrt{5}}{2} + \frac{L_{-4} + F_{-4}\sqrt{5}}{2}. \qquad (26)$$

Воспользуемся теперь известным свойством чисел Фибоначчи и Люка, связывающим числа Фибоначчи и Люка с положительными и отрицательными индексами:

$$L_{-2}=L_2;\ L_{-4}=L_4;\ F_{-2}=-F_2;\ F_{-4}=-F_4. \qquad (27)$$

Тогда с учетом (27) выражение (26) может быть записано в следующем виде:

$$10 = \frac{2(L_4 + L_2)}{2} = L_4 + L_2 = 7 + 3,$$

то есть, выражение (24), действительно, выражает число 10.

Теперь рассмотрим интерпретацию «золотого» представления (23) в виде F- и L-кодов:

$$F - \text{код}: 10 = F_5 + F_3 + F_{-1} + F_{-3} = 5 + 2 + 1 + 2$$
$$L - \text{код}: 10 = L_5 + L_3 + L_{-1} + L_{-3} = 11 + 4 - 1 - 4$$

Также мы можем проверить справедливость Z-свойства для «золотого» представления (23). Если мы заменим степени Φ^i в (24) соответствующими числами Фибоначчи F_i, мы получим следующий результат:

$$Z - \text{свойство}: 10 = F_4 + F_2 + F_{-2} + F_{-4} = 3 + 1 + (-1) + (-3) = 0$$

6. Операция сдвига «золотых» представлений в *Ф-, F-* и *L*-кодах

Как известно, операция сдвига играет центральную роль в компьютерной арифметике, в частности, при выполнении арифметических операций умножения и деления. Поэтому представляет интерес изучение операции сдвига «золотых» представлений в *Ф-, F-* и *L*-кодах.

В общем виде «золотое» двоичное представление натурального числа N в *Ф-, F- L*-кодах принимает форму следующего двоичного представления:

$$N = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}. \qquad (28)$$

Из (28) вытекает, что сокращенная запись числа N представляет собой двоичную кодовую комбинацию, разделенную запятой на две части, левую часть $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ и правую часть $a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}$. Левая часть соответствует «весам»: $\Phi^n, \Phi^{n-1}, \ldots, \Phi^1, \Phi^0 = 1$ (для Ф-кода), $F_n, F_{n-1}, \ldots, F_1 = 1, F_0 = 0$ (для F-кода) и $L_n, L_{n-1}, \ldots, L_1 = 1, L_0 = 2$ (для L-кода), а правая часть соответствует «весам»: $\Phi^{-1}, \Phi^{-2}, \ldots, \Phi^{-m}$ (для Ф-кода), $F_{-1}, F_{-2}, \ldots, F_{-n}$ (для F-кода) и $L_{-1}, L_{-2}, \ldots, L_{-n}$ (для L-кода).

Начнем с Φ-кода. Здесь все очень просто. Сдвиг «золотого» представления (28) числа N в Φ-коде (9) на k разрядов влево (в сторону старших разрядов) соответствует умножению исходного числа N на k-ю степень «золотой пропорции» Φ^k, в то время как сдвиг на k разрядов вправо (в сторону младших разрядов) соответствует умножению исходного числа N на ($-k$)-ю степень «золотой пропорции» Φ^{-k}. Это свойство используется в «золотой» арифметике для представления чисел в форме с «плавающей запятой» [9].

Ситуация с F- и L-кодами сложнее, но она разрешима. Ее решение сводится к двум теоремам, доказанным в книге [8].

Теорема 2. Сдвиг кодовой комбинации (28), интерпретируемой как F-код (18), на k разрядов влево (то есть, в сторону старших разрядов), соответствует умножению числа N на число Фибоначчи F_{k+1}, то есть, к получению числа

$$N_{(k)} = \sum_i a_i F_{i+k+1} = F_{k+1} \times N. \tag{28}$$

При этом ее сдвиг на k разрядов вправо (то есть, в сторону младших разрядов) соответствует умножению числа N на число Фибоначчи F_{-k+1}, то есть, к получению числа

$$N_{(-k)} = \sum_i a_i F_{i-k+1} = F_{-k+1} \times N. \tag{29}$$

Рассмотрим формулу (29). Для случая k=1 (сдвиг влево на один разряд) формула (29) принимает следующий вил:

$$\sum_i a_i F_i = F_0 \times N. \tag{30}$$

Однако, число Фибоначчи F_0=0 и, следовательно, формула (29) сводится к формуле (10), задающей Z-свойство.

Заметим, что Z-свойство в данной ситуации играет роль основного контрольного соотношения для F-кода. Для проверки контрольного соотношения достаточно сдвинуть F-код на один разряд вправо и затем вычислить значение получаемого при этом числа. Согласно Z-свойству, это число должно быть тождественно равным 0 для любого исходного натурального числа.

Теорема 3. Сдвиг кодовой комбинации (28), интерпретируемой как L-код (22), на k разрядов влево (то есть, в сторону старших разрядов), соответствует умножению числа N на число Люка L_{k+1}, то есть, к получению числа

$$N_{(k)} = \sum_i a_i L_{i+k+1} = L_{k+1} \times N. \tag{31}$$

При этом ее сдвиг на k разрядов вправо (то есть, в сторону младших разрядов) соответствует умножению числа N на число Люка L_{-k+1}, то есть, к получению числа

$$N_{(-k)} = \sum_i a_i L_{i-k+1} = L_{-k+1} \times N. \tag{32}$$

Следует отметить, что доказательство Теорем 2 и 3 не может быть сделано в рамках «классической математики», так как оно основывается на некоторых далеко не тривиальных тождествах, установленных в рамках «теории чисел Фибоначчи» [10], которая является составной частью «математики гармонии» [8]. Одно из них имеет вид:

$$F_{i+1+k}=F_kF_i+F_{k+1}F_{i+1}. \quad (33)$$

7. Практические приложения *F*- и *L*-кодов

Основное практическое приложение состоит в том, что на основе ***F*- и *L*-кодов** может быть создана оригинальная самоконтролирующаяся арифметика, в которой контроль арифметических операций осуществляется на основе Z-свойства. При этом установленное выше свойство *F*- и *L*-кодов, возникающее при сдвигах этих кодов, может быть использована для создания новых методов умножения и деления чисел, которые в своих истоках восходят к древнеегипетской арифметике, которая при умножении и делении использовала «метод удвоения» [7].

Заключение

Таким образом, основной итог исследований, представленных в работах [2-8], состоит в обосновании возможности развития «золотой» теории чисел, которая основывается на новом определении действительного числа, задаваемого (7), частным случаем которого является система Бергмана [3]. Новые способы двоичного позиционного представления натуральных чисел (*F*- и *L*-коды) могут привести к созданию новых компьютерных арифметик. Следует подчеркнуть, что полученные в настоящей статье математические результаты никак не могли быть получены в рамках «классической математики». Они основываются на тождествах, полученных в рамках «теории чисел Фибоначчи» [9], которая является составной частью «математики гармонии» [8]. Утверждение о том, что эти результаты были известны в «классической математике» свидетельствует лишь о профессиональной непригодности авторов подобных заявлений.

Литература

1. Теория чисел. Википедия – свободная энциклопедия http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB
2. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
3. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
4. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г.
5. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
6. А.П. Стахов, Системы счисления с иррациональными основаниями и новые свойства натуральных чисел // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16778, 24.08.2011

7. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
8. Alexey Stakhov. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science”. World Scientific, 2009
9. А.П. Стахов, Микропроцессоры Фибоначчи - как одна из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16759, 16.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321212.htm
10. Vajda, S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. Ellis Horwood limited (1989).