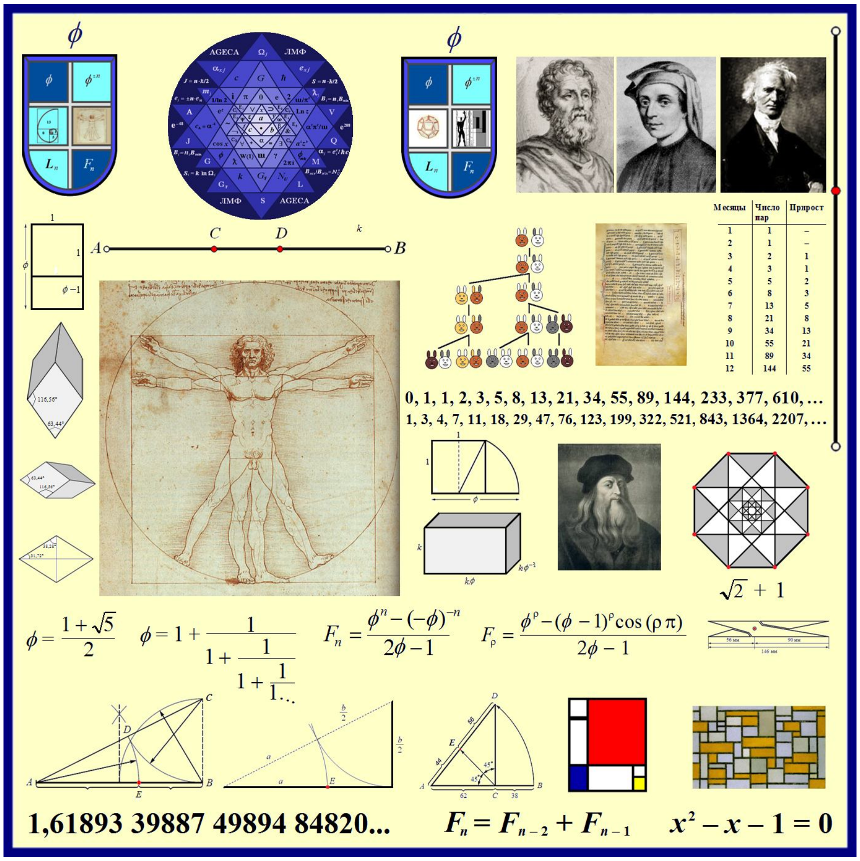
Грант Аракелян

Теория ЛМФ и принцип золотого сечения

***К**раеугольным камнем мировой гармонии, без веры в которую естественнонаучное мышление лишилось бы большей части своей привлекательности, является математика. Известно, что путь от общих положений до конкретной их реализации часто долог, извилист и неоднозначен. Потому-то так труден вопрос, каким всё же образом математическая первооснова приобретает характер селективного формообразующего принципа для живой и неживой природы. **Принцип золотого сечения** предоставляет, быть может, наилучшую возможность для анализа подобных проблем. В силу его совершенно особого статуса, а главным образом из-за соотнесённости с фундаментальными математическими константами (ФМК), с положениями теории ЛМФ, вкратце представленной во Введении и Части I настоящей работы, подробное обсуждение этого принципа и всего, что с ним связано, представляется существенным и важным.*

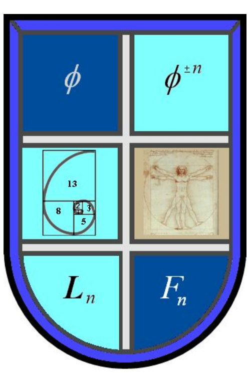
***Ф**ундаментальная физическая теория – мечта многих поколений исследователей. ЛМФ – попытка осуществить эту мечту в виде логически строгой, математически завершенной системы, соответствующей имеющимся экспериментальным данным и допускающей (частично уже подтвердившиеся) прогнозы и эмпирическую верификацию. Это базисная теория физического мира, реализующая идею единства математической логики (Л), числовой математики (М) и фундаментальной физики (Ф). Её корневая структура начинается с логических атомов и завершается обобщёнными физическими законами сохранения, изменения и квантования. В рамках теории ЛМФ получен удивительный результат для постоянной Ферми. Решается ряд важнейших задач, в частности определение численного значения постоянной тонкой структуры, времени жизни мюона и других физических констант, выявление границ физического мира с использованием нового космического параметра – безразмерной константы порядка 10^{125}, получение массовой формулы для частиц определённого типа, **обобщение принципа золотого сечения**.*

***Т**еория ЛМФ по идее не только снабжает необходимым инструментарием для теоретического определения любой известной физической постоянной и не только приписывает с ограниченной или неограниченной точностью истинное числовое значение каждой величине. В свете теории ЛМФ некоторые изученные казалось бы вдоль и поперек математические величины предстают в новом качестве, приобретают дополнительные, ранее не известные характеристики. В этом назначение Части II настоящей работы, где изложение исторических фактов и подробное рассмотрение формальных свойств числа ϕ носит иллюстративный характер и подчинено решению основной задачи: выявлению связей между ϕ и исходными ФМК, анализу принципа золотого сечения с точки зрения общих принципов и идей, изложенных в Части I. По сути ставится задача построения **нетрадиционной математической теории золотой пропорции.** Это построение должно быть ответвлением теории ЛМФ и призвано не только подтвердить её возможности, но и осветить некоторые ключевые вопросы, которые в обычной трактовке золотого сечения кажутся загадочными.*



Глава 5. Принцип золотого сечения

Глава 5. Принцип золотого сечения



Числа и величины играют первостепенную роль в понимании и объяснении окружающего нас мира, его прошлого, настоящего и будущего, структуры и механизмов развития. С помощью числовых моделей и абстрактных математических систем выявляются и порой удивительно хорошо описываются присущие природе гармония и простота. Характерно, что на всех этапах истории человеческого познания отчётливо проступает стремление к выделению определённых чисел как наиболее значимых. Если говорить о целых числах, то чаще других, вероятно, встречаются числа от 1 до 13 включительно, кроме того 40, степени десяти, 108 – сакральное число буддизма и других религиозно-философских учений, числа с повторяющимися знаками типа 33 или 666 и некоторые другие. Многие из этих чисел считались священными у народов древнего мира, им придавалось сакральное значение, приписывалась мистическая сила, на них строилась числовая магия, они иногда отождествлялись с богами, а боги отождествлялись с ними [Аристотель; Ван дер Варден; Thorndike; Menninger]. *Современный исследователь в своем поклонении числам редко так далеко* *заходит. Вместе с тем в наши дни математика и её приложения занимают более значительное место в жизни общества чем допустим при вавилонских магах или Пифагоре. А главное – мощь аппарата современной математики даёт несравненно бо́льшие возможности не только для решения теоретических и практических задач, но и для более глубокого проникновения в природу вещей, для истинного постижения мира посредством чисел и числовых моделей. В этом отношении современная математика более плодотворна и эффективна, чем её античная предшественница, хотя не так громко заявляет о своих притязаниях.*

У*же в древнем мире наряду с целыми числами выделяются в качестве значимых и некоторые нецелые числа. Число золотого сечения ϕ, история которой тянется из глубокой древности в современность, это – одна из немногих известных нам величин, которой по всей видимости можно приписать выходящее за рамки земного космологическое, вселенское содержание. Часть II настоящей работы целиком посвящена рассмотрению разных сторон многоликой и представляющей большой самостоятельный интерес константы ϕ и принципа золотого сечения с акцентом на их отношении к формализму теории ЛМФ, представленному в Части I. Будут главным образом рассмотрены следующие вопросы:*

- *математические свойства числа ϕ и связанных с ним величин*
- *отношение к реальности*
- *связь с фундаментальными математическими константами (ФМК) и некоторыми математическими константами (МК)*
- *обобщённая теория золотой пропорции как приложение теории ЛМФ*

П*опутно будут затронуты другие вопросы и приведены различные данные с тем чтобы составить более полное представление о константе ϕ. В главах 5–7 в качестве обширного введения, необходимого для понимания всей важности и тонкости вопроса, и в преддверии основного изложения, связанного с пониманием принципа золотой пропорции как одного из приложений теории ЛМФ, мы старались прежде всего представить иллюстрированную соответствующими построениями, рисунками, графиками и т.п. историческую и современную “классику” принципа золотого сечения. В настоящей главе приведены многие формулы и результаты конкретных математических исследований, а в двух последующих главах – множество более или менее известных значимых и доступных фактов самого разного свойства и степени правдоподобия.*

5.1. Традиционное понимание золотого сечения

Последовательное изложение истории вопроса не входит в нашу задачу, см. [Тимердинг; Гика; Стахов; Huntley; Grunbaum and Shephard; Kappraff], поэтому ограничимся для начала перечислением лишь некоторых фактов, свидетельствующих о повышенном интересе к тайнам золотого сечения у разных народов и в разные эпохи. Геометрические построения, равносильные нахождению золотого сечения, встречаются уже в “Началах” Евклида. Простейшее геометрическое построение золотого сечения даётся во II книге; в IV и XIV книгах оно применяется при построении плоских фигур – правильных пяти- и десятиугольников; начиная с книги XI в разделах, посвящённых стереометрии, золотое сечение используется при построении пространственных тел – правильных двенадцати- и двадцатиугольников. Но задолго до Евклида о золотом сечении судя по всему знали ещё в древнем Египте, Вавилоне и Китае. Помимо геометрии принцип золотого сечения осознанно или бессознательно широко использовался в живописи, скульптуре, декоративно-прикладном искусстве, при изготовлении музыкальных инструментов и особенно в архитектуре. Строители египетских пирамид, Парфенона, средневековых соборов, Витрувий и Ле Корбюзье, Поликлет, Фидий, Леонардо да Винчи и Дюрер, Пифагор, Евдокс, Евклид, Платон, Кеплер и Пачоли, скрипичный мастер Страдивари и психолог Фехнер – вот лишь малая, но представительная часть списка тех, чьи имена так или иначе связаны с историей золотого сечения. Магия золотого сечения возникла ещё в древности, сохранилась в средние века и усилилась в эпоху Возрождения. Тогда же, как считают, Леонардо да Винчи ввел в употребление эмоционально окрашенный термин “Sectio aurea” – “золотое сечение”, сохранившийся и поныне. Впрочем, некоторые полагают, что термин *goldener Schnitt* – золотое сечение был введён в обиход в середине XIX в. в Германии младшим братом известного Георга Ома математиком Мартином Омом (Martin Ohm, 1792–1872) в 1835 г., см. [Dudley, 245; Пидоу, 139; Fowler]. В 1497 г. Лука Пачоли написал позже иллюстрированный Леонардо трактат “О божественной пропорции” с описанием тринадцати – по числу Христа и двенадцати апостолов – свойств золотого сечения. А употребляемый с прошлого века символ ϕ обычно связывают с первой буквой имени древнегреческого скульптора Фидия (V в. до н.э.), который согласно легенде и исследованиям некоторых современных авторов сознательно и часто использовал принцип золотого сечения в своем творчестве, в том числе при строительстве Парфенона, см. [Ogden; Huntley]. Впрочем, встречаются и два других вида буквы фи – большое Φ и малое φ, причём нередко полагают φ равным Φ^{-1}, а порой, особенно в математических текстах, используется буква τ.

Как бы то ни было, после довольно продолжительного периода забвения с середины прошлого столетия, начиная с Цейзинга [Zeising] интерес к использованию золотого сечения в искусстве ещё более возрос и кое-кто провозгласил его универсальной для всего совершенного и прекрасного в природе и искусстве пропорцией.

Велик, отметим ещё раз, интерес и в наши дни, о чём свидетельствует внушительное множество публикаций разного уровня и толка, появившихся в печати только за последние два десятилетия, а также огромное количество активно посещаемых сайтов в Интернете; список наиболее известных из них можно найти например в **[**Knott[6]; Merrill; The Fibonacci Association; Стахов; Phi: The Golden Number**]**.

Что же такое золотое сечение? Традиционным считается следующее определение:

целое относится к большей части как большая часть к меньшей

Под целым обычно, хотя вовсе не обязательно, подразумевают геометрический отрезок, который точкой золотого сечения делится на две части так, что больший отрезок является средним пропорциональным между всем отрезком и его меньшей частью.

Рис. 5.1.1

Деление точкой C отрезка AB в пропорции $AB/AC = AC/CB$

Разумеется, при данном делении отрезка большая или меньшая его часть может лежать и справа и слева от точки деления C. Оба эти случая, когда

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AB}{CB} = \frac{AD}{AC} = \frac{CB}{DB} = \phi$$

а кроме того когда в силу особенностей золотого деления выполняются равенства $\frac{AC}{CD} = \frac{DB}{CD} = \phi$, показаны на рисунке.

Рис. 5.1.2

Деление отрезка AB золотыми точками C и D

Такое деление называется также делением в крайнем и среднем отношении, или гармоническим делением, и его легко осуществить с помощью циркуля, карандаша и линейки. Со всеми подробностями и элементами построения нахождение точки E, делящей произвольно заданный отрезок AB в золотой пропорции, показано на рисунке.

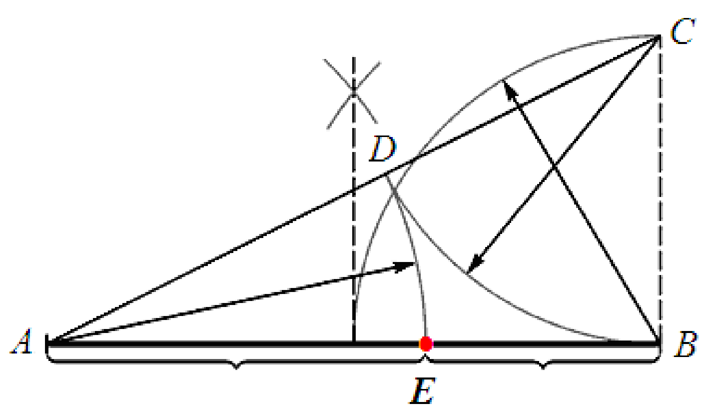


Рис. 5.1.3

Построение золотой точки E на отрезке AB

Проще, пусть дан произвольный отрезок длиной b. Из его конца строится перпендикуляр длиной $b/2$. Далее на гипотенузе построенного так прямоугольного треугольника откладывается как показано отрезок равный $b/2$, после чего остаётся только провести дугу окружности радиусом a, точка пересечения которой с заданным отрезком даёт искомую точку E.

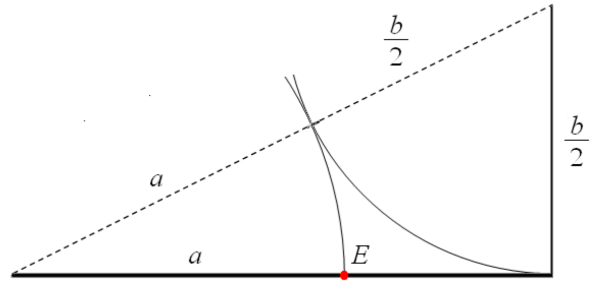


Рис. 5.1.4
Построение золотого сечения с помощью циркуля, карандаша и линейки

Нетрудно убедиться, что эта точка делит отрезок b в отношении

$$b:a = a:(b-a), \quad \text{откуда} \quad b\cdot(b-a) = a^2$$

Такое построение наводит на мысль, что уже в древнем мире золотая пропорция могла быть с легкостью получена из прямоугольного треугольника с отношением длин сторон $2:1$ или из состоящего из двух квадратов прямоугольника, причём искомому отношению равно и отношение суммы меньшей стороны и гипотенузы (диагонали в случае прямоугольника) к большей стороне. После того как точка C золотого деления отрезка AB в пропорции $b:a = \phi$ найдена, можно получить и так называемое второе золотое сечение, то есть построить точку, которая делит отрезок в пропорции $1:\sqrt{\phi}$. Пусть дан отрезок AB, длина которого равна 100. Точка C, которая делит его на части длиной 62 и 38, это точка золотого деления отрезка AB с точностью порядка одного процента. Проведем теперь дугу окружности радиусом 100 до её пересечения в точке D с перпендикуляром, восставленным из точки C. Далее делим пополам прямой угол ACD и проводим линию до пересечения с отрезком AD в точке E, которая делит его на части 44 и 56. Действительно, $56/44 \approx 1{,}27 \approx \sqrt{\phi}$. Приближённость равенства относится лишь к представлению геометрического построения в целых числах, само же построение точное. Разумеется, при помощи циркуля точку второго золотого сечения можно при желании перевести и на исходный отрезок AB.

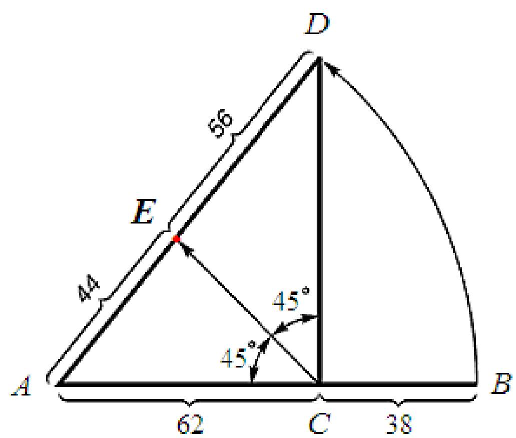


Рис. 5.1.5
Построение точки E второго золотого сечения

Задача построения золотого сечения сильно упрощается применением специального циркуля вроде того, что был найден в Помпеях и хранится сейчас в музее Неаполя.

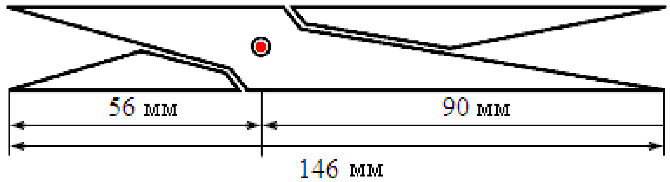


Рис. 5.1.6
Античный циркуль золотой пропорции

Его относительные пропорции

$$R(146\,\text{мм}/\phi) = 90\,\text{мм}, \quad R(146\,\text{мм}/\phi^2) = 56\,\text{мм}$$

где $R(x)$ функция округления (от английского *round*), то есть нахождения целого числа *ближайшего* к действительному числу x, говорят о том, что это действительно циркуль золотого деления.

Достаточно элементарно и построение отрезка длиной ϕ с помощью разделенного пополам квадрата единичной длины и дуги окружности с радиусом, равным диагонали одного из двух получаемых при этом прямоугольников; соответствующий рисунок прост и в дополнительных комментариях не нуждается.

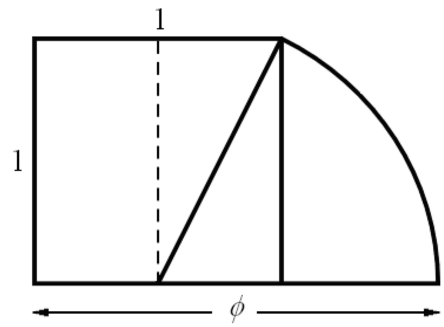


Рис. 5.1.7

Построение отрезка длиной ϕ с помощью квадрата единичной длины

Впрочем деление близкое к золотому может быть получено и чисто рефлекторно, предлагая например испытуемым садиться на пустую скамейку. В более утончённом варианте испытуемым предлагается установить карандаш на листе бумаги в центре воображаемого отрезка, образуемого двумя произвольными точками, и двигать его в направлении одной из точек пока не будет достигнуто *наилучшее* деление отрезка на две части **[**Lockhead**]**. Результат оказывается статистически достаточно близким к золотой пропорции. Анализ данных в опытах **[**Бигава**]**, в которых возможность использования зрения исключалась, свидетельствует, что “феномен золотого сечения связан не с первичной обработкой визуальной информации, а с работой центрального процессора, оперирующего с «обобщённой информацией»” **[**Лефевр**]**.

Более значительный теоретический интерес представляет не само построение точки золотого сечения, а нахождение и исследование относящихся к нему чисел. Следует вообще сказать, что очень часто геометрическое представление – лишь удобный, даже очень удобный, имеющий прежде всего дидактическое значение способ наглядного изображения абстрактных математических объектов. Прибегая к нему, надо помнить, что соответствие между математическим объектом и его геометрическим образом не может быть полным и, строго говоря, их нельзя отождествлять. Фундаментальная характеристика различных объектов математической и естественнонаучной природы даётся числом. Конечно, при отыскании числа можно, как в случае золотого сечения, отталкиваться от соответствующей геометрической модели, но после того как число найдено, уже нет необходимости всякий раз возвращаться к его геометрическим интерпретациям. Они, безусловно, полезны своей наглядностью, но вместе с тем имеют ограниченную область применения, сковывают мышление конкретностью зримого образа и не дают полного представления о данном объекте. Словом, арифметика золотого сечения для нас важнее его геометрии, хотя по мере надобности мы будем часто пользоваться и геометрическими образами как полезным вспомогательным инструментом.

5.2. Арифметика золотого сечения. Бесконечные дроби

Существует несколько внешне отличных, но по существу эквивалентных способов нахождения числа золотого сечения. Наиболее удобный, пожалуй, способ определения и конкретного вычисления ϕ состоит в решении квадратного уравнения

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{5.2.1}$$

положительный корень которого и есть искомое число ϕ, отрицательный же корень равен $1 - \phi$. Сразу видно, что ϕ число иррациональное, но в отличие от фундаментальных констант e, π и, видимо, ш, γ (для них это не доказано) не трансцендентное. Сейчас оно вычислено с точностью до триллиона десятичных знаков без всякой периодичности в их чередовании **[**Gourdon and Sebah**]**; здесь же ограничимся полусотней знаков после запятой:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\;39887\;49894\;84820\;45868\;34365\;63811\;77203\;09179\;80576\ldots \tag{5.2.2}$$

Если определять золотое число через квадратное уравнение, можно в качестве исходного брать и уравнение

$$x^2 + x - 1 = 0 \qquad (5.2.3)$$

имеющее положительный корень

$$\phi' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}61803\;39887\;49894\;84820\;45868\;34365\;63811\;77203\ldots \qquad (5.2.3')$$

и отрицательный $-\phi$, или даже уравнение

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad (5.2.4)$$

с двумя положительными корнями

$$\phi'' = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0{,}38196\;60112\;50105\;15179\ldots \qquad (5.2.4')$$

$$\phi''' = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2{,}61803\;39887\;49894\;84820\ldots \qquad (5.2.4'')$$

Очень редко каждое из последних трёх чисел, особенно ϕ', тоже называют числом (коэффициентом) золотого сечения. Кстати именно с этого числа, приведённого в письме 1597 г. немецкого математика и астронома Михаэля Местлина (Michael Maestlin) И. Кеплеру, начинается десятичная аппроксимация золотых чисел **[**Golden Ratio**]**. Если вообще остаться в узких рамках определения золотой пропорции посредством квадратного уравнения, любое из чисел ϕ, ϕ', ϕ'', ϕ''' можно считать *основным* числом золотого сечения, поскольку остальные три просто его степени. Например, относительно ϕ

$$\phi' = \phi^{-1}, \quad \phi'' = \phi^{-2}, \quad \phi''' = \phi^2$$

и в дальнейшем эти числа будут встречаться только как степени ϕ, а не как самостоятельные величины. Может создаться впечатление, что выделенность ϕ по сравнению с ϕ', ϕ'', ϕ''' диктуется скорее практическими соображениями, носит непринципиальный и в какой-то мере условный характер, но, как выяснится из последующего изложения, оказанное ϕ предпочтение имеет и достаточно серьёзную теоретическую основу. Так, рассмотрение в разделе 5.4 некоторых нетривиальных особенностей действительных чисел покажет, что эта четверка составляет как бы замкнутую группу величин с равной ϕ константой.

В уравнении (5.2.1) на первый взгляд нет ничего особенного: это частный случай квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

когда коэффициенты a, b, c равны $+1$ либо -1. Легко подсчитать, что возможны всего восемь вариантов распределения значений $+1$ и -1 между тремя коэффициентами a, b, c. Половина из них повторяющиеся, если учесть изменение знака величины при переходе с одной стороны равенства на другую. В области действительных чисел, то есть при условии что дискриминант $a^2 - 4bc$ квадратного уравнения не может быть отрицательным числом, есть только два случая:

$$a = 1,\ b = -1,\ c = -1; \quad a = 1,\ b = 1,\ c = -1$$

Это искомое уравнения (5.2.1) с корнями ϕ и $-\phi^{-1}$ и уравнение (5.2.3) с корнями ϕ^{-1} и $-\phi$. Снимая ограничение относительно неотрицательности дискриминанта, имеем два уравнения

$$x^2 \pm x + 1 = 0$$

с комплексными решениями

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} \quad \text{и} \quad x'_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} \qquad (5.2.5)$$

Квадраты модулей всех четырех комплексных чисел равны 1, а их универсальная экспоненциальная форма соответственно (перед корнем сперва берем +, потом –) такова:

$$x_1 = \mathrm{e}^{8\pi\mathrm{i}/3},\ x_2 = \mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}/3}; \quad x'_1 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3},\ x'_2 = \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3} \qquad (5.2.6)$$

К этому ещё предстоит вернуться, а сейчас условимся о терминологии. Термины “золотое сечение”, “золотая пропорция” и “число ϕ” будут где только возможно употребляться как близкие синонимы, с той разницей, что первый относится к геометрической стороне вопроса, второй больше к арифметической, а третий к теоретико-числовой. Говоря о реализации “принципа золотого сечения (пропорции)” будем иметь в виду возможность адекватного описания данного явления, процесса, эмпирического факта, соотношений между математическими и физическими величинами и так далее в рамках математического аппарата понимаемой в широком смысле теории золотого сечения, теории константы ϕ и её гомологов.

Арифметические свойства числа ϕ важны для понимания универсальности принципа золотого сечения; пока приведём лишь наиболее простые и очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} \phi^{-2} &= 2 - \phi \\ \phi^{-1} &= \phi - 1 \\ \phi^{2} &= 1 + \phi \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Члены степенного ряда ϕ^{-2}, ϕ^{-1}, ϕ, ϕ^2 выражаются в виде линейных комбинаций иррационального числа ϕ и натуральных чисел. Дальше мы увидим, что это правило распространяется на все целочисленные степени и есть одна из его арифметических характеристик. Для более наглядного представления о степенях ϕ полезно обратиться к их геометрическому выражению в отрезках. Пусть точка C делит золотым сечением отрезок на части AC и CB длиной a и b соответственно:

Рис. 5.2.1
Деление отрезка золотым сечением

Длину меньшей части b примем равной 1. Тогда число ϕ выражает одновременно длину большего отрезка a и отношение длин a/b; ϕ^{-2} равно $b/(a+b)$ и b/a^2; ϕ^{-1} это отношение длины меньшего отрезка к большему и разность $a - b$ между ними; наконец ϕ^2 равно a^2 – квадрату длины большего отрезка и общей длине всего отрезка. От одномерных отрезков нетрудно перейти к двумерному прямоугольнику золотого сечения с отношением длин сторон равным ϕ

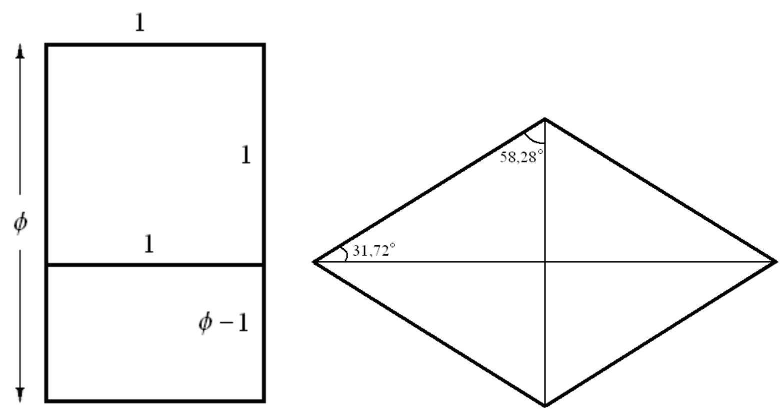


Рис. 5.2.2
Прямоугольник и ромб золотого сечения

или к *золотому ромбу*, для которого числу ϕ равно отношение большой диагонали к малой; далее – к трёхмерному случаю прямоугольной призмы единичного (в выбранном масштабе) объёма со сторонами ϕ^{-1}, 1, ϕ или к ромбоэдру с шестью “золотыми” гранями.

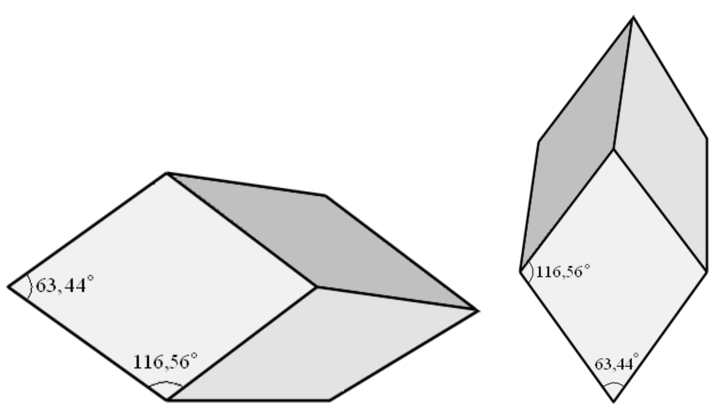


Рис. 5.2.3
Вытянутый и сплющенный золотые ромбоэдры

Золотая прямоугольная призма, которую можно представить в виде небольшого кирпича со сторонами

$$a = k\cdot\phi \approx 16{,}2 \text{ см}, \quad b = k\cdot 1 = 10 \text{ см}, \quad c = k\cdot\phi^{-1} \approx 6{,}2 \text{ см} \quad (k = 10 \text{ см}),$$

или сооружения (с плоской или хотя бы покатой крышей) с параметрами 21 м, 13 м и 8 м, особенно наглядно иллюстрирует золотую пропорцию в одномерных, двумерных и трёхмерных образах геометрии.

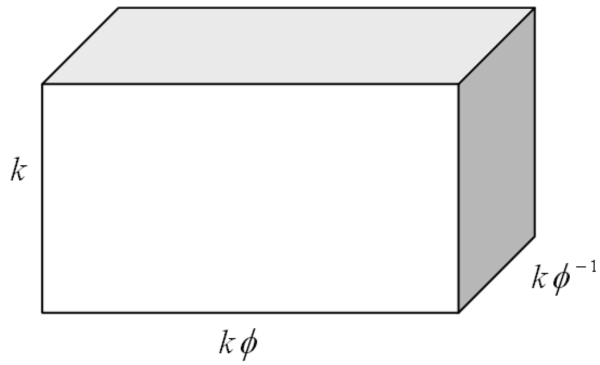


Рис. 5.2.4
Золотая прямоугольная призма ($k \approx 3{,}71$ см)

Прямоугольные пропорции, близкие с той или иной степенью точности пропорциям золотого прямоугольника и призмы, нашли воплощение в живописи и памятниках мировой архитектуры. От этой темы никуда не уйти и позже мы к ней вернёмся, а пока в качестве небольшого аванса вот картины голландского художника Мондриана (Piet Mondrian, 1872-1944), на которой, наряду с прочими нетрудно заметить прямоугольники золотого сечения

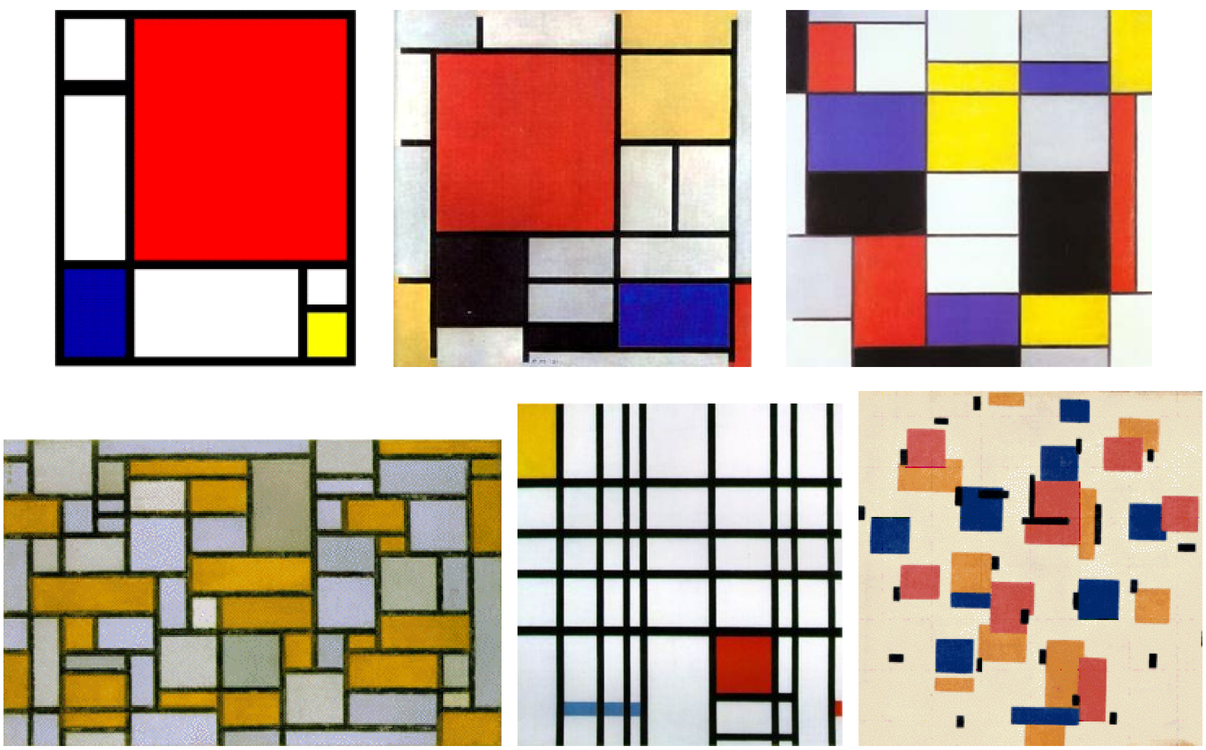


Рис. 5.2.5
Золотые прямоугольники на картинах Мондриана

Можно, конечно, привести и более сложные примеры интерпретации числа ϕ и его степеней в отрезках, площадях и объёмах различных геометрических тел, но нас больше интересуют способы получения ϕ.

Красота и уникальность непримечательного на первый взгляд исходного квадратного уравнения (5.2.1) станет очевидной, если представить его в виде

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

а потом раз за разом заменять x в правой части её значением $1 + 1/x$:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}, \quad x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}, \quad x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}, \ldots$$

Приходим к замечательному соотношению

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}} \tag{5.2.8}$$

то есть пределу бесконечной последовательности

$$1, \quad 1 + \frac{1}{1}, \quad 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}, \quad 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}, \quad 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}, \ldots$$

рациональных приближений типа $\frac{P_n}{Q_n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), называемых подходящими дробями к данному числу.

Ради полноты изложения заметим, что через единицы число ϕ представляется и таким образом:

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}\,. \tag{5.2.9}$$

Возведение обеих частей этого равенства в квадрат сразу приводит при соответствующем обозначении к исходному уравнению (5.2.1), что доказывает их эквивалентность. Заметим также, что в более общем случае имеем уравнение

$$x = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}} \tag{5.2.10}$$

или

$$x^2 - x - a = 0$$

которое при $a = 2$ приводит к интересному целочисленному представлению фундаментальной математической константы 2:

$$2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

Вернёмся, однако, к соотношению (5.2.8) – частному случаю непрерывной дроби, которая в самом общем случае имеет форму

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\cfrac{b_3}{a_4+\cfrac{b_4}{\ddots}}}}} \tag{5.2.11}$$

где $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, $\{b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$ – конечные или бесконечные последовательности комплексных или действительных чисел. Обычно рассматривается очень частный случай, когда все знаменатели отличны от нуля, все числа $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ целые, положительные, более того все члены второй последовательности – единицы: $b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_n = \ldots = 1$. Непрерывную дробь типа

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}} \tag{5.2.12}$$

называют обыкновенной непрерывной дробью, или цепной дробью. Для числа ϕ это (5.2.8), ϕ^{-2} выражается дробью

$$\phi^{-2} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

выражение для ϕ^3 состоит не считая единицы из одних четверок:

$$\phi^{3} = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}$$

выражения для ϕ^{-1} и ϕ^2 вполне очевидны хотя бы из соотношений (5.2.7). Бесконечность цепных дробей для ϕ и его степеней означает иррациональность этих чисел, см. [Хинчин]. На языке геометрии это означает, что все отрезки, площади, объёмы золотого сечения несоизмеримы, лишены общей меры.

Для лучшего понимания затронутых здесь вопросов надо обратиться к способу, основанному на алгоритме Евклида из книги 7 “Начал”, хотя в Вавилоне и Египте он, как полагают, был известен ещё в 3−4 тыс. до н.э. Предложенный в “Началах” в геометрической форме для нахождения наибольшей общей меры двух геометрических величин алгоритм Евклида применяется в теории чисел для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел или многочленов, см. [Колмогоров; Hardy and Wright]. Несмотря на свою древность это вполне универсальный метод однозначного представления любого действительного числа. Возьмём вначале простой случай положительной рациональной дроби p/q. Полагаем для определённости, что $p > q$, тем более что посредством равенства

$$\frac{p}{q} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{p}}$$

к нему фактически сводится случай $p < q$. Пусть деление числа p на меньшее число q даёт a_0 и остаток q_1, затем деление q на q_1 приводит к целому числу a_1 с остатком q_2, деление q_1 на q_2 даёт a_2 с остатком q_3 и т.д. Последовательность равенств

$$\begin{aligned} p &= a_0 q + q_1 \\ q &= a_1 q_1 + q_2 \\ q_1 &= a_2 q_2 + q_3 \\ q_2 &= a_3 q_3 + q_4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{n-3} &= a_{n-2} q_{n-2} + q_{n-1} \\ q_{n-2} &= a_{n-1} q_{n-1} + 0 \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

завершается тогда, когда остаток q_n оказывается равным 0. Кстати, в данной последовательности чисел наибольшее общее делимое целых чисел p и q (которое иначе можно найти их разложением на множители) есть предпоследний, предшествующий $q_n = 0$ остаток q_{n-1}; в случае несократимой, как в приведённом ниже примере, дроби p/q наибольшее общее делимое равно просто 1. Упорядоченная система чисел a_0; a_1, …, a_n, где точка с запятой отделяет целую часть от дробной, записывается в виде

$$[p/q] = [a_0;\, a_1,\, \ldots,\, a_n] \tag{5.2.14}$$

и однозначно определяет рациональное число p/q. Например, для чисел 137/44 и 264/1836 = 0 + 1/(1836/264)

$$\begin{aligned} 137 &= 3\cdot 44 + 5 \qquad & 1836 &= 6\cdot 264 + 252 \\ 44 &= 8\cdot 5 + 4 & 264 &= 1\cdot 252 + 12 \\ 5 &= 1\cdot 4 + 1 & 252 &= 21\cdot 12 \\ 4 &= 4\cdot 1 \end{aligned}$$

откуда наибольший общий делитель (предпоследний остаток) равен 1 в первом и 12 во втором. Но главное в данном контексте – соответствующие цепные дроби, определённым образом обозначаемые:

$$\frac{137}{44} = 3 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}} = [3;\, 8,\, 1,\, 4] \qquad \frac{264}{1836} = 0 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{21}}} = [0;\, 6,\, 1,\, 21]$$

Надо учесть, что вследствие очевидного равенства

$$\frac{1}{n} = \cfrac{1}{(n-1) + \cfrac{1}{1}}$$

существуют две равнозначные формы записи рациональной дроби: последнее число $n > 1$ в конечной записи (5.2.14) всегда можно заменить на $n - 1$, 1, то есть формы $[a_0;\, a_1,\, \ldots,\, a_n]$ и

$$[p/q] = [a_0;\, a_1,\, \ldots,\, a_n - 1,\, 1], \quad a_n > 1 \tag{5.2.14′}$$

относятся к одной и той же дроби. А вообще в принятой условной записи представление числа зависит от его природы: любое целое включая нуль число $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ запишется как $[n]$, рациональная дробь – в конечной форме (5.2.14) либо (5.2.14′), иррациональное число, выражающееся в виде бесконечной цепной дроби с периодом a_1, …, a_n, – в виде $[a_0;\, a_1,\, \ldots,\, a_n,\, \ldots]$ с добавлением в конце квадратных скобок запятой с многоточием, наконец трансцендентное число типа фундаментальных констант π, ш, γ, не имеющее такого периода, условимся записывать в виде $[a_0;\, a_1,\, \ldots,\, a_n \ldots]$, то есть без запятой перед многоточием. Отметим, что периодичность иррациональных чисел доказывается известной теоремой (Лагранж, 1767 г.), согласно которой всякая цепная дробь, представляющая числа типа

$$p + q\sqrt{r}$$

(p, $q \neq 0$ – рациональные числа, r целое число, не являющееся полным квадратом), периодична, см. **[**Хинчин**]**. Особый случай – непериодические трансцендентные числа типа константы е, выделяющиеся тем, что бесконечная последовательность a_1, …, a_n, … подчиняется определённой закономерности, по которой можно легко находить значение любого числа a_n. Полноты ради скажем, что есть и третий способ записи цепных дробей в форме

$$a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n + \ldots$$

менее наглядный чем (5.2.12) и менее простой и компактный чем (5.2.14). В отличие от общего случая непрерывной бесконечной дроби, позволяющего по-разному представлять одно и то же иррациональное число, представление посредством бесконечной цепной дроби всегда единственно. Конечно, метод цепных дробей технически непрост и производить арифметические действия над цепными дробями не очень удобно, но в то же время получаемый результат не только однозначен, он универсален в том смысле, что преодолевает условность выбора системы счисления для записи числа в виде бесконечной последовательности знаков. Например, в цепной дроби числа π

$$[\pi] = [3;\, 7,\, 15,\, 1,\, 292,\, 1,\, 1,\, 1,\, 2,\, 1,\, 3,\, 1,\, 14,\, 2,\, 1,\, 1,\, 2,\, 2,\, 2,\, 2,\, 1,\, 84,\, 2,\, 1,\, 1,\, 15,\, 3,\, 13,\, 1,\, 4,\, 2,\, 6,\, 6,\, 99,\, 1,\, 2,\, 2,\, 6,\, 3,\, 5\ldots] \tag{5.2.15}$$

значение любого члена, допустим пятого, не зависит от выбора системы счисления. Здесь применен десятичный код записи числа, но с таким же успехом вместо десятичного $a_4 = 292$ может стоять двоичное 100100100, восьмеричное 444, шестнадцатеричное 124 и т.д. Цепные дроби фундаментальных и важнейших вторичных математических констант приведены с точностью до 25; для справки, помня про запятую перед многоточием, дадим цепные дроби некоторых других величин:

$[e]$ $\quad [2;\, 1,\, 2,\, 1,\, 1,\, 4,\, 1,\, 1,\, 6,\, 1,\, 1,\, 8,\, 1,\, 1,\, 10,\, 1,\, 1,\, 12,\, 1,\, 1,\, 12,\, 1,\, 1,\, 14,\, 1\ \ldots]$

$[\gamma]$ $\quad [0;\, 1,\, 1,\, 2,\, 1,\, 2,\, 1,\, 4,\, 3,\, 13,\, 5,\, 1,\, 1,\, 8,\, 1,\, 2,\, 4,\, 1,\, 1,\, 40,\, 1,\, 11,\, 3,\, 7,\, 1\ \ldots]$

[ш]	[0; 1, 2, 1, 4, 1, 40, 1, 9, 4, 2, 1, 15, 2, 12, 1, 21, 1, 17, 52, 3, 1, 6, 1, 2…]
[W(1)]	[0; 1, 1, 3, 4, 2, 10, 4, 1, 1, 1, 1, 2, 7, 306, 1, 5, 1, 2, 1, 5, 1, 1, 1, 1 …]
[α_F]	[2; 1, 1, 85, 2, 8, 1, 10, 16, 3, 8, 9, 2, 1, 40, 1, 2, 3, 2, 2, 1, 17, 1, 1, 5…]
[δ_F]	[4; 1, 2, 43, 2, 163, 2, 3, 1, 1, 2, 5, 1, 2, 3, 80, 2, 5, 2, 1, 1, 1, 33, 1, 1 …]
[G]	[0; 1, 10, 1, 8, 1, 88, 4, 1, 1, 7, 22, 1, 2, 3, 26, 1, 11, 1, 10, 1, 9, 3, 1, 1 …]
[K]	[2; 1, 2, 5, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 10, 2, 1, 3, 2, 24, 1, 3, 2, 3, 1, 1, 1, 90, 2 …]
[$\sqrt{137}$]	[11; 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 22, …]
[ln 2]	[0; 1, 2, 3, 1, 6, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 10, 1, 1, 1, 2…]
[2π]	[6; 3, 1, 1, 7, 2, 146, 3, 6, 1, 1, 2, 7, 5, 5, 1, 4, 1, 2, 42…]
[ln 24]	[3; 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 35660, 1, 3, 1, 2…]
[e^{π}]	[23; 7, 9, 3, 1, 1, 591, 2, 9, 1, 2, 34, 1, 16, 1, 30, 1, 1…]

[$\sqrt{2}$] = [1; 2,…] [$\sqrt{3}$] = [1; 1, 2, …] [$\sqrt{10}$] = [3; 6, …] [$\sqrt{48}$] = [6; 1, 12, …]

Ведь правда интересно, что например цепная дробь квадратного корня из десяти, который в обычной записи представлен бесконечной непериодической десятичной дробью, содержит лишь два числа – 3 (целая часть) и 6 (период). Именно в этом разделе теории чисел выявляется существенная разница между ФМК π и e, которые обычно характеризуются как иррациональные и трансцендентные числа, что можно понимать как полную их формально-математическую тождественность по природе. Между тем цепные дроби двух констант радикально отличаются друг от друга по форме. Если для числа π имеем непериодическую дробь, подчиняющуюся лишь общим для всех цепных дробей аналитическим связям и ограничениям, то в случае числа e цепная дробь строится по вполне определённому алгоритму, содержащему бесконечно повторяющуюся последовательность знаков $2n$, 1, 1 с пробегающей натуральный ряд переменной n. Для нас важно то, что метод цепных дробей даёт прекрасную возможность для понимания некоторых характерных особенностей принципа золотой пропорции, числа ϕ, его отличия от других математических констант, и мы воспользуемся данной возможностью, применяя аппарат теории цепных дробей в той мере, в какой это окажется необходимым.

5.3. Цепные и подходящие дроби

В могучем потоке математической литературы, особенно учебной, цепные дроби занимают неподобающе скромное место, хотя в этом разделе теории чисел можно отыскать кое-что способное удовлетворить вкусы наиболее взыскательных математических эстетов, не говоря уж о легионе искателей нумерологических сокровищ. Для наших целей достаточно выделить лишь несколько узловых моментов, подробное рассмотрение которых можно найти, например, в работах **[**Хинчин; Кас; Бухштаб**]**.

- Любое рациональное или иррациональное число единственным образом выражается посредством конечной или бесконечной цепной дроби соответственно. Справедливо и обратное утверждение: всякая конечная или бесконечная цепная дробь единственным образом представляет рациональное или иррациональное число
- Цепные дроби это, как отмечалось выше, более универсальный и адекватный способ представления действительных чисел хотя бы потому, что выбор системы счисления не играет в нём никакой роли. Если провести напрашивающуюся здесь аналогию с **А**-системой измерения физических величин из главы 3, можно сказать, что это нечто среднее между истинным выражением физических величин посредством математических констант и десятичной записью **А**-выражений
- Подходящие дроби, то есть последовательность рациональных приближений к данному иррациональному числу, всегда имеют единственный предел, равный данному числу. Это само по себе достаточно очевидное положение практически весьма значимо. В тех случаях, когда закон образования последовательности рациональных приближений P_n/Q_n иррационального числа a известен, его можно определить с помощью операции предельного перехода (квантора всеобщности и других логических операций в конечном счёте):

$$a = \lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n} \qquad (5.3.1)$$

- В десятичной или любой другой n-ичной системе счисления иррациональное число выражается бесконечной непериодической дробью, например

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ 24209\ldots$$

и нередко именно в этом видят его фундаментальное отличие от рационального числа. В теории цепных дробей подобного разграничения уже нет. Некоторые классы чисел, в частности “квадратные”, имеют вполне определённый алгоритм построения, о чём можно судить по той же постоянной Пифагора

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

или по

$$\sqrt{5} = 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}$$

эти примеры, думается, достаточно красноречивы

- Цепные дроби обеспечивают наиболее быструю сходимость к пределу. В этом одно из их принципиальных отличий от “обычных” n-ичных представлений иррациональных чисел. Если например первые пять знаков десятичной дроби числа π дают отклонение $\approx 9{,}3\cdot 10^{-5}$ от истинного значения, для пятого члена последовательности $\{a_n\}_\pi$ отклонение подходящей дроби P_n/Q_n от истинного значения π составляет всего $\approx 6{,}0\cdot 10^{-10}$. Кроме того метод цепных дробей позволяет находить наилучшие рациональные приближения к действительному числу для данного знаменателя [Бухштаб, гл. 26]. Например в интервале между 10 и 70, где нет подходящих дробей с соответствующим знаменателем, вычисления однозначно приводят к наилучшим приближениям 179/57 и 201/64

- Другое принципиальное отличие цепных дробей от n-ичных заключается в следующем. В последовательности десятичных знаков скажем числа π не обнаружено каких-либо закономерностей помимо статистических. Для первых шестисот миллиардов десятичных знаков π соблюдается закон случайного распределения чисел: все знаки 0, 1, …, 9 в пределах допустимых этим законом отклонений встречаются по 60 000 000 000 раз; это тем более справедливо для вдвое большего количества знаков – триллиона двухсот миллиардов [Statistical Distribution Information]. Другими словами, знание k-того десятичного знака почти ничего не говорит о том, какими должны быть следующие за ним знаки, не накладывает жестких ограничений на последующую запись числа. Совсем иначе обстоит дело с цепными дробями. Даже в тех случаях (как для числа π), когда нет общей формулы для произвольно взятой n-ой подходящей дроби, существует немало аналитических связей и ограничений, касающихся членов последовательности P_n/Q_n. В качестве иллюстрации возьмём две соседние, четвертую и пятую подходящие дроби числа π и составим для них отношение типа

  $$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

  Получим (для $n = 5$):

  $$103993\cdot 113 - 355\cdot 33102 = -1$$

  Появление единицы здесь отнюдь не случайно, поскольку доказано, см. [Бухштаб, гл. 5], что формула

  $$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.3.2}$$

  как и ряд других аналитических соотношений между подходящими дробями, имеет место для любой цепной дроби. Таким образом, в самом общем случае и в отличие от десятичной дроби цепная дробь – не последовательность случайных чисел, подчиняющаяся лишь законам статистического распределения, а упорядоченная, регламентированная множеством правил система чисел, изучение которой может многое сказать о той математической величине, которую эта система представляет

- В заключение – блюдо для математических гурманов. Вопрос о существовании предела для среднего геометрического

  $$\lim_{n\to\infty}\bar{M}(a_n) = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \tag{5.3.3}$$

  последовательности $\{a_n\}$ весьма нетривиален. Может показаться, что если для цепной дроби данного числа a и существует отличный от 1 предел, для последовательности $\{b_n\}$ числа b он будет уже другим. Доказано однако [Khintchine], см. также [Kac; Shanks and Wrench; Hannon and Morris], что для большей части действительных чисел за исключением квадратных корней, рациональных и некоторых других чисел [Lehmer] предел K, называемый постоянной Хинчина, существует:

$$\text{K} = \lim_{n\to\infty} \bar{M}(a_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]^{\frac{\ln n}{\ln 2}} = 2{,}68545\ 20010\ 65306\ 44530\ \ldots \tag{5.3.4}$$

Это одна из наиболее интересных и важных вторичных констант, связанная с проточислами e, π, i, 2 интегральным выражением [Shanks and Wrench]

$$\text{K} = 2\exp\left(\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{1}{x(1+x)} \ln\frac{\pi x(1-x^2)}{\sin \pi x}\, dx\right) \tag{5.3.5}$$

которое с помощью гамма-функции запишется в виде

$$\text{K} = 2\exp\left(\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{\ln[\Gamma(2-x)\Gamma(2+x)]}{x(1+x)}\, dx\right) \tag{5.3.5$'$}$$

Поскольку непрерывная дробь числа ϕ составлена из одних единиц, ясно, что предел выражения (5.3.3) равен для неё не K, а единице

Разумеется, общее ознакомление с цепными и подходящими дробями, некоторыми их характерными особенностями и с формулой Хинчина отнюдь не самоцель, а необходимое условие для последующего понимания тонких вопросов, непосредственно касающихся числа ϕ и его гомологов. С позиций теории ЛМФ на “визитной карточке” любого значимого числа, особенно вторичной математической константы с богатым онтологическим содержанием, должны быть чётко проставлены её основные связи с ФМК. В противном случае нет не только достаточно полного знания о данной числовой величине (в безбрежном океане числовых соотношений континуума об этом не приходится мечтать), но даже знания её важнейших формальных характеристик. В этом плане, а также в плане понимания формальных особенностей и признания главенствующей роли числа ϕ в семействе золотых чисел большой интерес представляет рассмотрение числителей и знаменателей подходящих дробей. Это весьма увлекательная как и почти всё, что касается цепных и подходящих дробей, тема, затрагивающая одну из глубинных сторон природы математических чисел.

5.4. Формула Леви, ФМК, число ϕ и константа да Винчи

Затронутая тема заслуживает серьёзного внимания и требует помимо общих сведений о цепных и подходящих дробях небольшого вступления. Для большей ясности проведем вначале кое-какие вычисления с разными числами, после чего будут изложены известные из теории результаты, сделаны соответствующие выводы относительно константы ϕ и продолжено обсуждение в иной числовой области. В качестве испытуемых величин выбраны фундаментальные константы π, e и γ, трансцендентное число ln1836, постоянная Пифагора $(2)^{1/2}$ и её небольшая вариация $(2)^{1/2+\varepsilon}$ (для определённости ε = 0,000 001), одно достаточно случайное иррациональное число и, конечно, число ϕ в различных степенях и комбинациях. Вычисляются же корни $Ч/a$ = $(P_n/a)^{1/n}$ числителей и $З$ = $(Q_n)^{1/n}$ знаменателей подходящих дробей числа a для трех различных значений n и даны первые шесть десятичных знаков после запятой

Таблица 5.4
Корни степени n числителей ($Ч/a$)
и знаменателей ($З$) подходящих дробей различных чисел

Число		Корни $(P_n/a)^{1/n}$ и $(Q_n)^{1/n}$		
		n = 1 000	n = 2 000	n = 4 000
π	$Ч/a$	3,245 971	3,249 454	3,273 392
	$З$	3,245 971	3,249 454	3,273 392
γ	$Ч/a$	3,338 365	3,327 932	3,252 511
	$З$	3,338 365	3,327 932	3,252 511
ln 1836	$Ч/a$	3,312 240	3,199 147	3,272 989
	$З$	3,312 240	3,199 147	3,272 989

$(2543568119)^{1/7}$	$Ч/a$	3,306 996	3,270 203	3,272 546
	$З$	3,306 996	3,270 203	3,272 546
e	$Ч/a$	7,917 672	9,948 610	12,534 221
	$З$	7,917 672	9,948 610	12,534 221
$(2)^{1/2}$	$Ч/a$	2,411 704	2,412 958	2,413 586
	$З$	2,411 704	2,412 958	2,413 586
$(2)^{1/2+10^{-6}}$	$Ч/a$	3,283 674	3,188 801	3,234 832
	$З$	3,283 674	3,188 801	3,234 832
ϕ	$Ч/a$	1,616 732	1,617 383	1,617 708
	$З$	1,616 732	1,617 383	1,617 708
ϕ^{-1}	$Ч/a$	1,616 732	1,617 383	1,617 708
	$З$	1,616 732	1,617 383	1,617 708
ϕ^{2}	$Ч/a$	1,616 732	1,617 383	1,617 708
	$З$	1,616 732	1,617 383	1,617 708
ϕ^{-2}	$Ч/a$	1,617 510	1,617 772	1,617 903
	$З$	1,617 510	1,617 772	1,617 903
ϕ^{3}	$Ч/a$	4,229 727	4,232 896	4,234 482
	$З$	4,229 727	4,232 896	4,234 482
ϕ^{-3}	$Ч/a$	4,229 727	4,232 896	4,234 482
	$З$	4,229 727	4,232 896	4,234 482
$\phi^{5/2}$	$Ч/a$	3,256 934	3,249 617	3,324 299
	$З$	3,256 934	3,249 617	3,324 299
$\phi^{19/2}$	$Ч/a$	3,244 685	3,294 034	3,304 726
	$З$	3,244 685	3,294 034	3,304 726
3ϕ	$Ч/a$	2,613 055	2,615 543	2,616 788
	$З$	2,613 055	2,615 543	2,616 788
$\phi^{1+10^{-6}}$	$Ч/a$	3,271 145	3,187 151	3,233 834
	$З$	3,271 145	3,187 151	3,233 834

Внимательно изучая числа в таблице, можно заметить некоторые характерные особенности и уловить тенденцию изменения отдельных последовательностей с увеличением номера *n*. Выбранные значения переменной *n* достаточно велики для того чтобы из сравнения соответствующих значений последовательностей можно было заключить о существовании предела для каждого из рассматриваемых чисел за исключением константы e. Сразу бросается в глаза, что для каждой испытуемой величины переменные $Ч/a$ и $З$ стремятся к одному и тому же пределу, а разница между соответствующими значениями $(P_n/a)^{1/n}$ и $(Q_n)^{1/n}$ даже для относительно малых номеров *n* намного меньше абсолютной точности представления чисел в таблице. Так, для константы ϕ эта разница $\sim 10^{-8}$ при n = 15, порядка 10^{-44} при n = 100 и порядка 10^{-421} при n = 1000. Отметим и крайне медленную сходимость к пределу во всех случаях. Например, разница $|\phi - \sqrt[n]{Q_n(\phi)}| \approx 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ для n = 8000 ненамного меньше разницы $\approx 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ для n = 100 и отклоняется от предела уже в третьем знаке после запятой. Нетрудно также заметить, что почти для всех чисел верхней половины таблицы предел один и тот же, хотя скорость сходимости к нему у разных чисел, естественно, неодинаковая. Исключение составляют проточисло e и константа $\sqrt{2}$, стремящаяся к пределу $\sqrt{2}+1$, причём даже незначительное изменение показателя корня постоянной Пифагора как бы лишает её права иметь свой собственный, отличный от общего предел. Впрочем, это относится и к константе e и другим величинам, имеющим собственный предел, например квадратным корням из не являющихся полным квадратом натуральных чисел. Теория подтверждает [Lévy], см. также [Philipp; Finch, 59–65], что для большинства действительных чисел континуума имеет место простое и изящное предельное соотношение, называемое формулой Леви:

$$\lim_{n\to\infty}(Q_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(P_n/a)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi^2}{12\ln 2}} \tag{5.4.1}$$

Формула Леви не менее удивительна чем (5.3.4) и может служить прекрасным дополнением к сказанному в главе 2 об исключительной роли ФМК в математике и их появлениях в самых неожиданных местах. Предельное отношение

$$\mathrm{e}^{\frac{\pi^2}{12\ln 2}} = 3{,}27582\,29187\,21811\,15978\,76818\,8245\ldots \tag{5.4.2}$$

называемое константой Хинчина–Леви отличается по форме от константы Хинчина тем, что представляет собой простую комбинацию ФМК, объединённых посредством материнских функций экспоненты и логарифма. Иногда, давая деленному на число числителю и знаменателю подходящей дроби общее обозначение q_n, записывают формулу Леви в виде

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln q_n = \frac{\pi^2}{12\ln 2} \tag{5.4.3}$$

а под константой Хинчина–Леви понимают выражение

$$\frac{\pi^2}{12\ln 2} = 1{,}18656\,91104\,15625\,45282\,17229\,7594\ldots \tag{5.4.4}$$

Теория непрерывных дробей применяется например при рассмотрении различных динамических систем, но определить непосредственный онтологический статус константы Хинчина–Леви, его физическое содержание, если только таковое имеется, непросто. В любом случае соотношение (5.4.1) не универсально: оно, как и предыдущее для среднего геометрического $\overline{M}(a_n)$, верно для всех чисел кроме тех, чья *мера множества* нуль [Lévy; Lehmer], а среди последних и золотое число со многими своими гомологами. В таблице представлены, конечно, далеко не все варианты, но и так видно, какими разными могут быть пределы. Например предел для ϕ^3 равен ему самому, а пределы для $\phi^{5/2}$ и $\phi^{1+10^{-6}}$ членами золотого семейства уже не являются. Не вдаваясь в детали, которые могут завести нас в дебри теории чисел, следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Для всех четырех чисел ϕ, ϕ^{-1}, ϕ^2 и ϕ^{-2}, каждое из которых (если исходить из их представления посредством квадратного уравнения) претендует на право называться главным числом золотого сечения, предел один и тот же и равен числу ϕ. Тем самым формула Леви подтверждает главенствующее положение в золотом семействе константы ϕ – предела для числителей и знаменателей подходящих дробей "замкнутой" группы четырех чисел $\phi^{\pm1}$, $\phi^{\pm2}$. Что касается других степеней константы ϕ, то при любой нечетной степени соответствующий предел для $\phi^{\pm(2k+1)}$ ($k = 1, 2, 3,\ldots$) равен ϕ^{2k+1}, а при четной степени $\phi^{\pm2k}$ он равен ϕ^k – без минуса и двойки в показателе степени. И даже самое незначительное отклонение ε от целого n в показателе степени любого ϕ^n ($n = \pm1, \pm2, \pm3,\ldots$) приводит к числу $\phi^{n+\varepsilon}$, относящемуся уже к классу чисел, общим пределом которых является константа Хинчина–Леви. А связь константы ϕ с ФМК в приведённых выше формулах теории непрерывных дробей не просматривается. Ещё раз отметим, что подходящая дробь действительного числа, фактически представляющая собой его разложение на конечную или бесконечную последовательность чисел и в большинстве случаев сходящаяся к простой комбинации ФМК, лишь в отдельных случаях сходится к другому пределу. Ещё меньше вариантов, когда к одному и тому же не равному константе Хинчина–Леви пределу сходятся подходящие дроби сразу нескольких родственных величин. Это выделенный случай, дающий в частности возможность говорить об инварианте указанных преобразований числе ϕ как о главном члене семейства золотых чисел.

Предметом рассмотрения были до сих пор лишь положительные числа, но не меньший интерес представляет исследование подходящих дробей отрицательных чисел и связанных с ними формул и соотношений. В этом малоисследованном разделе теории нам важно ответить на следующие вопросы:

- верна ли формула (5.4.1) в области отрицательных чисел и если нет, существуют ли здесь аналоги формулы Леви и константы Хинчина–Леви и какую при этом роль играют ФМК?
- каковы в данной области предельные соотношения для константы ϕ и её гомологов?

Выясняется, что константа Хинчина–Леви относится лишь к положительным числам, а в случае отрицательных чисел a (с ненулевой мерой множества) многие последовательности $(Q_n)^{1/n}$ и $(P_n/a)^{1/n}$ хотя и сходятся к общему пределу, но совсем другому. Константой этих последовательностей в числовой области $x < 0$ является число C

$\approx 4{,}4$, которое в отличие от константы Хинчина–Леви отсутствует даже в самых обширных, насчитывающих не одну сотню величин списках МК, см. **[**Finch; Weisstein**]**. Интуитивно почти очевидно, что симметричный относительно начала числовой оси – точки нуль двойник константы $\exp(\pi^2/12\ln 2)$ является простой комбинацией ФМК. Заметим, что если $[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\ldots]$ есть цепная дробь какого-либо, допустим для определённости трансцендентного числа $a > 0$, то

$$-a = [-(a_0+1); -(a_1+1), -(a_2+1), \ldots, -(a_n+1)\ \ldots]$$

например цепная дробь числа $-\pi$ (ср. с 5.2.15) такова:

$$[-\pi] = [-4; -8, -16, -2, -293, -2, -2, -2, -3, -2, -4, -2, -15\ldots]$$

Перейдем к рассмотрению второго вопроса, уже непосредственно касающегося золотой пропорции. Опуская технические детали, сразу представим получаемые для константы ϕ и её гомологов результаты в конечном виде. Как и в случае положительных последовательностей, малейшее отклонение от значения $-\phi^n$ ($n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$) равносильно переводу любого такого числа в разряд “обычных” чисел, имеющих пределом константу C. Осталось рассмотреть множество, составленное из целых степеней числа ϕ. Результат целиком зависит от конкретного значения и четности или нечетности показателя степени n. В связи с этим из множества чисел $-\phi^{\pm n}$ можно выделить два бесконечных и одно конечное подмножества.

а) Показатель степени $n = \pm(2k+1)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$), то есть положительное или отрицательное нечетное число. В этом достаточно простом случае цепные дроби составлены лишь из двух элементов:

$$-\phi^{2k+1} = -a + \cfrac{1}{-a + \cfrac{1}{-a + \cfrac{1}{-a + \ddots}}} \qquad -\phi^{-(2k+1)} = -1 + \cfrac{1}{-a + \cfrac{1}{-a + \cfrac{1}{-a + \ddots}}}$$

где $a = I(\phi^{2k+1})$, а $I(x)$ функция, ставящая в соответствие действительному числу $x > 0$ целое число $n \geq x$, например $I(\phi^3) = 5$, поскольку $\phi^3 \approx 4{,}23$. В принятой в 5.2 условной записи

$$-\phi^{2k+1} = [-a; -a, \ldots]$$

$$-\phi^{-(2k+1)} = [-1; -a, \ldots]$$

а интересующие нас пределы в обоих вариантах показателя степени равны:

$$\lim_{n\to\infty}[Q_n(-\phi^{\pm(2k+1)})] = \lim_{n\to\infty}[P_n/a\,(-\phi^{\pm(2k+1)})] = \phi^{2k+1} + 1 \qquad (5.4.5)$$

Заметим, что этот предельный результат лишь на 1 отличается от ранее полученного для $\phi^{\pm(2k+1)}$

б) Показатель степени $n = \pm 2k$, где $k = 2, 3, \ldots$, а значит $n = \pm4, \pm6, \pm8$. Это более сложный случай, о чём можно судить уже по выражениям

$$-\phi^{2k} = -a + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{1}{-b + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{1}{-b + \ddots}}}} \qquad -\phi^{-2k} = -1 + \cfrac{1}{-a + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{1}{-b + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{1}{-b + \ddots}}}}}$$

для цепных дробей, с $a = R(\phi^{2k})$ и $b = E(\phi^{2k})$, где $R(x)$, как и раньше, функция округления, а через $E(x)$ (от французского *Entier* – целый) обозначена функция, ставящая в соответствие действительному числу x его *целую часть*. В другой записи

$$-\phi^{2k} = -a + 1/-2 + 1/-b + 1/-2 + 1/-b + \ldots + 1/-2 + 1/-b + \ldots$$

$$-\phi^{-2k} = -1 + 1/-a + 1/-2 + 1/-b + 1/-2 + 1/-b + \ldots + 1/-2 + 1/-b + \ldots$$

и ясно видно, что содержащая уже четыре элемента цепная дробь имеет период, составленный из чисел 2 и $E(\phi^{2k})$. Искомые пределы в обоих вариантах показателя степени по-прежнему равны, но присутствие двойки в периоде приводит к появлению постоянной Пифагора:

$$\lim_{n\to\infty}[Q_n(-\phi^{\pm2k})] = \lim_{n\to\infty}[P_n/a(-\phi^{\pm2k})] = \sqrt{2}\,\phi^k \qquad (5.4.6)$$

Это интересный результат с не менее интересным продолжением для членов последнего из трех множеств.

в) Небольшая группа $-\phi$, $-\phi^{-1}$, $-\phi^2$, $-\phi^{-2}$ важнейших членов семейства $-\phi^{\pm n}$, среди которых само число ϕ со знаком минус. В области положительных чисел соответствующий предел для всех членов группы равен ϕ; посмотрим, как обстоит дело в области отрицательных чисел. Все четыре цепные дроби

$$-\phi = -2 + \cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{-2+\ddots}}} \qquad -\phi^{-1} = -1 + \cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{-2+\ddots}}}$$

$$-\phi^2 = -3 + \cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{-2+\ddots}}} \qquad -\phi^{-2} = -1 + \cfrac{1}{-3+\cfrac{1}{-2+\cfrac{1}{-2+\ddots}}}$$

имеют один и тот же период 2 и отличаются друг от друга лишь первыми двумя членами в образующей цепную дробь последовательности отрицательных чисел. Прямое сравнение с цепной дробью [2; 2,…] константы $\sqrt{2}$ + 1 показывает, что во всех четырёх случаях справедлива формула

$$\lim_{n\to\infty}[Q_n(-\phi^{\pm k})] = \lim_{n\to\infty}[P_n/a(-\phi^{\pm k})] = \sqrt{2}+1 \quad (k = 1, 2) \tag{5.4.7}$$

Величину ϕ_{11}, которая больше постоянной Пифагора на единицу и обозначена той же греческой буквой, что золотое число, назовем константой да Винчи, не говоря пока о причине такого обозначения и названия. Константа да Винчи $\phi_{11} = \sqrt{2}+1$ в определённом смысле – аналог констант Хинчина–Леви и C; важно в данном контексте, что она играет для чисел $-\phi$, $-\phi^{-1}$, $-\phi^2$, $-\phi^{-2}$ такую же роль, что константа ϕ для этой же, но только положительной четверки основных членов семейства золотых чисел. Особенно важно то, что замена

$$\{\phi,\ \phi^{-1},\ \phi^2,\ \phi^{-2}\} \to \{-\phi, -\phi^{-1}, -\phi^2, -\phi^{-2}\}$$

приводит к замене константы предела последовательностей числителей и знаменателей подходящих дробей ϕ на константу ϕ_{11}. Если к тому же учесть предыдущую формулу (5.4.6) с пределом равным $(\phi_{11}-1)\,\phi^k$, станет ясно, что в теории подходящих дробей число $\sqrt{2}$ + 1 может считаться универсальной константой всего семейства чисел типа

$$-\phi^{\pm 1}, -\phi^{\pm 2k} \quad (k = 1, 2, 3,\ldots).$$

Более полное и глубокое понимание данного вопроса будет достигнуто в рамках обобщённой теории золотого сечения.

*　　　*
*

Какие общие выводы можно сделать на основе изложенного? Мы видели, что константа ϕ относится к иррациональным величинам, алгоритм построения которых в виде цепной дроби известен. В принятой терминологии (5.2.8) запишется в виде

$$\phi = [1;\ 1,\ldots] \tag{5.4.8}$$

который в свете только что приведённых данных говорит о многом. Ясно, что это единственно возможный случай цепной дроби, составленной из одних единиц – из одного-единственного, минимально допустимого для цепных дробей знака! Цепная дробь, как отмечалось выше, универсальна в том смысле, что последовательность $\{a_n\}$ это характеризующая данное число a система чисел, не зависящая по существу от выбора системы счисления, но по-разному записываемая в различных системах (вспомним, что шестой член цепной дроби числа π записывается через 292 в десятичной, 444 в восьмеричной и 126 в шестнадцатеричной системе счисления). Для цепной дроби числа ϕ не существует и этого маленького *но*: формула (5.2.8) с точностью до графики одинаково записывается и понимается во всех системах счисления.

Ещё существеннее то, что эта формула определяет наиболее медленно сходящуюся цепную дробь. Это уникальный и исключительно важный факт, явно выделяющий ϕ среди всего бесконечного континуума иррациональных чисел. Естественно возникает вопрос, какие реалии внешнего мира можно соотнести с этим математическим фактом, каков его *физический смысл*. Многие по крайней мере со времён Пифагора полагали, что истинное математическое совершенство (далеко не одинаково, надо сказать, понимаемое) – высшая форма реальности (тоже по-разному понимаемой). Не касаясь метафизической стороны вопроса, следует констатировать, что наиболее значимые математические свойства, в частности и в особенности числовые, рано или поздно в том или ином виде обнаруживались или проявлялись за пределами чистой математики. Было бы поэтому в высшей степени странно, более того – неправдоподобно, если бы такая важная особенность как, выражаясь не совсем строго, максимально медленный темп изменения “самого иррационального” числа не нашла применения в различных областях.

Рассмотрение числа ϕ в контексте указанных свойств цепных дробей показало, что среднее геометрическое числа ϕ и для всех значений n и в пределе равно 1, а не константе Хинчина, как для большинства иррациональных чисел. Не выполняются для него и предельные отношения Леви (5.4.1). Для числителей и знаменателей подходящих дробей чисел $\phi^{\pm 1}$ и $\phi^{\pm 2}$ пределы равны не комбинации математических констант $\exp(\pi^2/12\ln 2)$, а само́й константе ϕ; для остальных целых положительных и отрицательных степеней $\phi^{\pm n}$ в зависимости от четности или нечетности n получаются опять-таки те или иные степени числа ϕ. Но самое, пожалуй, удивительное – неожиданное появление констант Пифагора и да Винчи в формулах (5.4.6) и (5.4.7). Более глубокое понимание этого достижимо в ходе построения общей теории золотого сечения как приложения теории ЛМФ в восьмой главе, так что основная часть разговора о связи числа ϕ с ФМК, а принципа золотой пропорции с исходными положениями теории ЛМФ ещё впереди. Но уже сейчас ясно, что подходящие дроби это важный и, скоро увидим, незаменимый инструмент исследования свойств иррациональных чисел, в особенности числа ϕ. Мы пришли к ним через цепные дроби, поводом для рассмотрения которых в свою очередь стало квадратное уравнение. Справедливы и обратные утверждения. Зная закон образования последовательности подходящих дробей, нетрудно получить соответствующую цепную дробь и квадратное уравнение, а можно начинать и с цепной дроби. Следовательно, все три способа вправе считаться математически эквивалентными и взаимосвязанными методами, алгоритмами получения константы золотого сечения. Если всё же попытаться дать краткую характеристику каждого из них в отдельности, то получится примерно следующее. Квадратное уравнение это прямой и технически простейший способ получения числа ϕ, мало однако говорящий о его сущности и математической природе, которые глубже раскрываются в представлении посредством цепной дроби. Но для раскрытия конкретных числовых особенностей, связей с другими величинами и многочисленных приложений иррационального числа ϕ больше всего подходят последовательности P_n и Q_n, рассмотрением которых мы сейчас займёмся.

5.5. Числа Фибоначчи. Из истории вопроса

Вычисляя одну за другой подходящие дроби числа ϕ

$$1,\quad 1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1},\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{3}{2},\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{5}{3},\ \dots$$

получаем бесконечную последовательность рациональных чисел

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{34}{21},\ \frac{55}{34},\ \frac{89}{55},\ \frac{144}{89},\ \frac{233}{144},\ \frac{377}{233},\ \dots$$

В силу особенностей построения цепной дроби (5.2.8) для любой её подходящей дроби P_n/Q_n ($n \ge 2$) имеет место соотношение

$$\frac{P_n}{Q_n} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}} = \frac{P_{n-1}+Q_{n-1}}{P_{n-1}} \tag{5.5.1}$$

то есть числитель n-ой подходящей дроби равен сумме числителя и знаменателя предыдущей $n-1$-ой дроби, а знаменатель Q_n равен числителю предыдущей $n-1$-ой дроби. Для следующей дроби из предыдущего имеем

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n + Q_n}{P_n} = \frac{P_n + P_{n-1}}{P_{n-1}+Q_{n-1}} = \frac{P_n + P_{n-1}}{Q_n + Q_{n-1}} \tag{5.5.2}$$

Таким образом, числитель и знаменатель подходящей дроби, во-первых, пробегают одинаковые последовательности чисел (не считая “лишней” единицы у знаменателя), во-вторых, любой член последовательностей P_n и Q_n начиная с третьего равен сумме двух предыдущих:

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-1} \tag{5.5.3}$$

$$Q_n = Q_{n-2} + Q_{n-1} \tag{5.5.4}$$

Последовательность чисел, имеющая это свойство, называется рядом Фибоначчи. Сказанное легко прослеживается на приведённой выше последовательности подходящих дробей. Для любителей даны первые пятьдесят членов ряда F_j, с разложением на простые множители, а также все простые числа Фибоначчи первых пяти сотен.

F_1	$1 = 1$
F_2	$1 = 1$
F_3	2 – простое
F_4	3 – простое
F_5	5 – простое
F_6	$8 = 2^3$
F_7	13 – простое
F_8	$21 = 3 \cdot 7$
F_9	$34 = 2 \cdot 17$
F_{10}	$55 = 5 \cdot 11$
F_{11}	89 – простое
F_{12}	$144 = 2^4 \cdot 3^2$
F_{13}	233 – простое
F_{14}	$377 = 13 \cdot 29$
F_{15}	$610 = 2 \cdot 5 \cdot 61$
F_{16}	$987 = 3 \cdot 7 \cdot 47$
F_{17}	1597 – простое
F_{18}	$2584 = 2^3 \cdot 17 \cdot 19$
F_{19}	$4181 = 37 \cdot 113$
F_{20}	$6765 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 41$
F_{21}	$10946 = 2 \cdot 13 \cdot 421$
F_{22}	$17711 = 89 \cdot 199$
F_{23}	28657 – простое
F_{24}	$46368 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23$
F_{25}	$75025 = 5^2 \cdot 3001$
F_{26}	$1\ 21393 = 233 \cdot 521$
F_{27}	$1\ 96418 = 2 \cdot 17 \cdot 53 \cdot 109$
F_{28}	$3\ 17811 = 3 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 281$
F_{29}	5 14229 – простое
F_{30}	$8\ 32040 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 61$
F_{31}	$13\ 46269 = 557 \cdot 2417$
F_{32}	$21\ 78309 = 3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 2207$
F_3	$35\ 24578 = 2 \cdot 89 \cdot 19801$
F_{34}	$57\ 02887 = 1597 \cdot 3571$
F_{35}	$92\ 27465 = 5 \cdot 13 \cdot 141961$
F_{36}	$149\ 30352 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 107$
F_{37}	$241\ 57817 = 73 \cdot 149 \cdot 2221$
F_{38}	$390\ 88169 = 37 \cdot 113 \cdot 9349$
F_{39}	$632\ 45986 = 2 \cdot 233 \cdot 135721$
F_{40}	$1023\ 34155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 2161$
F_{41}	$1655\ 80141 = 59369 \cdot 2789$
F_{42}	$2679\ 14296 = 2^3 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 221 \cdot 421$
F_{43}	4334 94437 простое
F_{44}	$7014\ 08733 = 3 \cdot 43 \cdot 89 \cdot 199 \cdot 307$

F_{45} 11349 03170 = $2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 61 \cdot 109441$

F_{46} 18363 11903 = $139 \cdot 461 \cdot 28657$

F_{47} 29712 15073 простое

F_{48} 48075 26976 = $2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 1103$

F_{49} 77787 42049 = $13 \cdot 97 \cdot 6168709$

F_{50} 1 25862 69025 = $5^2 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 151 \cdot 3001$

………

F_{83} 99 19485 30947 55497 простое

………

F_{131} 106 63404 17491 71059 58145 72169 простое

………

F_{137} 1913 47024 00093 27808 14494 23917 простое

………

F_{359} 47542 04377 34698 22074 73680 27166 74938 29277 01417 01655 71936 62268 71637 69354 76241 простое

………

F_{431} 52989 27110 06095 62179 20395 56787 78467 01971 12759 02953 45066 20905 16283 47699 55134 42468 96762 62369 простое

………

F_{433} 1 38727 71278 04783 82711 41861 03186 24639 22584 50358 17178 36900 79918 03213 60252 25954 60259 37125 68353 простое

………

F_{449} 3061 71999 24845 45030 55431 38480 83717 20811 12854 32353 73849 71316 74799 32157 12381 49015 93344 28056 65949 простое

Любые два соседних числа в списке первых пятидесяти чисел F_n взаимно простые, то есть не имеют общих делителей. Это относящееся ко всей последовательности положение, которое легко доказывается использованием принципа математической индукции и с учётом того, что $F_1 = 1$ [Воробьев, 45]. Другая интересная особенность ряда Фибоначчи относится к последовательности её простых делителей. Анализируя разложение первой полусотни чисел F_n на простые множители, можно заметить, что при переходе от одного члена к следующему каждый раз появляется хотя бы одно новое простое число – собственный делитель. Общее утверждение (теорема Кармайкла) гласит, что каждое число F_n за исключением $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_6 = 8$, $F_{12} = 144$ имеет по меньшей мере один собственный делитель [Carmichael; Boase; Yabuta]. Осмыслить это несложно, если принять во внимание, что хотя множества простых чисел и чисел Фибоначчи имеют одинаковую мощность счётного множества, однако последовательность $\{F_n\}$ растёт намного быстрее чем $\{S_n\}$. Сотое к примеру простое число S_{100} равно 541, тогда как F_{100} равно $\approx 3{,}5 \cdot 10^{20}$, а отношение $F_{1\,000\,000}/S_{1\,000\,000}$ выражается чудовищным числом $\sim 10^{208\,980}$. Словом, простых чисел в любом достаточно большом числовом интервале во много раз больше чем чисел Фибоначчи, и неудивительно, что с каждым новым F_n появляются и новые S_n.

Ряд Фибоначчи растёт стремительно по сравнению с последовательностью простых чисел, но очень медленно по сравнению, например, с факториальной последовательностью $\{n!\}$; уже отношение сотых к примеру, номеров $100!/F_{100}$ выражается сверхбольшим числом $\sim 10^{137}$. Если же сравнивать число k десятичных знаков F_n с их номерами n, то для достаточно больших номеров $n/k \approx 1/\lg \phi \approx 4{,}78$, то есть число десятичных знаков почти в пять раз меньше n: так, $F_{10\,000\,000}$ содержит лишь чуть больше двух миллионов знаков. В отличие от факториальной последовательности, для которой отношение $n + 1$-го члена к n-му стремится с увеличением n к бесконечности, и от последовательности простых чисел, где вообще нет никакого предела, ряд Фибоначчи относится к категории тех целочисленных последовательностей, для которых конечный предел подобного рода, мы знаем, существует. В соответствии с определением чисел Фибоначчи как числителей и знаменателей подходящих дробей "золотого" числа

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \ldots = \frac{F_{n+k}}{F_{n+k-1}} = \phi \tag{5.5.5}$$

Интересно, что разница между ϕ и отношением F_7/F_6 равная $\approx 0{,}00697$ может быть выражена (B. Roselle) посредством бесконечной суммы, составленной из степеней двойки и факториалов:

$$\phi - \frac{13}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{n!(n+2)!2^{4n+6}} \qquad (5.5.6)$$

Рис 5.5.1
Леонардо Пизанским (Фибоначчи) и страница из “Liber Abacci” с задачей о кроликах

Числовой ряд, приводящий к числу ϕ, был открыт в Европе в 1202 году Леонардо Пизанским (Фибоначчи, от *filius Bonacci* – сын Боначчо) в книге “Liber Abacci” (“Книга абака”, переработана в 1228 г.) при решении идеализированной задачи о размножении кроликов. Кстати, в этой книге (как уже упоминалось в Гл. 1 при обсуждении концепции натурального ряда) впервые в Европе появились и отрицательные числа, рассматриваемые как “долг”. Задача о кроликах, приведшая одного из основателей европейской математики, чья биография изложена в работах **[**Gies, Gies; Grimm; Knott[1]**]**, к знаменитому числовому ряду, интересна не только в историческом плане. Она позволяет проследить на простом и плодотворном примере основной принцип образования последовательностей такого рода.

Задача, поставленная и решенная Фибоначчи, по сути такова. Допустим, что Адам и Ева племени кроликов (откуда они взялись неважно) спариваются ровно через месяц после своего появления на свет и ещё через месяц появляется потомство, состоящее из такой же пары кроликов – самца и самки. Увеличение численности кроличьего племени не прекращается в течение года, то есть в конце каждого месяца начиная со второго Ева разрешается парой кроликов противоположного пола. Начиная же с третьего месяца в процесс размножения по достижении половой зрелости вступает второе поколение кроликов, в точности повторяющее поведение своих родителей, ещё через месяц третье и т.д.; соответствующее генеалогическое дерево показано на взятом из **[**Knott[7]**]** рисунке.

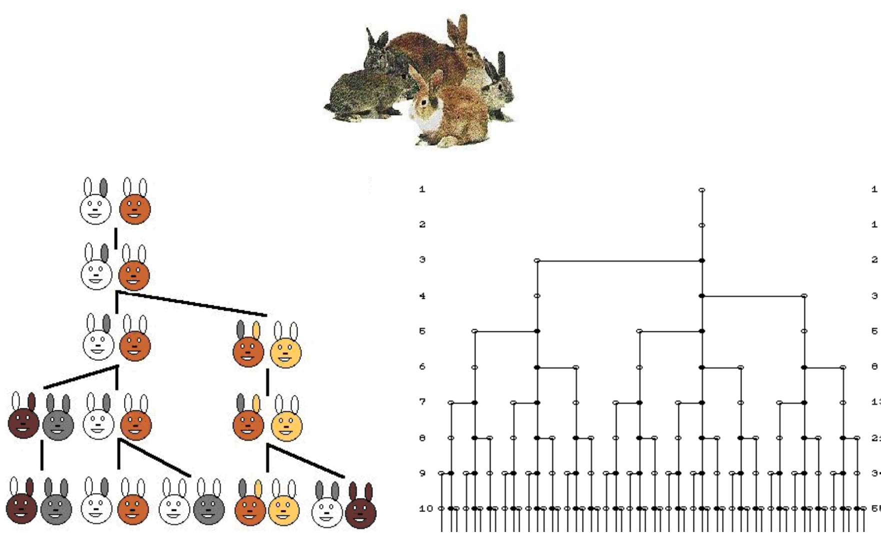


Рис. 5.5.2
Фамильное дерево кроликов

Популяция кроликов в одиннадцатом колене, точнее на одиннадцатом месяце их прироста, уже слишком велика для подобного схематического изображения, а между тем требуется найти число пар кроликов в конце первого года и, само собой, соответствующую формулу при обязательном условии их стопроцентной выживаемости и безотказного действия механизма размножения. Для этого надо сперва составить таблицу суммарной численности по месяцам, а также ежемесячного прироста числа пар семейства кроликов.

Месяцы	**Число пар**	**Прирост**
1	1	–
2	1	–
3	2	1
4	3	1
5	5	2
6	8	3
7	13	5
8	21	8
9	34	13
10	55	21
11	89	34
12	144	55

Сразу видно, что формула (5.5.3) справедлива как для ежемесячного прироста числа кроликов, так и для общего их количества, а суммарный прирост за год по определению должен быть равен 143, в чём можно убедиться, сложив все числа третьего столбца. Отсюда, сравнивая оба столбца и обобщая на случай произвольного n, получим формулу

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1, \quad n = 2, 3, 4 \qquad (5.5.7)$$

означающую, что любой член ряда Фибоначчи F_{n+2} начиная с четвертого равен не только сумме двух предыдущих членов, но и сумме $\sum_n F_n$ всех предшествующих членов минус 1; другими словами, прибавляя единицу к любой частичной сумме чисел Фибоначчи, получаем принадлежащее тому же множеству $\{F_n\}$ число. Складывая же второй и третий столбцы построчно, придем к последовательности чисел

1, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, 15127, 24476, …

называемой числами Люка. Изучение полученных чисел может довести до самых потайных уголков числовой математики. Простая, почти бытовая, хотя не вполне реалистическая задача со временем породила целую отрасль математики, которая и сегодня находится отнюдь не на обочине научных исследований. Заменив кроликов на коров и быков, а месяцы на годы, придем к более реалистичной задаче о размножении коров, предложенной Дьюдни (H.E. Dudeney, 1857–1930). С числами Фибоначчи связаны и задачи о ветвлении дерева, о фамильном дереве пчел **[**Yanega**]**, которые при желании можно дополнить аналогичными примерами из действительности. Во всех этих случаях речь по сути идёт о рядах, строящихся по правилу (5.5.3) или (5.5.4):

каждый член ряда начиная с третьего равен сумме двух предыдущих членов.

Классическая задача о размножении кроликов, соответствующим образом представленная, приводит к результату, который может считаться своеобразной зашифровкой золотой пропорции двоичным кодом **[**Togneti, Winley, van Ravenstein**]**. Оставляя условия задачи неизменными, обозначим появление на свет разнополой пары кроликов цифрой 0, а наступающее через месяц достижение половой зрелости цифрой 1. Напомним, что в самом начале была лишь пара кроликов (0), которая через месяц достигла зрелости (1), а ещё через месяц появилась другая пара (10) и т.д. Динамика роста численности кроликов по месяцам (с указанием в скобках количества пар родившихся, достигших зрелости и общего количества тех и других соответственно) выглядит следующим образом:

нулевой месяц	0	(1, 0, 1)
первый месяц	1	(0, 1, 1)
второй месяц	10	(1, 1, 2)
третий месяц	101	(1, 2, 3)

четвертый месяц 10110 (2, 3, 5)

пятый месяц 10110101 (3, 5, 8)

шестой месяц 1011010110110 (5, 8, 13)

………

Общее формальное правило, выражающее содержательно простой закон размножения, очевидно: каждая цифра 1 n-го месяца в $n+1$-ом месяце заменяется на 10, а 0 заменяется на 1. Важно отметить, что относящееся к данному месяцу чередование знаков 0 и 1 с переходом к следующему месяцу в результате этих замен не меняется, а только растёт по правилу построения последовательности Фибоначчи. Числа в скобках для месяца n это числа F_{n-1}, F_n, F_{n+1} и ясно, что с увеличением n отношение общего количества символов к количеству символов 1, как и отношение последних к количеству символов 0, стремится в пределе к ϕ. Есть и другие способы получения последовательности, называемой *кроличьей последовательностью*, *золотой последовательностью* или *золотой струной* (*the rabbit sequence*, *the golden sequence*, *the golden string*), первые шестьдесят знаков которой даны ниже по **[**Knott[4]**]**:

101101011011010110101101101011011010110101101101010101011011…

Укажем лишь на довольно оригинальный и эффективный способ получения золотой последовательности с помощью золотого числа **[**Fraenkel, Levitt, Shimshoni**]**. Выпишем в ряд хотя бы первые двадцать два числа натурального ряда и выделим подчеркиванием все целые числа $E(n\phi)$, (n = 1, 2, 3, …):

<u>1</u>, 2, <u>3</u>, <u>4</u>, 5, <u>6</u>, 7, <u>8</u>, <u>9</u>, 10, <u>11</u>, <u>12</u>, 13, <u>14</u>, 15, <u>16</u>, <u>17</u>, 18, <u>19</u>, 20, <u>21</u>, <u>22</u>, …

Последовательность 1011010110110101101011…, составленная заменой каждого выделенного подчеркиванием числа цифрой 1, а каждого невыделенного цифрой 0, совпадает с первыми 22-мя знаками золотой последовательности. Такое совпадение имеет место для натурального ряда любой длины, так что речь фактически идёт об универсальном методе построения золотой струны, позволяющем к тому же достаточно легко находить цифру, стоящую на заданном месте в этой не имеющей определённого периода последовательности.

Поскольку ряд F_n строится по правилу третьего члена, а сумма любого нечетного числа с четным есть число нечетное, ясно, что нечетных чисел Фибоначчи вдвое больше чем четных и что четным является каждое третье число. Естественное продолжение приводит к легко доказуемой **[**Bicknell and Hoggatt**]** последовательности утверждений:

каждое 3-е число кратно 2 то есть кратно F_3

каждое 4-ое число кратно 3 то есть кратно F_4

каждое 5-ое число кратно 5 то есть кратно F_5

каждое 6-ое число кратно 8 то есть кратно F_6

………

каждое k-ое число кратно F_k

Обобщённо: если $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$, то F_n кратно каждому F_{n_1}, F_{n_2}, …, F_{n_k} в отдельности.

Числа Фибоначчи с их правилом третьего члена могут быть использованы для получения довольно простого трехчленного уравнения степени n, среди корней которого всегда будут числа ϕ и ϕ^{-1}. Возьмём основное квадратное уравнение золотого числа $x^2 = x + 1$, умножим обе части на x и в равенстве

$$x^3 - x^2 - x = 0$$

заменим в одном случае x^2 на $x + 1$, а в другом заменим x на $x^2 - 1$. С учётом того, что $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2$, придем к уравнениям

$$x^3 - F_3 x - F_2 = 0 \tag{5.5.8}$$

$$x^3 - F_3 x^2 + F_1 = 0 \tag{5.5.9}$$

Применяя принцип математической индукции, то есть фиксируя (5.5.8) и (5.5.9), полагая справедливыми уравнения

$$x^n - F_n x - F_{n-1} = 0 \tag{5.5.10}$$

$$x^n - F_n x^2 + F_{n-2} = 0 \tag{5.5.11}$$

и доказывая (умножением на x, теми же заменами, что и выше, и применением правила третьего члена) справедливость этих математических утверждений для $n + 1$, окончательно убеждаемся в правильности этих трехчленных уравнений для любого n.

5.6. Обобщённый ряд Фибоначчи

Правило третьего члена более общо, чем классический ряд Фибоначчи или его гомолог – ряд Люка. Мы применим его для общего случая при условии справедливости (5.5.5) и сняв все ограничения на допустимые значения первых двух членов **[**Аракелян 1989, 245–246**]**.

Обобщение на случай действительных чисел

Двумя первыми членами ряда (5.5.3) могут быть произвольные числа a и c, из которых хотя бы одно не нуль

Обобщённый ряд Фибоначчи

Начальными членами ряда, построенного по правилу третьего члена, могут быть любые числа z_1 и z_2, как всегда представимые в виде $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$.

Случай $a = b = c = d = 0$, когда все члены бесконечного ряда тождественно равны нулю, тривиален, поэтому предполагаем, что хотя бы одно из чисел a, b, c, d отлично от нуля. Обозначая n-ый член обобщённого ряда Фибоначчи через u_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), строим ряд по указанному принципу

$$u_{n+2} = u_n + u_{n-1} \tag{5.6.1}$$

Получим последовательность чисел

$$\begin{array}{ll}
u_1 & a + b\mathrm{i} \\
u_2 & c + d\mathrm{i} \\
\hline
u_3 & 1a + 1c + (1b + 1d)\,\mathrm{i} \\
u_4 & 1a + 2c + (1b + 2d)\,\mathrm{i} \\
u_5 & 2a + 3c + (2b + 3d)\,\mathrm{i} \\
u_6 & 3a + 5c + (3b + 5d)\,\mathrm{i} \\
u_7 & 5a + 8c + (5b + 8d)\,\mathrm{i} \\
u_8 & 8a + 13c + (8b + 13d)\,\mathrm{i} \\
\ldots\ldots\ldots & \\
u_k & aF_{k-2} + cF_{k-1} + (bF_{k-2} + dF_{k-1})\,\mathrm{i} \\
u_{k+1} & aF_{k-1} + cF_k + (bF_{k-1} + dF_k)\,\mathrm{i} \\
\ldots\ldots\ldots &
\end{array} \tag{5.6.2}$$

с общей формулой

$$u_{n+2} = aF_n + cF_{n+1} + (bF_n + dF_{n+1})\,\mathrm{i} \tag{5.6.3}$$

Нетрудно заметить, что коэффициенты при a, b, c, d каждый в отдельности образуют ряд Фибоначчи (доказывается по индукции). В частном случае, когда за исключением c все коэффициенты нули, другими словами в случае начинающегося с нуля действительного ряда, получим

$$u_n = cF_{n-1}$$

то есть смещенный на одно место влево ряд Фибоначчи, все члены которого кратны произвольному ненулевому действительному числу c. Случаю $c = n$ ($n = 1, 2, 3,\ldots$) соответствует целочисленный положительный ряд. Если же и $a = m$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$), целочисленная последовательность

$$u_n = mF_{n-2} + nF_{n-1} \tag{5.6.4}$$

представляет собой сумму увеличенных в m и n раз и соответственно смещенных на два и одно место влево классических рядов Фибоначчи. В частности если $m = 1$, а $n = 3$, получим бесконечный ряд обычно обозначаемых символом L_n чисел, для которого

$$L_{n+2} = F_n + 3F_{n+1} \tag{5.6.5}$$

с числами L_n (Люка) нам ещё не раз предстоит встретиться. Обобщённый ряд Фибоначчи, означающий сведение любой построенной по правилу (5.6.1) последовательности к максимум четырём и минимум одному смещенным на одно или два места влево рядам Фибоначчи, не знает исключений. Поэтому, например, утверждение о независимости от чисел Фибоначчи ряда 3, 2, 5, 7, 12, 19, 31, … с начальными членами 3 и 2 **[**Knott**]** неверно. Действительно, в соответствии с (5.6.4) для $m = 1$ и $n = 3$

$$u_{n+2} = 3F_n + 2F_{n+1}$$

в принципе это такой же частный пример обобщённого ряда Фибоначчи как любой другой.

Возьмём теперь отношение u_{n+1}/u_n из (5.6.2) и докажем, что в самом общем случае

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\phi \qquad (5.6.6)$$

Имеем:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(aF_{n-1}+cF_n) + (bF_{n-1}+dF_n)\mathrm{i}}{(aF_{n-2}+cF_{n-1}) + (bF_{n-2}+dF_{n-1})\mathrm{i}} = \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}\left[\frac{\left(a+c\dfrac{F_n}{F_{n-1}}\right)+\left(b+d\dfrac{F_n}{F_{n-1}}\right)\mathrm{i}}{\left(a+c\dfrac{F_{n-1}}{F_{n-2}}\right)+\left(b+d\dfrac{F_{n-1}}{F_{n-2}}\right)\mathrm{i}}\right]$$

С учётом предельных отношений (5.5.5) дроби $\dfrac{F_n}{F_{n-1}}$ и $\dfrac{F_{n-1}}{F_{n-2}}$ с увеличением n сходятся обе к ϕ, отсюда выражение в квадратных скобках при $n\to\infty$ равно 1, а перед скобками тому же ϕ, а значит равно ϕ и всё выражение (5.6.6), что и требовалось доказать. Таким образом, обобщённый ряд Фибоначчи представляет собой сумму двух обычных и двух мнимых рядов Фибоначчи и число ϕ по-прежнему его константа. Классический ряд Фибоначчи получается из обобщённого при условии, что $a = c = 1$, $b = d = 0$, следовательно это очень частный, но в то же время фундаментальный случай, ведь начиная с третьего члена любая последовательность за исключением тождественно равной нулю составлена из $\{F_n\}$.

Сама последовательность (5.6.1) – частный случай исследованных ещё Эйлером возвратных последовательностей

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

задаваемых условием: начиная с некоторого номера и для всех последующих номеров имеет место уравнение

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \ldots + a_ku_n \qquad (5.6.7)$$

где a_j (j = 1, 2, …, k) отличный от нуля коэффициент при j-ом члене последовательности. Фундаментальное в теории возвратных последовательностей соответствующее характеристическое уравнение имеет k корней и связано с коэффициентами $a_1, a_2,\ldots, a_k$ следующим образом [Маркушевич]:

$$x^k = a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \ldots + a_k \qquad (5.6.8)$$

В случае, когда все коэффициенты равны единице, последнее уравнение принимает вид

$$x^k = x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + x + 1 \qquad (5.6.9)$$

При k = 2 это хорошо знакомое нам квадратное уравнение (5.2.1) с положительным корнем ϕ и с отрицательным корнем $-\phi^{-1}$. При k = 3 уравнение

$$x^3 = x^2 + x + 1$$

имеет единственный положительный корень

$$x^+_{k=3} = \frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right) = 1{,}83928\ 67552\ 14161\ 13255\ 18525\ 64653\ldots \qquad (5.6.10)$$

– аналог золотого числа, называемый иногда константой Трибоначчи (Tribonacci).

Сама же последовательность Трибоначчи $\{T_n\}$ может быть определена правилом *четвертого* члена, то есть рекуррентной формулой

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

в которой определены первые три члена ряда. Задавая T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = 1, имеем бесконечную последовательность

0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, …

– прямой аналог и в некотором смысле обобщение ряда Фибоначчи на случай k = 3, см. [Feinberg; Hoggatt 1980; Develin; Dumitriu; Catalani]. Бесконечный ряд чисел T_n (и любая другая последовательность подобного типа) может быть получен и разложением в ряд соответствующей производящей функции:

$$\frac{1}{1-x-x^2-x^3} = 1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 13x^5 + 24x^6 + 44x^7 + 81x^8 + 149x^9 + 274x^{10} + 504x^{11} + 927x^{12} + 1705x^{13} + 3136x^{14} + 5768x^{15} + \ldots \qquad (5.6.11)$$

Довольно сложна и содержит к тому же функцию округления $R(x)$ формула точного определения значения любого T_n посредством радикалов и показателя степени n (аналог известной формулы Бине для ряда Фибоначчи, см. ниже разделы 5.8 и 5.9):

$$T_n = R\left(3\frac{\left\{\frac{1}{3}(19+3\sqrt{33})^{1/3}+\frac{1}{3}(19-3\sqrt{33})^{1/3}+\frac{1}{3}\right\}^n\left(586+102\sqrt{33}\right)^{1/3}}{\left(586+102\sqrt{33}\right)^{2/3}+4-2\left(586+102\sqrt{33}\right)^{1/3}}\right) \qquad (5.6.12)$$

Вслед за числами Фибоначчи и Трибоначчи идут строящиеся уже по правилу *пятого* члена числа Тетрабоначчи, являющиеся последней по возрастанию параметра k возвратной последовательностью, характеристическое уравнение которой имеет конечное, весьма притом громоздкое решение в радикалах. С увеличением параметра корни характеристического уравнения, вычисляемые для $k > 4$ приближёнными численными методами, например методом касательных Ньютона, монотонно растут, приближаясь к предельному значению 2:

$x^+_{k=4} = 1{,}92756\,19754\ldots$

$x^+_{k=5} = 1{,}96594\,82368\ldots$

$x^+_{k=6} = 1{,}98358\,28434\ldots$

$x^+_{k=7} = 1{,}99196\,41966\ldots$

………

$x^+_{k=24} = 1{,}99999\,99403\ldots$

………

$x^+_{k\to\infty} \to 2$

Следовательно, с изменением k от двух до бесконечности "спектр" значений положительных корней располагается в довольно узком интервале, ограниченном снизу числом ϕ, а сверху фундаментальной константой 2.

5.7. Свойства чисел F_n в зависимости от n

Отметим вначале, что ряд Фибоначчи, достаточно подробно изложенный например в работах [The Fibonacci Quarterly 1963–2011; Воробьев; Hoggatt 1969; Alfred; Vajda; Rosen; Knott], это поистине "золотая жила", неиссякаемый источник всевозможных числовых соотношений, порой весьма неожиданных и неординарных. Свидетельством его огромной популярности служит издаваемый с 1963 года специальный журнал "The Fibonacci Quarterly". Чтобы способствовать развитию приложений теории чисел Фибоначчи и золотого сечения создаётся международный журнала "Золотое сечение: теория и приложения" для работ преимущественно нематематического характера, а "первым номером такого журнала можно считать сборник научных работ под названием «The Golden Section: Theory and Applications», изданный по инициативе проф. Стахова". Выдвигается также идея создания *Музея Гармонии и Золотого Сечения* в виде "грандиозного архитектурного сооружения, в котором будут собраны все произведения природы, науки и искусства, основанные на Золотом Сечении" [Стахов[1]].

Рассмотрение зависимости чисел F_n от номера n начнем с наиболее загадочных, пожалуй, членов последовательности $\{F_n\}$ – простых чисел. Из теории известно, что (за исключением $n = 4$) простыми могут быть только те F_n, у которых n простое число, но лишь очень и очень немногие числа Фибоначчи с подобным номером сами являются простыми. Уже из приведённого выше списка видно, что простые числа встречаются всё реже и реже по мере удаления от начала ряда; неизвестно даже, является ли их множество бесконечным. К сегодняшнему дню проверка "на простоту" доведена до номера n = 434 000 и с полной достоверностью обнаружено лишь три десятка простых чисел F_n со следующими номерами [Dubner and Keller; Brillhart; Caldwell]:

n = 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2 971, 4 723, 5 387, 9 311, 9 677, 14 431, 25 561, 30 757, 35 999, 37 511, 50 833, 81 839

Сюда, видимо, надо добавить и числа с номерами [H. Lifchitz and R. Lifchitz; Weisstein[2]]

n = 104 911, 130 021, 148 091, 201 107, 397 379, 433 781, 590 041, 593 689, 604 711, 931 517, 1 049 897, 1 285 607, 1 636 007, 1 803 059, 1 968 721.

Получается менее полусотни простых F_n на два миллиона номеров, тогда как в этом интервале почти сто сорок семь тысяч простых чисел (точнее сорок восьмое по счёту в общем списке простых F_n это 146 779-ое простое число), а значит в среднем примерно лишь одно простое число из трёх тысяч является числом Фибоначчи. Добавим, что последнее в списке претендентов “на простоту” $F_{1\,968\,721} \approx 1{,}02\cdot 10^{411\,438}$, то есть имеем здесь целое число содержащее более четырёхсот тысяч десятичных знаков! Если допустить хотя бы на минуту, что вопреки ожиданиям нашей математической интуиции когда-нибудь будет доказана конечность последовательности простых чисел Фибоначчи (или совершенных чисел, чисел Мерсенна и т. п.), другими словами – существование вполне определённого наибольшего простого F_n, это может стать событием в истории чистой теории, способным затмить любое другое. Ведь подобные проблемы поставлены ещё в античном мире и за прошедшие два с половиной тысячелетия наука несмотря на усилия самых сильных умов, имея таких обладающих почти сверхъестественной математической интуицией гениев как Эйлер, Гаусс и Рамануджан, не сумела подобрать ключи к решению этих задач.

Довольно часто исследование последовательности $\{F_n\}$ сводится к исследованию последовательности его порядковых номеров, индексов n (n = 1, 2, 3, …). Так, для любого целого числа k среди первых $k^2 - 1$ чисел Фибоначчи имеется по крайней мере одно, для которого k является делителем **[**Воробьев, 40**]**. Существует вообще много зависимостей между числами Фибоначчи и натуральным рядом. Для большей определённости приведём несколько характерных примеров, хорошо известных из теории **[**там же, 47**]**.

- F_n делится без остатка на F_m тогда и только тогда когда n делится на m
- F_n делится без остатка на 2 тогда и только тогда когда n делится на 3
- F_n делится без остатка на 3 тогда и только тогда когда n делится на 4
- F_n делится без остатка на 4 тогда и только тогда когда n делится на 6
- F_n делится без остатка на 5 тогда и только тогда когда n делится на 5
- F_n делится без остатка на 7 тогда и только тогда когда n делится на 8
- F_n делится без остатка на 16 тогда и только тогда когда n делится на 12
- Если n простое число вида $5t \pm 1$, то F_{n-1} делится на n. Например F_{30} (832 040) делится на 31, поскольку 31 простое число вида $5\cdot 6 \pm 1$. Действительно, 832 040/31 = 26 840
- Если n простое число вида $5t \pm 2$, то F_{n+1} делится на n

Таких частных закономерностей обнаружено очень много, хотя наиболее сложные вопросы вроде указанной выше проблемы существования наибольшего простого числа F_n решить не удаётся.

Чрезвычайно любопытна связь между номерами чисел Фибоначчи и последними знаками их десятичного представления. Возьмём вначале первые 120 чисел F_n начиная с $F_0 = 0$ и запишем подряд все *последние* знаки:

0 1 1 2 3 5 8 3 1 4 5 9 4 3 7 0 7 7 4 1 5 6 1 7 8 5 3 8 1 9 0 9 9 8 7 5 2 7 9 6 5 1 6 7 3 0 3 3 6 9 5 4 9 3 2 5 7 2 9 1

0 1 1 2 3 5 8 3 1 4 5 9 4 3 7 0 7 7 4 1 5 6 1 7 8 5 3 8 1 9 0 9 9 8 7 5 2 7 9 6 5 1 6 7 3 0 3 3 6 9 5 4 9 3 2 5 7 2 9 1

Заметим, что третий и четвертый ряды не отличаются от первого и второго ряда сответственно. Известно, см. **[**Knott [2]**]**, что последовательность первых двух рядов из шестидесяти знаков повторяется снова и снова, и наугад взятое F_{974}, которое делится на 60 с остатком 14, оканчивается той же цифрой 7, что и F_{14}, в чём можно убедиться прямой проверкой. Аналогичное свойство имеет место для последних двух знаков множества чисел F_n, с той разницей, что в этом случае период равен уже 300. Далее, для трёх последних знаков чисел Фибоначчи период равен 1500, для четырёх – 15 000, для пяти – 150 000 и т. д. Сначала, как видим, длина начального периода 60 дважды последовательно увеличивается в пять раз, а дальше, для трёх и более последних знаков, в десять раз; следовательно, основные параметры такого циклического повторения знаков это характеризующие начальный период и его увеличение числа 60, 5 и 10.

Поистине удивительной может показаться связь ряда Фибоначчи с числом 24, см. **[**Голубев**]**, – “магической” константой физической теории **[**Аракелян**]**. Любое многозначное число можно привести к однозначному виду, складывая цифры, из которых оно составлено, затем складывая цифры полученной суммы, если таковые имеются, и т. д. до получения однозначного числа. Например для F_{137} = 19134702400093278081449423917 последовательно имеем:

$1 + 9 + 1 + 3 + 4 + 7 + 0 + 2 + 4 + 0 + 0 + 0 + 9 + 3 + 2 + 7 + 8 + 0 + 8 + 1 + 4 + 4 + 9 + 4 + 2 + 3 + 9 + 1 + 7 = 112;\ 1 + 1 + 2 = 4$

и таким образом многозначное число F_{137} переводится в 4. Поступая точно так же с начальными членами ряда Фибоначчи, получим такую последовательность чисел:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	…
a_n	1	1	2	3	5	8	4	3	7	1	8	9	8	8	7	6	4	1	5	6	2	8	1	9	…

Нетрудно убедиться, что каждый член ряда a_n начиная с третьего равен приведённой к однозначному числу сумме двух предыдущих членов, – в высшей степени любопытный результат, но это ещё не всё. Удивительная особенность данной последовательности чисел, равной кстати 117, в её повторяемости, притом с периодом в 24 члена! Это даже породило у автора открытия (В.Михайлова) идею, что набор из 24 цифр является "своеобразным цифровым кодом развития цивилизации" **[**Голубев**]**. В любом случае, имея лишь первые 24 члена последовательности, можно определить сумму цифр для произвольно взятого F_n лишь по остатку от деления его номера n на 25. Например 137 делится на 24 с остатком 17 и $a_{137} = a_{17} = 4$, в чём мы могли убедиться путём прямого вычисления, так что означенная сумма для F_{137} равна 4; а если взять допустим F_{600}, то поскольку 600 делится на 24 без остатка, $a_{600} = a_{24} = 9$. Конечно, не всё пока ясно с последовательностью a_n, и вскоре нам придётся искать ответ на кое-какие вопросы. В частности, является ли данная "скрытая" периодичность уникальной особенностью ряда Фибоначчи или есть и другие примеры? Что за всем этим стоит – очередная числовая диковинка или действительно некий тщательно закодированный закон большой значимости и внематематического содержания? Существует ли глубокая внутренняя связь между периодом из 24-х членов и другими появлениями "магического" числа 24 или это простое совпадение?

5.8. Формула Бине. Золотые числа как ФК теории чисел

Ни одна сложная задача теории чисел без участия математических констант не решается и глубокая связь между числами Фибоначчи и натуральным рядом раскрывается с помощью известной формулы Бине, впервые возможно открытой Эйлером или даже ещё раньше – в 1730 г. Муавром, см. **[**Knuth**]**, в которой фигурирует и константа ϕ:

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{2\phi - 1} \tag{5.8.1}$$

В явном, с использованием радикалов виде

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}}{\sqrt{5}} \tag{5.8.1$'$}$$

что, конечно, намного проще формулы (5.6.12) для чисел Трибоначчи. Запись F_n в виде двучлена

$$F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} \tag{5.8.1$''$}$$

ясно показывает, что первый член с увеличением n возрастает, а абсолютное значение второго уменьшается. С изменением n по натуральному закону переменная F_n пробегает значения 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,… , или правильнее сказать, что согласно формуле Бине каждому натуральному значению n ставится в однозначное соответствие число Фибоначчи F_n. Обозначая функцию округления как раньше через $R(x)$, можно записать формулу (5.8.1) в виде

$$F_n = R\left(\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}\right) \tag{5.8.1$'''$}$$

Вследствие близости $1/\sqrt{5}$ = 0,447… к 1/2 верна и формула

$$F_{n+1} = E(\phi F_n + 1/2), \quad n \neq 1 \tag{5.8.2}$$

Соотношение общего типа между числами Фибоначчи с номерами от $n + 1$ до $n + k^2$, из которого может быть получено множество других, даётся определителем порядка k, см. **[**Weisstein[1]**]**:

$$\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} & \cdots & F_{n+k} \\ F_{n+k+1} & F_{n+k+2} & F_{n+k+3} & \cdots & F_{n+2k} \\ F_{n+2k+1} & F_{n+2k+2} & F_{n+2k+3} & \cdots & F_{n+3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{n+k(k+1)+1} & F_{n+k(k+1)+2} & F_{n+k(k+1)+3} & \cdots & F_{n+k^2} \end{vmatrix} = 0 \tag{5.8.3}$$

Можно убедиться прямой подстановкой, что F_n ближайшее целое число к $\dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}}$. Оставим поэтому пока формулу Бине и займёмся величиной $1/(2\phi - 1)$, состоящей из констант 2, ϕ и 1 ($= e^{\pm 2\pi i}$), тем более что нередко она выпадает из поля зрения любителей золотого сечения. Между тем роль этой константы в теории чисел уникальна и имеет касательство к коренным свойствам континуума, проявляющимся в числовых соотношениях

действительное ↔ рациональное

континуум ↔ счётное множество ↔ конечное множество ↔ единичное

Напомним, что представление действительных чисел в виде последовательности подходящих дробей непрерывной, в частности цепной, дроби фундаментальнее чем любая *n*-ичная запись. Интуитивно ясно, но может быть и строго доказано **[**Бухштаб, теорема 242**]**, что для любого действительного числа ρ существует бесконечное множество рациональных чисел p/q таких, что

$$\left|\rho - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \tag{5.8.4}$$

В частности, в качестве рациональных приближений удобно, хотя здесь это не обязательно и непринципиально, брать значения подходящих дробей P_n/Q_n к числу ρ. Например для числа π пятая подходящая дробь

$$P_5/Q_5 = 103993/33102$$

и легко убедиться, что

$$\left|\pi - \frac{103993}{33102}\right| \approx 6\cdot 10^{-10} < \frac{1}{33102^2} \approx 9\cdot 10^{-10}$$

Напишем неравенство (5.8.4) в более общем виде

$$\left|\rho - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2} \tag{5.8.5}$$

и зададимся естественным вопросом: значение $C = 1$ единственно возможное или же есть и другие, меньшие числа, для которых выполняется последнее неравенство? В случае существования множества подобных величин стоит вопрос о предельном, наименьшем среди них числе, которое и будет истинной константой для неравенства (5.8.5). Выясняется (теорема Гурвица), что существует бесконечное множество чисел меньших единицы, для которых это неравенство выполняется, и главное, что оно содержит наименьшее число, равное как раз $1/(2\phi - 1) = 1/\sqrt{5}$. Точнее, если $C = 1/\sqrt{5}$, то множество рациональных дробей p/q, удовлетворяющих неравенству (5.8.5), бесконечно, если же $C < 1/\sqrt{5}$, то существуют значения ρ, при которых только конечное число рациональных дробей удовлетворяет этому неравенству. Константа $1/(2\phi - 1)$ здесь явно выступает как граница между *бесконечным счётным* и *конечным* множествами рациональных значений. Это удивительный скачок от бесконечного к конечному, получаемый, как видим, при самых общих предположениях.

Докажем для большей определённости, что при любом положительном $C < 1/\sqrt{5}$ и $\rho = \phi$ существует лишь конечное число рациональных чисел p/q, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\phi - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2} \tag{5.8.6}$$

Доказательством от противного **[**там же, 235**]** предположим, что последнее неравенство выполняется для бесконечного множества рациональных чисел p/q. Следовательно, для каждой такой дроби имеет место (5.8.6), представимое в виде двух таких неравенств:

$$\frac{\sqrt{5}}{2}q - \frac{C}{q} < p - \frac{q}{2} < \frac{\sqrt{5}}{2}q + \frac{C}{q}$$

которые после возведения в квадрат приводятся к виду

$$\frac{C^2}{q^2} - \sqrt{5}C < p^2 - pq - q^2 < \frac{C^2}{q^2} + \sqrt{5}C$$

По условию $C < 1/\sqrt{5}$ (вот где “зарыта собака”!), так что при достаточно больших q

$$-1 < p^2 - pq - q^2 < 1$$

Отсюда квадратичный трёхчлен равен нулю и для $p/q = r$ получаем уравнение золотого сечения

$$r^2 - r - 1 = 0$$

имеющее иррациональные корни ϕ и $-1/\phi$, что невозможно вследствие рациональности дроби p/q. Полученное противоречие и доказывает теорему, из которой следует, что при достаточно малом C неравенство (5.8.6) не будет выполняться ни для какой дроби p/q. В частности, для подходящих дробей – чисел Фибоначчи и при $C = 1/(2\phi - 1)$ неравенство

$$\left|\phi - \frac{F_{n+1}}{F_n}\right| > \frac{1}{\sqrt{5}F_n^2} \tag{5.8.7}$$

выполняется при нечетных n и не выполняется при четных n. Если же $C < 1/\phi^2$, то неравенство (5.8.6) имеет место уже для всех подходящих дробей. Словом, минимальное рациональное приближение Δ_n к числу ϕ не может быть меньше $1/\phi^2 F_n^2$ даже для чисел Фибоначчи, являющихся последовательностью наилучших приближений к числу золотого сечения.

Вернёмся к формуле Бине (5.8.1), убедительно показывающей особый характер числа ϕ. Оно, уже отмечалось, обладает способностью совместно с натуральными числами порождать, причём не приближённо, а точно, счётное множество целых положительных чисел, выстраивающихся в ряд Фибоначчи. Заставляя n принимать и отрицательные значения, имеем такую картину:

n	…	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1
F_n	…	34	−21	13	−8	5	−3	2	−1	1

Это уже положительно-отрицательный ряд Фибоначчи, возрастающий по абсолютной величине справа налево с чередованием положительных для нечетных n и отрицательных для четных n членов, то есть

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n \tag{5.8.8}$$

Можно наконец брать $-\phi$ в формуле Бине вместо ϕ и заставить n пробегать весь ряд целочисленных значений включая и нуль:

n	…	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	…
F_n	…	−13	−8	−5	−3	−2	−1	−1	0	−1	1	−2	3	−5	8	−13	…

Получен возрастающий по абсолютной величине справа налево отрицательный ряд Фибоначчи для отрицательных номеров и знакопеременный, возрастающий по абсолютной величине слева направо ряд для положительных n. Заметим также, что если $n = 0$, то $F_0 = 0$ и при $+\phi$ и при $-\phi$. Следовательно, ряд Фибоначчи, расширенный по формуле Бине с учётом знаков + и – для ϕ и всех возможных недробных значений для n, включает числа

$$0, \pm1, \pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm8, \pm13, \pm21, \pm34, \pm55, \pm89, \pm144, \pm233, \pm377, \pm610, \ldots \tag{5.8.9}$$

то есть два симметрично расположенных бесконечных множества положительных и отрицательных целых чисел с центром симметрии в точке 0. В этом смысле константа 0 может рассматриваться как начало положительного и отрицательного рядов Фибоначчи.

Дальнейшее обобщение формулы Бине, а тем самым чисел Фибоначчи на случай произвольных действительных и комплексных чисел уже невозможно без ФМК, конкретно без функции косинуса. Для произвольной комплексной переменной ρ

$$F_\rho = \frac{\phi^\rho - (\phi^{-1})^\rho \cos(\rho\pi)}{2\phi - 1} \tag{5.8.10}$$

в частности для любого действительного числа r справедлива **[**Weisstein[1]**]** формула

$$F_r = \frac{\phi^r - (\phi^{-1})^r \cos(r\pi)}{2\phi - 1} \tag{5.8.10′}$$

которая при целых значениях $r = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, обращающих косинус в ±1, переходит в формулу (5.8.1).

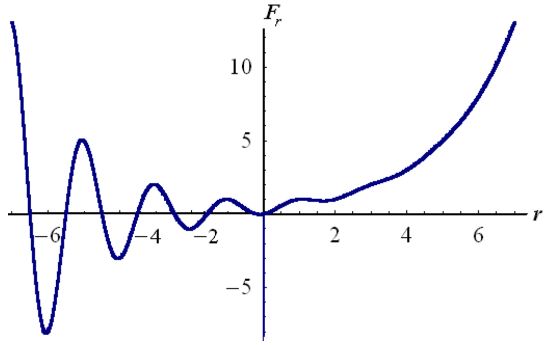


Рис. 5.8
График функции F_r в интервале $-7 \le r \le 7$

Непрерывная функция F_r, графически представленная на рисунке, стремится к $+\infty$ при $r \to +\infty$ и не имеет предела при $r \to -\infty$, совершая постоянно увеличивающиеся по амплитуде и уменьшающиеся по частоте колебания между отрицательными и положительными значениями. Она имеет по одному минимуму и максимуму для положительных и неограниченное количество экстремумов для отрицательных значений переменной r, причём ни одно из экстремальных значений F_{r_1}, $F_{r_2}, \ldots$, F_{r_n}, … целым числом Фибоначчи не является. Выделенность классического дискретного ряда Фибоначчи $\{F_n\}$ из непрерывного множества $\{F_r\}$ фактически связана с периодичностью функции косинуса, с её полупериодами:

$$F_n = f(\cos n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5.8.11}$$

Может показаться, что обобщение формулы Бине и чисел Фибоначчи посредством малоизвестных формул (5.8.10) и (5.8.10′) носит искусственный, чисто формальный характер, но взгляд со стороны, с более общих позиций может оказаться весьма полезным и даже необходимым для выяснения некоторых существенных деталей, выявления таких моментов, которые в обычном представлении совершенно неразличимы. В данном случае обобщение приводит к пониманию внутренней связи дискретного ряда Фибоначчи F_n с исходными функциональными уравнениями $\mathbf{E}_3$ и $\mathbf{E}_4$, то есть с периодичностью экспоненты, которая в обобщённой формуле Бине выражается периодичностью косинуса. Эта формула относится ко всем не только действительным, но и комплексным числам, другими словами – ко всему числовому континууму без каких-либо ограничений. Важно при этом отметить, что правило третьего члена справедливо и в общем случае, для любого числа z в форме

$$F_z + F_{z+1} = F_{z+2} \tag{5.8.12}$$

Если, допустим, $z = 4\mathrm{e} - \mathrm{i}/3$, то

$$F_{4\mathrm{e}-\mathrm{i}/3} + F_{4\mathrm{e}-\mathrm{i}/3+1} = F_{4\mathrm{e}-\mathrm{i}/3+2}$$

Можно поэтому констатировать, что и в самом общем случае сумма двух функций с отличающимися на единицу аргументами определяется суммой их аргументов. Правило третьего члена нетрудно обобщить на случай k членов с индексами z, $z + 1$, $z + 2$, …, $z + k$, выписав в столбик (как в задаче о кроликах из 5.5) k очевидных равенств:

$$\begin{aligned}
F_z &= F_{z+2} - F_{z+1} \\
F_{z+1} &= F_{z+3} - F_{z+2} \\
F_{z+2} &= F_{z+4} - F_{z+3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_{z+k-2} &= F_{z+k} - F_{z+k-1} \\
F_{z+k-1} &= F_{z+k+1} - F_{z+k} \\
F_{z+k} &= F_{z+k+2} - F_{z+k+1}
\end{aligned}$$

Суммируя отдельно левые и правые части равенств, придем к окончательной формуле

$$\sum_{m=0}^{k-1} F_{z+m} = F_z + F_{z+1} + \ldots + F_{z+k-1} = F_{z+k+1} - F_{z+1} \tag{5.8.13}$$

которую можно назвать правилом k + 1-го члена. В частном случае, когда z действительное целое положительное число m, имеем сумму стоящих рядом k членов обычной последовательности Фибоначчи, для которой

$$F_m + F_{m+1} + \ldots + F_{m+k-1} = F_{m+k+1} - F_{m+1} \qquad (5.8.13')$$

Если же $m = 1$, $k = n$, а значит $F_{m+1} = F_2 = 1$, получим уже известную нам формулу (5.5.7) для суммы первых n чисел Фибоначчи.

5.9. Формула Бине, число ϕ, числа Фибоначчи и Люка

Вернёмся теперь к простейшим формулам (5.2.7) и обобщим их на случай произвольных целых степеней. Последовательное вычисление даёт

$$\begin{aligned} \phi^2 &= 1 + \phi \\ \phi^3 &= 1 + 2\phi \\ \phi^4 &= 2 + 3\phi \\ \phi^5 &= 3 + 5\phi \\ \phi^6 &= 5 + 8\phi \\ \phi^7 &= 8 + 13\phi \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (5.9.1)$$

Отсюда формула

$$\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2} \qquad (5.9.2)$$

обобщаемая и на случай целых отрицательных степеней $-n$. Она означает, что в образованной степенями числа ϕ геометрической прогрессии

$$\ldots\ \phi^{-n},\ \phi^{-n+1},\ \ldots,\ \phi^{-1},\ \phi,\ \phi^2,\ \ldots,\ \phi^{n-1},\ \phi^n,\ \ldots$$

каждый член равен сумме двух предшествующих, – это арифметическая формулировка знаменитого аддитивного свойства золотого сечения. Разделив обе части (5.9.2) на ϕ^{n-2} и сравнив полученное соотношение с квадратным уравнением (5.2.1), видим, что ϕ единственное число, обладающее данным свойством.

Из соотношений (5.9.1) можно по математической индукции получить общую формулу

$$\phi^n = F_{n-1} + \phi F_n \qquad (5.9.3)$$

Она может быть получена и сразу, с помощью формулы Бине, взятой для соседних значений F_{n-1} и F_n, но здесь важно было наглядно показать последовательную “трансформацию” членов геометрической прогрессии

$$\phi,\ \phi^2,\ \phi^3,\ \ldots,\ \phi^n,\ \ldots$$

в линейные комбинации строго определённого типа. Аналогично находится общая формула и для целых отрицательных степеней

$$\phi^{-n} = (-1)^n (F_{n+1} - \phi F_n) \qquad (5.9.4)$$

которая для четных степеней $n = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ принимает вид

$$\phi^{-2k} = F_{2k+1} - \phi F_{2k} \qquad (5.9.5)$$

а для нечетных степеней $2k - 1$ знаки перед слагаемыми в правой части меняются на противоположные:

$$\phi^{-(2k-1)} = \phi F_{2k-1} - F_{2k} \qquad (5.9.6)$$

С учётом того, что $F_0 = 0$, а $F_1 = 1$, формула (5.9.4) верна и в случае $n = 0$.

Формулы (5.9.3) и (5.9.4) заслуживают особого внимания. Известно, что n-ая степень произвольного числа типа $r = 1 + p$ ($|p| < 1$) определяется, вообще говоря, биномом Ньютона и содержит $n + 1$ член с биномиальными коэффициентами для всех степеней до p^n включительно. При отрицательных же степенях имеет место формула

$$(1 + p)^{-n} = 1 - np + \frac{n(n-1)}{2!}p^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}p^3 + \ldots \qquad (5.9.7)$$

по которой выражение $(1 + p)^{-n}$ разлагается в бесконечный ряд, содержащий сколь угодно высокие степени p. Насколько же проще соответствующие формулы для ϕ^n и ϕ^{-n} (напомним, что $\phi = 1 + 0{,}618\ldots$), содержащие лишь два слагаемых и первую степень золотого числа! В том и состоит одна из особенностей чисел золотого сечения, что для них нелинейное по простому закону переводится в линейное, а положительное или отрицательное целое переводится в единицу. Устанавливается своеобразная аналитическая зависимость между натуральными числами и членами ряда Фибоначчи, между иррациональными и целыми числами, или в понятиях геометрии между несоизмеримыми и соизмеримыми отрезками. Замечательная связь трёх математических сущностей: целых чисел, чисел Фибоначчи и константы ϕ очень важна.

Ряд Фибоначчи можно, конечно, строить “эмпирически”, на основе индуктивного правила

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{5.9.8}$$

названного нами правилом третьего члена, но если стоит задача найти аналитическое выражение для общего члена ряда, то без целых чисел уже не обойтись. Роль же связующего звена между числами 0, ± 1, ± 2, … и F_n, образующими подмножество первых, играет иррациональное число ϕ. Заметим, что иррационально не только само ϕ, но и все его степени ϕ^n и ϕ^{-n} (доказывается от противного с использованием формул (5.9.3) и (5.9.4)). Существуют красивые соотношения для их суммы и разности. Складывая и отнимая обе части этих выражений, получим

$$\phi^n + \phi^{-n} = F_{n-1} + F_{n+1} \quad \text{для четных степеней} \tag{5.9.9}$$

$$\phi^n - \phi^{-n} = F_{n-1} + F_{n+1} \quad \text{для нечетных степеней} \tag{5.9.10}$$

Следовательно, сумма или разность иррациональных чисел для всех n оказывается целым положительным числом L_n, представляющим собой сумму двух стоящих через один членов ряда Фибоначчи:

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \tag{5.9.11}$$

Заставляя переменную n пробегать натуральные значения, построим отвечающий условию аддитивности

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \tag{5.9.12}$$

ряд, первые 30 членов которого таковы:

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1 364, 2 207, 3 571, 5 778, 9 349, 15 127, 24 476, 39 603, 64 079, 167 761, 271 443, 439 204, 710 647, 1 149 851, 1 860 498, … (5.9.13)

Нулевой член L_0 последовательности Люка по формуле (5.9.11) равен не 0 как в случае последовательности Фибоначчи, а 2, для отрицательных же значений $-n$ имеем знакопеременный (ср. с (5.8.8)) ряд

$$L_{-n} = (-1)^n L_n \tag{5.9.14}$$

При исследовании первых пятидесяти тысяч L_n простыми оказались числа со следующими номерами **[**Dubner and Keller; Brillhart; Caldwell; Broadhurst and Irvine**]**:

$n =$ 0, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 17, 19, 31, 37, 41, 47, 53, 61, 71, 79, 113, 313, 353, 503, 613, 617, 863, 1 097, 1 361, 4 787, 4 793, 5 851, 7 741, 8 467, 10 691, 12 251, 13 963, 14 449, 19 469, 35 449, 36 779, 44 507, 51 169, 56 003

Предположительно простыми (H. Dubner, de Water, H. Lifchitz, R. Lifchitz) являются и числа Люка с номерами, см. **[**Weisstein[3]**]**

$n =$ 81 671, 89 849, 94 823, 140 057, 148 091, 159 521, 183 089, 193 201, 202 667, 344 293, 387 433, 443 609, 532 277, 574 219, 616 787, 631 181, 637 751, 651 821, 692 147, 901 657, 1 051 849

В исследованном числовом промежутке простых чисел Люка, как видим, на треть больше чем чисел Фибоначчи, хотя и неизвестно, является ли такое соотношение случайной аномалией или же оно верно и для бóльших интервалов значений индекса n. Разумеется, и в этом случае вопрос о конечности или бесконечности множества простых чисел L_n остаётся открытым, тем более что некоторые бесконечные множества целых чисел содержат лишь по одному или нескольку членов последовательностей Фибоначчи и Люка. Так, квадратными являются лишь числа $F_1 = F_2 = 1$, $F_{12} = 144$ и $L_1 = 1$, $L_3 = 4$ **[**Cohn; Guy**]**; только 1 и $F_6 = 8$ относятся к кубическим числам Фибоначчи **[**Ming 1989**]**, а единственным кубическим числом Люка является всё та же 1; к треугольным, то есть числам типа

$$L_n = \frac{1}{2} n(n+1) = \binom{n+1}{2}, \quad \text{где } \binom{n+1}{2} \text{ биномиальный коэффициент}$$

относятся члены ряда Фибоначчи 1, 3, $F_8 = 21$, $F_{10} = 55$ **[**Ming 1989**]** и числа Люка 1, 3, $L_{18} = 5778$ **[**Ming 1991**]**. Весьма ограниченно и множество тех чисел F_n, для которых сумма десятичных знаков равна номеру n (например, $F_{10} = 55$, $5 + 5 = 10$), причём доказано **[**Terr**]**, что уже для номеров $n > 5000$ такое невозможно, и наибольшее число, обладающее данным свойством, видимо F_{2222}.

Аналогом формулы Бине для L_n является формула

$$L_n = \phi^n + (-\phi)^{-n} \tag{5.9.15}$$

Она может быть получена независимым образом, например по индукции, и отличается от (5.8.1) отсутствием множителя $1/\sqrt{5}$, а также знаком при убывающем члене $(-\phi)^{-n}$. Сразу видно, что между F_n и числами Люка, о которых см. **[**Hoggatt 1969; Vajda; Hilton *et al.***]**, имеет место приближённое равенство

$$L_n = F_n(2\phi - 1) \tag{5.9.16}$$

которое тем точнее, чем больше номер n. Так, если n = 10, эта разность меньше одной сотой, при n = 100 она составляет лишь 10^{-21}, а при n = 10 000 выражается очень малым числом $\approx 10^{-2090}$. Следовательно, попеременно становясь то больше целого числа – нечетные степени, формула (5.9.10), то меньше – четные степени, формула (5.9.9), последовательность иррациональных чисел ϕ^n стремится в *бесконечности* к совпадению с целым. С помощью функции округления $R(x)$ можно записать формулу (5.9.15) в виде

$$L_n = R(\phi^n) \tag{5.9.15$'$}$$

что проще аналогичной формулы (5.8.1‴) для F_n. Число Люка с номером n + 1 может быть задано и посредством определителя порядка n, составленного из L_2 = 3, нуля, мнимой и положительной единиц **[**Honsberger, 113–114**]**:

$$D_n \equiv \begin{vmatrix} 3 & \mathrm{i} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathrm{i} & 1 \end{vmatrix} = L_{n+1} \tag{5.9.17}$$

Следовательно, правило третьего члена (5.9.12) для чисел Люка можно записать и через сумму определителей:

$$D_n = D_{n-1} + D_{n-2} \tag{5.9.12$'$}$$

С помощью формулы Бине для чисел Фибоначчи и Люка легко получаются или доказываются равенства, кажущиеся по крайней мере на первый взгляд сложными для понимания. Например, формула **[**Shanks; Knott[5]**]**

$$\sqrt[n]{\frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[k]{\frac{L_k - F_k\sqrt{5}}{2}} = 1 \tag{5.9.18}$$

где n и k любые, положительные или отрицательные, *четные* числа, вряд ли выглядит простой и очевидной. В формуле такого типа чередование знаков + и – (под знаком первого радикала, затем между радикалами и наконец под знаком второго радикала) может быть, конечно, и другим. Возможны всего 2^3 = 8 вариантов, приводящих к значениям, показанным в таблице, где слева выписаны не сами однотипные формулы, а чередование знаков слева направо.

$+++$	2ϕ
$++-$	$2\phi - 1$
$+-+$	0
$+--$	1
$-++$	$2\phi - 1$
$-+-$	$2\phi - 2$
$--+$	-1
$---$	0

Если теперь в формулу (5.9.18), которой кстати соответствует четвертая строка сверху, подставить значения F_n, F_k из (5.8.1) и L_n, L_k из (5.9.15), она сразу приходит к виду

$$\sqrt[n]{\phi^n} - \sqrt[k]{(-\phi)^{-k}} = \phi - \phi^{-1} = 1.$$

“Сложная” формула (5.9.18) оказывается без маски радикалов разностью золотого числа и его обратной величины. В случае же нечетных степеней второе слагаемое имеет действительный корень $-\phi^{-1}$ лишь при k =

± 1, другими словами для всех $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ и $k = \pm 1$ разность двух радикалов равна $\sqrt{5}$, а сумма единице; для всех остальных значений k разность или сумма радикалов комплексное число. Поэтому содержащееся в **[**Knott[5]**]** утверждение, что для всех нечетных степеней, например для $n = 5$ и $k = 9$, сумма указанных радикалов равна 1, неверно: в общем случае нечетных значений k для получения действительного корня следует брать модуль подкоренного выражения. Остаётся добавить, что такими же способами решаются вопросы в остальных семи случаях.

Разумеется, показатель степени в формуле Бине для чисел Люка, как и для чисел Фибоначчи, не обязательно должен быть натуральным числом, кроме того вместо константы ϕ можно брать $-\phi$. В случае чисел F_n одновременная замена $n \to -n$, $\phi \to -\phi$ привела к отрицательному ряду Фибоначчи, который симметричен положительному ряду относительно равного нулю нулевого члена ($F_0 = 0$). В случае чисел L_n дело обстоит несколько иначе. Во-первых, по формуле Бине $L_0 = 2$, а не нулю, так что симметрия относительно нулевой точки исключается. Во-вторых, функция L_n, как видно из той же формулы (5.9.15), инвариантна относительно одновременной замены $n \to -n$, $\phi \to -\phi$. При отдельных же заменах $n \to -n$ либо $\phi \to -\phi$ отрицательные числа Люка получаются только для нечетных степеней. Следовательно, ряд Люка, несимметричный относительно нуля, “ущербен” и в смысле отсутствия отрицательных чисел типа L_{-2k}. Если же в формулах Бине для чисел Фибоначчи и Люка заменить n на какое-либо нецелое действительное r, получим нецелые числа F_r и L_r, для которых соотношение типа (5.9.11) выполняться уже не будет, однако правило третьего члена останется в силе и для бесконечных последовательностей $F_r, F_{r+1}, F_{r+2}, F_{r+3}, \ldots$ и $L_r, L_{r+1}, L_{r+2}, L_{r+3}, \ldots$

Секрет особой привлекательности, необычайной популярности чисел Фибоначчи и в меньшей мере чисел Люка можно видеть в том, что это *математика для всех* – от школьников до членов научных обществ, от любителей математики до профессиональных математиков. Это полная самых неожиданных сюрпризов и нескончаемая игра с числами, отдельные результаты которой обогащают теорию чисел и имеют серьёзное прикладное значение. Существует богатая и непрерывно пополняемая новыми экспонатами коллекция самых разнообразных формул и соотношений, относящихся к числам Фибоначчи либо Люка и отношениям между ними, а также к связям тех и других с числом ϕ и его гомологами. Обобщённый ряд Фибоначчи с его универсальной формулой (5.6.3) зависимости произвольного члена ряда u_n ($n > 2$) от начальных членов (четырёх для комплексных чисел и двух для действительных) значительно облегчает получение и доказательство многих известных соотношений для чисел Фибоначчи и Люка. Знакомство с указанной коллекцией, не обязательное с точки зрения основных направлений настоящей работы и решения поставленных в данной главе задач, но желательное для более глубокого и ясного понимания рассматриваемых вопросов, ограничится относительно небольшим количеством формул, в большинстве своем содержащих бесконечное суммирование.

Вначале внесем ясность в вопрос об инвариантности групповых свойств множеств $\{F_n\}$ и $\{L_n\}$ относительно математических операций, введенных в главе 1 при построении формализма теории ЛМФ. Напомним, что множества мнимых, действительных, рациональных, натуральных, простых и т. д. чисел лишь подмножества множества комплексных чисел, а любая математическая операция, производимая над последними, не может влиять на их числовую природу: в противном случае оно было бы неполным и пришлось бы вводить числа более общего типа. Разумеется, все упомянутые здесь подмножества чисел являются полными в указанном смысле лишь по отношению к тем или иным математическим действиям. Например, сумма или произведение двух натуральных чисел является натуральным числом, но уже при делении получаются не только натуральные числа; а допустим множество простых чисел неполно относительно любых арифметических действий. Согласно правилу третьего члена, которое по сути генерирует ряды Фибоначчи и Люка, лишь сумма или разность двух стоящих рядом членов ряда (невольная игра слов) относится к тому же ряду чисел. А вот сумма, разность, а также произведение, не говоря уж о частном от деления двух произвольно взятых чисел Фибоначчи (или Люка), множеству $\{F_n\}$ (или $\{L_n\}$) не принадлежат. Возьмём теперь множества

$$\left\{\frac{L_n - F_n}{2}\right\}, \quad \left\{\frac{F_n + L_n}{2}\right\}, \quad \{F_n L_n\} \qquad (5.9.19)$$

составленные из полусумм, полуразностей и произведений чисел Фибоначчи и Люка с одинаковыми номерами. Прямой подстановкой (5.9.11) сразу получаются формулы

$$\frac{L_n - F_n}{2} = F_{n-1}, \quad \frac{F_n + L_n}{2} = F_{n+1} \qquad (5.9.20)$$

которые показывают, что все числа первых двух типов принадлежат множеству $\{F_n\}$. Может показаться, что коль скоро ряд Люка определяется через ряд Фибоначчи, перед нами простые тавтологии. Но ведь числа Люка могут определяться и независимо от чисел Фибоначчи на основе правила третьего члена, путём задания первых двух членов ряда: $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, или же $L_0 = 2$, $L_1 = 1$. Мы фактически использовали готовый результат, но вопрос может быть решен минуя его, на основе общих принципов. Подставляя в общую формулу обобщённого ряда Фибоначчи (5.6.3) значения $a = 1$, $c = 3$, $b = d = 0$, сразу получим

$$L_n = F_{n-2} + 3F_{n-1} \tag{5.9.21}$$

именно это соотношение, а не выводимое отсюда (5.9.11) следует считать исходным для ряда Люка. А вывод с использованием правила третьего члена тривиален:

$$L_n = 2F_{n-1} + (F_{n-2} + F_{n-1}) = 2F_{n-1} + F_n = F_{n-1} + (F_{n-1} + F_n) = F_{n-1} + F_{n+1}$$

отсюда значительно проще чем раньше, без всяких соотношений для числа ϕ получается искомое (5.9.11), а попутно соотношение

$$L_n = 2F_{n-1} + F_n \tag{5.9.22}$$

Перемножим теперь левые и правые части формул Бине для чисел F_n и L_n:

$$F_n L_n = \frac{\phi^{2n} - (-\phi)^{2n}}{\sqrt{5}} = F_{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Формула

$$F_n L_n = F_{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.9.23}$$

означает, что произведение чисел F_n и L_n с одинаковыми номерами n есть число Фибоначчи с номером $2n$, например,

$$F_8 L_8 = 21 \cdot 47 = 987 = F_{16}$$

Взаимная связь чисел Фибоначчи и Люка с их порядковыми номерами, индексами хорошо видна на примере формул сложения и умножения индексов. Для любого индекса $m+n$ ($m \geq 1$, $n \geq 1$) верна формула сложения

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1} \tag{5.9.24}$$

которую можно доказать методом математической индукции и которая, кстати, верна и для любого комплексного числа $x + \mathrm{i}y$. Отсюда непосредственно

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}), \quad F_{3n} = F^3_{n+1} + F^3_n - F^3_{n-1}, \ldots$$

следовательно вычисление любого числа F_{kn} сводится к действиям над числами F_{n-1}, F_n, F_{n+1}, где n может быть любым действительным, но уже не мнимым или комплексным числом. Если же индекс даётся в форме $m \times n$, справедлива довольно сложная формула умножения

$$F_{m\times n} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} F_k F_n^k F_{n-1}^{m-k} \tag{5.9.25}$$

допускающая и другие формы представления. Аналогичные формулы есть, разумеется, для чисел L_n, например простая замена $F_k \to L_k$ в последней формуле приводит к формуле умножения для числа Люка с тем же номером $m \times n$:

$$L_{m\times n} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} L_k F_n^k F_{n-1}^{m-k} \tag{5.9.26}$$

Приведём также без доказательства и комментариев соотношения с бесконечным суммированием по индексу i, первое из которых получено в [Clark], два последующих в [Wells], следующие четыре взяты из содержащей около двух сотен различных формул для золотого числа, чисел Фибоначчи и Люка работы [Knott[3]], а последние четыре нашего изобретения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+2}} = 2 - \sqrt{5} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{F_{n+1} F_{n+2}} = \phi^{-2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n} F_{2n+2}} = \phi^{-2}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F_i}{2^i} = 2 \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{L_i}{2^i} = 6 \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{iF_i}{2^i} = 10 \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{iL_i}{2^i} = 22$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F_i}{4^i} = \frac{4}{11} \qquad 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{\phi^{2i}} = \phi \qquad 3\sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{\phi^{3i}} = 1 \qquad 10\sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{\phi^{5i}} = 1$$

Далее представим соотношения, дающие константы частного образца, каких в математике великое множество. Бесконечное суммирование чисел Фибоначчи под знаком радикалов

$$h_F = \sqrt{F_0 + \sqrt{F_1 + \sqrt{F_2 + \sqrt{F_3 + \ldots}}}} = 1{,}28917\,89877\,00238\,44892\ldots$$

приводит к ранее неизвестному числу. Любопытно, что его квадратный корень

$$\sqrt{h_F} = 1{,}13542\,0181\ldots \qquad (5.9.27)$$

близок, но не равен другой константе подобного рода. Известно, что если в соответствии с правилом третьего члена составить *случайную* последовательность Фибоначчи

$$x_n = \pm x_{n-1} \pm x_{n-2}, \quad n \geq 2,\ x_0 = 0,\ x_1 = 1$$

в которой все знаки сложения и вычитания независимы и равновероятны, выполняется **[**Vishwanath**]**, см. также **[**Hayes; Peterson**]**, предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} \approx 1{,}13198\,824 \qquad (5.9.28)$$

с вероятностью равной 1. Установлено также **[**Embree and Trefethen**]**, что случайная последовательность типа

$$x_n = x_{n-1} \pm \beta x_{n-2}$$

сходится по показательному закону, если параметр $0 < \beta < 0{,}70258$, и расходится при $\beta > 0{,}70258$. Это интересные результаты, нуждающиеся в дальнейшем теоретическом анализе и содержательном осмыслении.

Существует бесконечно много удовлетворяющих теореме Пифагора целых чисел a и b, сумма квадратов которых равна целому числу c. Геометрически такой тройке чисел соответствует прямоугольный треугольник Пифагора, классическим примером которого служит египетский треугольник с отношением сторон 3:4:5. Различные тройки чисел, соответствующие данному условию, нетрудно получить с помощью чисел Фибоначчи и Люка. Пусть даны любые четыре следующие подряд числа F_n, например $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$. Для произведения крайних членов $5\cdot 21 = 105$, и для удвоенного произведения средних членов $2\cdot 8\cdot 13 = 208$ имеем

$$\sqrt{(F_5F_8)^2 + (2F_6F_7)^2} = \sqrt{105^2 + 208^2} = 233 = F_{13}$$

Это частный, соответствующий $n = 5$ случай общей формулы **[**Marchisotto; Raine**]**

$$\sqrt{(F_nF_{n+3})^2 + (2F_{n+1}F_{n+2})^2} = F_{2n+3}, \quad n > 0 \qquad (5.9.29)$$

Заставляя переменную n пробегать натуральный ряд начиная с единицы, получим последовательность троек

$\{F_nF_{n+3}\}$, $\{2F_{n+1}F_{n+2}\}$, $\{F_{2n+3}\}$:

$(3, 4, 5)_{n=1}$, $(5, 12, 13)_{n=2}$, $(16, 30, 34)_{n=3}$, $(39, 80, 89)_{n=4}$, $(105, 208, 233)_{n=5}$, $(272, 546, 610)_{n=6}$, $(715, 1428, 1597)_{n=7}$, $(1869, 3740, 4181)_{n=8}$, $(4896, 9790, 10\,946)_{n=9}$, $(12\,815, 25\,632, 28\,657)_{n=10}$, …

Каждая тройка завершается числом F_{2n+3}, но по всей видимости **[**Horadam**]** лишь первые две тройки содержат ещё по одному числу Фибоначчи и нет ни одного пифагорова треугольника, составленного из трёх чисел Фибоначчи. Формула (5.9.29) верна и для $n = 0$, а для отрицательных целых чисел, учитывая, что для нечетных чисел Фибоначчи имеет место равенство $F_{2k-1} = F_{-(2k-1)}$, справедлива формула

$$\sqrt{(F_nF_{n+3})^2 + (2F_{n+1}F_{n+2})^2} = F_{2n+3} = F_{-(2n+3)} \qquad (5.9.30)$$

Аналогичные формулы могут быть получены для всех номеров $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ чисел Люка:

$$\sqrt{(L_nL_{n+3})^2 + (2L_{n+1}L_{n+2})^2} = L_{2(n+1)} + L_{2(n+2)} \qquad (5.9.31)$$

Как пифагоров треугольник с катетами F_n, F_{n+1} и гипотенузой $\sqrt{F_{2n+1}}$ можно интерпретировать и найденное ещё в 1876 г. Люка (François Édouard Anatole Lucas, 1842–1891) соотношение

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} \qquad (5.9.32)$$

справедливое для всех $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Добавим, что для суммы квадратов первых k чисел Фибоначчи известна простая и изящная формула

$$\sum_{n=1}^{k} F_n^2 = F_kF_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5.9.33)$$

Кеплеру принадлежат крылатая фраза, которая приводится всякий раз, когда заходит речь о великих исследователях и почитателях золотого сечения: “Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них – это теорема Пифагора, а другое – деление отрезка в среднем и крайнем отношении... Первое можно сравнить с мерой золота, второе же больше напоминает драгоценный камень”. Кеплер, вероятно, не знал, что его великий предшественник Леонардо да Винчи уже употребил словосочетание “золотое сечение”, и не мог знать, что со временем оно станет общеупотребительным, иначе он скорее всего поменял бы местами оценки, данные двум сокровищам. Видимо не знал он и о связи посредством чисел Фибоначчи между сокровищами, иначе не преминул бы отметить, что оба – из одной и той же математической шкатулки.

Для большей полноты изложения ознакомимся с некоторыми другими интересными экспонатами из указанной коллекции формул и соотношений между константой ϕ, числами F_n и L_n. Многие соотношения между числами Фибоначчи являются лишь частными случаями общей формулы **[**Johnson**]**

$$F_n F_m - F_k F_l = (-1)^r (F_{n-r} F_{m-r} - F_{k-r} F_{l-r}) \tag{5.9.34}$$

которая справедлива для всех целых включая нуль положительных и отрицательных значений r, n, m, k, l, если только $n + m = k + l$. Подставляя например значения $k = l = 0$, $m = -n$, после очевидных преобразований получим формулу

$$F_n^2 - F_{n+i} F_{n-i} = (-1)^{n+i} F_i^2 \tag{5.9.34′}$$

носящую имя Каталана. Если к тому же $i = 1$, имеем известную формулу

$$F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1} \tag{5.9.34′′}$$

для трёх соседних чисел Фибоначчи. А в случае подстановок $n \to n + 1$, $m \to n + 2$, $k \to n$, $l \to n + 3$, $r \to n$ придем к формуле

$$F_{n+1} F_{n+2} - F_n F_{n+3} = (-1)^n, \quad n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5.9.34′′′}$$

означающей, что в любой четверке соседних чисел Фибоначчи разница между произведением средних и произведением крайних членов равна по модулю единице (ср. 5.3.2 и 5.9.29).

Весьма любопытна экспоненциальная связь между бесконечными рядами

$$F_1 + F_2 x + F_3 x^2 + \ldots \quad \text{и} \quad L_1 x + \frac{1}{2} L_2 x^2 + \frac{1}{3} L_3 x^3 + \ldots$$

составленными из чисел Фибоначчи и Люка **[**Honsberger**]**:

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} L_i x^i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i x^{i-1} \tag{5.9.35}$$

в обобщённом варианте **[**Johnson**]** для произвольных F_k и L_k

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} L_{ki} x^i \right) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} F_{ik} x^{i-1}}{F_k} \tag{5.9.36}$$

Имея в наличии и ряд Люка, теперь время вернуться к вопросу о единственности приведённого ряда Фибоначчи с периодом повторяющихся свойств равным 24. Члены ряда L_n, приведённые к однозначному виду a_n способом описанным в 5.7, образуют такую последовательность чисел:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	…
a_n	1	3	4	7	2	9	2	2	4	6	1	7	8	6	5	2	7	9	7	7	5	3	8	2	…

Нетрудно убедиться прямой проверкой, что правило третьего члена (назовем его свойством S_1) выполняется и здесь, а следовательно не может считаться уникальной особенностью ряда Фибоначчи. Остаётся убедиться в существовании периода, равного магическому числу 24 (свойство S_2). Имеем 8 + 2 = 10, 1 + 0 = 1 для a_{25}, 1 + 2 = 3 для a_{26}, 1 + 3 = 4 для a_{27}, словом всё как и в первом периоде, даже сумма всех членов равна как прежде 117. Следовательно, оба указанных свойства, первоначально установленные, см. **[**Голубев**]**, лишь для последовательности F_n, в равной мере относятся к последовательности чисел L_n.

Это наводит на мысль, что указанные свойства намного более широкого охвата, чем могло показаться вначале. Ряд Люка, который может строиться по схеме $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ либо $L_n = F_{n-2} + 3F_{n-1}$ либо $L_n = 2F_{n-1} + F_n$ либо как-то иначе, в любом варианте представляет собой частный случай числового ряда типа

$$R_n = aF_{n-k} + bF_{n+m} \tag{5.9.37}$$

где a, b, k, m целые неотрицательные числа и по крайней мере один из множителей a, b не нуль. Назовем последовательности такого типа *квазифибоначчиевыми* и исследуем их на предмет соответствия свойствам S_1 и S_2. При $a = 1$, $b = k = m = 0$ ряд R_n тождествен F_n, а если $a = b = k = m = 1$, имеем ряд Люка, но нас интересует общий случай. Необходимо выяснить, выполняются ли свойства S_1 и S_2 для любой последовательности типа R_n или же есть какие-то ограничения. За неимением общего доказательства рассмотрим две последовательности с достаточно произвольно взятыми наборами параметров $a = 3$, $b = 7$, $k = 2$, $m = 5$ и $a = 4$, $b = 1$, $k = 3$, $m = 19$. Берем следовательно для испытания два квазифибоначчиевых ряда

$$R'_n = 3F_{n-2} + 7F_{n+5} \tag{5.9.38}$$

$$R''_n = 4F_{n-3} + F_{n+19} \tag{5.9.39}$$

которые приводятся к последовательностям $\{a'_n\}$ и $\{a''_n\}$. Соответственно имеем:

$R'_n =$ 9, 91, 150, 241, 391, 632, 1023, 1655, 2678, 4333, 7011, 11 344, 18 355, 29 699, 48 054, 77 753, 125 807, 203 560, 329 367, 532 927, 862 294, 1 395 221, 2 257 515, 3 652 736, …

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	…
a'_n	5	1	6	7	4	2	6	8	5	4	9	4	4	8	3	2	5	7	3	1	4	5	9	5	…

$R''_n =$ 6 761, 10 950, 17 711, 28 661, 46 372, 75 033, 121 405, 196 438, 317 843, 514 281, 832 124, 1 346 405, 2 178 529, 3 524 934, 5 703 463, 9 228 397, 14 931 860, 24 160 257, 39 092 117, 63 252 374, 102 344 491, 165 596 865, 267 941 356, 433 538 221, …

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	…
a''_n	2	6	8	5	4	9	4	4	8	3	2	5	7	3	1	4	5	9	5	5	1	6	7	4	…

Таким образом, начиная с третьего члена свойство S_1 выполняется для всех 24 начальных членов обеих последовательностей $\{a'_n\}$ и $\{a''_n\}$. Продолжая испытание для номеров $n > 24$, придем к однозначному выводу о справедливости в обоих случаях и свойства S_2. Тем не менее полученных результатов в отсутствие строгого доказательства и при небольшой выборке недостаточно для утверждения, что свойства S_1 и S_2 в равной мере относятся ко всем последовательностям типа R_n, и к этому вопросу придётся ещё вернуться.

Литература

Аракелян Г. Б. *Числа и величины в современной физике*. Ереван: Изд. АН, 1989

– *24 как число природы* http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161597.htm; http://levonabrahamian.com/cntnt/yubilej/stati1/stati/grant_arak.html; *24 – число природы* http://www.info-mica.com/blogs-science/newsnew -3784.html; http://www.numbernautics.ru/content/view/568/62/

Аристотель. *Метафизика*. В кн.: Аристотель. Соч. в четырёх томах, т. 1. М.: Мысль, 1976, с. 63–367

Бигава Э.И. *Характер установочных эффектов при различных двигательных задачах.* В кн.: Вопросы инженерной и социальной психологии. Тбилиси: Мецниереба, 1979

Бухштаб А. А. *Теория чисел*. М.: Просвещение, 1966

Ван дер Варден Б. Л. *Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции.* М.: Физматгиз, 1959

Воробьев Н. Н. *Числа Фибоначчи*. М.: Наука, 1978

Гика М. *Эстетика пропорций в природе и искусстве*. М.: Изд. Акад. архитектуры, 1936

Голубев М. *Числа Фибоначчи*. Энциклопедия чудес, загадок и тайн http://golubev-maksim.viv.ru/cont/team_x/18.html

Колмогоров А. Н. *Алгоритм Эвклида*. В кн.: БСЭ, т. 42. М.: Большая сов. энцикл., 1950, с. 65–67

Лефевр В. А. *Рефлексия*. М.: Когито-Центр, 2003

Маркушевич А. И. *Возвратные последовательности*. М.: Наука, 1983

Пидоу Д. *Геометрия и искусство*. М.: Мир, 1979

Стахов А. П. Музей Гармонии и Золотого Сечения http://www.goldenmuseum.com/index_rus.html

– Там же[1] http://www.goldenmuseum.com/01Introduction_rus.html

Тимердинг Г. Е. *Золотое сечение*. Петроград.: Научн. изд., 1924

Хинчин А.Я. *Цепные дроби*. М.: Наука, 1978

Alfred U. *An Introduction to Fibonacci Discovery*. Fibonacci Association, San Jose State College (Calif.), 1965

Bicknell M. and **Hoggatt V.E.Jr.** *A Primer For the Fibonacci Numbers: Part IX*. The Fib. Quart. **9**, 529–536 (1971)

Boase M.S. *A Result About the Primes Dividing Fibonacci Numbers*. The Fib. Quart. **39**, 386–391 (2001)

Brillhart J. *Note on Fibonacci Primality Testing*. The Fib. Quart. **36**(3), 222–228 (1998)

Broadhurst D. and **Irvine S.** *Lucas Record*. Post to primeform user forum http://groups.yahoo.com/group/primeform/message/7534

Caldwell C. *Fibonacci Prime* http://primes.utm.edu/glossary/page.php?sort=FibonacciPrime
– *Lucas Prime* http://primes.utm.edu/glossary/page.php?sort=LucasPrime

Carmichael R.D. *On the Numerical Factors of the Arithmetic Forms* $\alpha^n \pm \beta^n$. Annals of Math. **15**, 30–70 (1913)

Catalani M. *Identities for Tribonacci-Related Sequences*. arXiv:math.CO/0209179, v.1, 15 Sep (2002)

Clark D. *Solution to Problem 10262*. Amer. Math. Monthly **102**, 467 (1995)

Cohn J.H.E. *On Square Fibonacci Numbers*. Journ. London Math. Soc. **39**, 537–541 (1964)

Develin M. *A Complete Categorization of When Generalized Tribonacci Sequences Can be Avoided by Additive Partitions*. Electronic Journ. Combinatorics **7**(1) R53, 1–7 (2000)

Dubner H. and **Keller W.** *New Fibonacci and Lucas Primes*. Math. Comp. **68**(225), 417–427 (1999)

Dudley U. *Die Macht der Zahl: Was die Numerologie uns weismachen will*. Springer, 1999

Dumitriu I. *On Generalized Tribonacci Sequences and Additive Partitions*. Disc. Math. **219**, 65–83 (2000)

Embree M. and **Trefethen L.N.** *Growth and Decay of Random Fibonacci Sequences*. Proc. Roy. Soc. Lond. **A455**, 2471–2485 (1999), preprint

Feinberg M. *Fibonacci-Tribonacci*. The Fib. Quart. **1**, 71–74 (1963)

Finch Steven. *Mathematical Constants*. Cambridge Univ. Press, 2003

Fowler H.D. *A Generalization of the Golden Section*. The Fib. Quart. **20**, 146–158 (1982)

Fraenkel A.S., Levitt J., and **Shimshoni M.** *Characterization of the Set of values f(n) = [n alpha], n = 1,2*. Discrete Mathematics **2**, 332–345 (1972)

Gies J., Gies F. *Leonardo of Pisa and the New Mathematics of the Middle Ages*. New York: Thomas Y. Crowell Company, 1969

Golden Ratio. From Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

Gourdon X. *and* **Sebah P.** *Numbers, Constants and Computation. Constants and Records of Computation* http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/Records.html

Grimm R.E. *The Autobiography of Leonardo Pisano*. The Fib. Quart. **11**, 99–104 (1973)

Grünbaum B. and **Shephard G.C.** *Tilings and Patterns*. New York: W.H.Freeman & Co., 1987

Guy R.K. *Fibonacci Numbers of Various Shapes*. §D26 in Unsolved Problems in Number Theory, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, p. 194–195 (1994)

Hannon B.H. and **Morris W.L.** *Tables of Arithmetical Functions Related to the Fibonacci Numbers*. Math. Comput. **23**, 459–460 (1969)

Hardy G.H. and **Wright E.M.** *Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1980

Hayes B. *The Fibonacci Numbers*. Amer. Sci. **87**, 296–301 (1999)

Hilton P., Holton D., and **Pedersen J.** *Mathematical Reflections: in a Room with Many Mirrors*, *Ch. 3*. New York: Springer-Verlag, p. 61–85, 1998

Hoggatt V.E.Jr. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Boston, 1969
– *Additive Partitions of the Positive Integers*. The Fib. Quart. **18**, 220–226 (1980)

Honsberger R. *A Second Look at the Fibonacci and Lucas Numbers*, Ch. 8. In: Mathema-tical Gets III. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1985

Horadam A.F. *Pythagorean Triples*. The Fib. Quart. **20**, 121–122 (1982)

Huntley H.E. *The Divine Proportion: A Study In Mathematical Beauty*. New York: Dover Publications, Inc., 1970

Johnson R.C. *Fibonacci numbers and matrices* http://maths.dur.ac.uk/~dma0rcj/PED/fib.pdf

Kac M. *Statistical Independence in Probability. Analysis and Number Theory*. Carus Math. Monograph 12. Math. Assoc. Amer., 1959

Kappraff J. *Connections: The Geometric Bridge Between Art and Science*. New York: McGraw-Hill, 1991

Khintchine A. *Continued Fractions*. Univ. of Chicago Press, 1961

Knott R. *Fibonacci Numbers and the Golden Section.* http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

– *Who was Fibonacci?* Ibid.[1] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibBio.html
– *The Mathematical Magic of the Fibonacci Numbers.* Ibid.[2] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibmaths.html
– *Fibonacci and Golden Ratio Formulae*. Ibid.[3] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibFormulae.html
– *The Golden String of 0s and 1s*. Ibid.[4] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibrab.html
– *The Lucas Numbers*. Ibid.[5] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/lucasNbs.html
– *Further Sources of Information on Fibonacci Numbers and the Golden Section.* Ibid.[6] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibrefs.html
– *Fibonacci Numbers and Nature.* Ibid.[7] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html

Knuth D.E. *The Art of Computer Programming*. Fundamental Algorithms, v.1. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1997

Lehmer D.H. *Note on an Absolute Constant of Khintchine*. Am. Math. Month. **46**, 148–152 (1939)

Lévy P. *Sur le développement en fraction continue d'un nombre choisi au hasard.* Compositio Math. **3**, 286–303 (1936). Переиздано: Œuvres de Paul Lévy, v.6. Paris: Gauthier-Villars, p. 285–302 (1980)

Lifchitz H. and **Lifchitz R.** *PRP Top Records*, Search for : F(n) http://www.primenumbers.net/prptop/searchform.php?form=F(n)

Lockhead G.R. *Category Bounds and Stimulus Variability*. In: Object Perception: Structure and Process, eds. B.E.Shepp and S.Ballesteros. Norwood, New York: Erlbaum, p. 267–296 (1989)

Marchisotto E.A. *Connections in Mathematics: An Introduction to Fibonacci via Pythagoras.* The Fib. Quart. **31**, 21–27 (1993)

Menninger K. *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*. Cambridge, Mass.–London, 1970

Merrill D. *The Fib-Phi Link Page* http://www.goldenratio.org/info/index.html

Ming L. *On Triangular Fibonacci Numbers*. The Fib. Quart. **27**, 98–108 (1989)

– *On Triangular Lucas Numbers*. In: Applications of Fibonacci Numbers, v. 4, eds. G.E.Bergum, A.N.Philippou, and A.F.Horadam. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 231–240 (1991)

Ogden R.M. *Naive Geometry in the Psychology of Art*. Amer. Journ. of Psychology **49**, 198–216 (1937)

Peterson I. *Fibonacci at Random: Uncovering a New Mathematical Constant*. Sci. News, **155**, 376 (1999)

Phi: The Golden Number http://goldennumber.net/classic/index.html

Philipp W. *Some Metrical Theorems in Number Theory.* Pacific Journ. Math. **20**, 109–127 (1967)

Raine C.W. *Pythagorean Triangles from the Fibonacci Series.* Scripta Mathematica **14**, 164 (1948)

Rosen K.H. *Discrete Mathematics and its Applications*. New York: McGraw-Hill, 1991

Shanks D. and **Wrench J.W.** *Khintchine's constant.* Amer. Math. Monthly **66**, 276–279 (1959)

Statistical Distribution Information addition, 2003 http://www.super-computing.org/pi-decimal_current.html

Terr D. *On the Sums of Digits of Fibonacci Numbers*. Fib. Quart. **34**, 349–355 (1996)

Thorndike E.L. Psychological Review **24**, 147–153 (1917)

The Fibonacci Association Official Website http://www.mscs.dal.ca/Fibonacci/

The Fibonacci Quarterly http://www.engineering.sdstate.edu/~fib/

Thorndike L.A. *A History of Magic and Experimentum Science*, v.1. New York: Columbia Univ. Press, 1958

Togneti K.P., Winley G., and **van Ravenstein T.** *The Fibonacci Tree, Hofstadter and the Golden String*. In: Applications of Fibonacci Numbers, 3rd International Conference, ed. G.E.Bergum, A.N.Philippou, and A.F.Horadam. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 325–334 (1990)

Vajda S. *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications*. New York: Halsted Press, 1989

Vishwanath D. *Random Fibonacci Sequences and the Number 1.13198825.* Preprint. Math. Comp. **69**, 1131–1155 (2000)

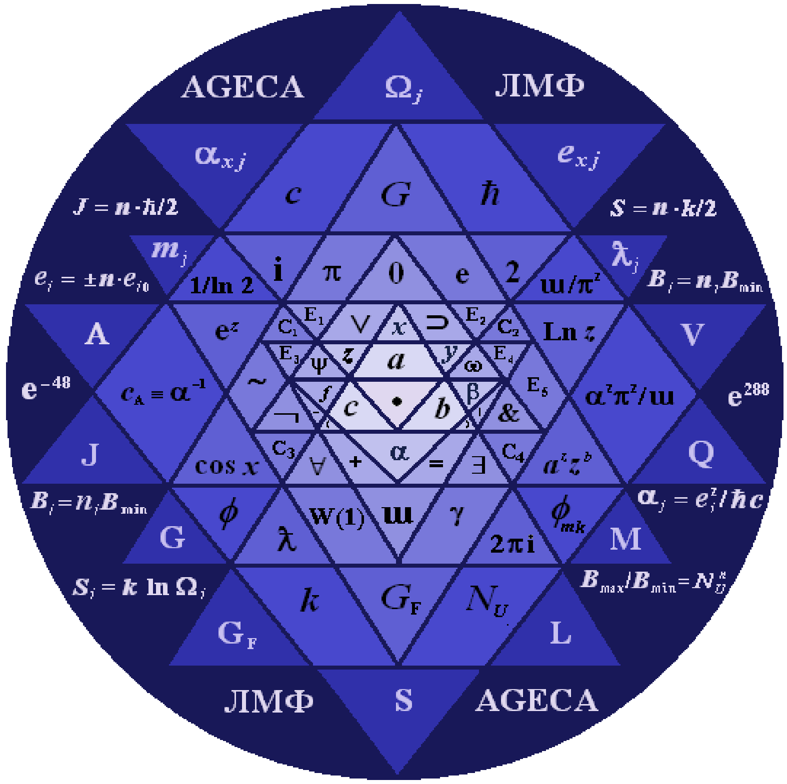
Weisstein E.W. *Constants.* From MathWorld – A Wolfram Web Resource http://mathworld.wolfram.com/topics/Constants.html

– *Fibonacci Number*. Ibid.[1] http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html
– *Fibonacci Prime.* Ibid.[2] http://mathworld.wolfram.com/FibonacciPrime.html
– *Lucas Prime*. Ibid.[3] http://mathworld.wolfram.com/LucasPrime.html

Yabuta M. *A Simple Proof of Carmichael's Theorem on Primitive Divisors*. The Fib. Quart. **39**, 439–443 (2001)

Yanega D. *Sex Ratio and Sex Allocation in Sweat Bees (Hymenoptera: Halictidae).* Journ. of Kansas Entomology Society, v. **69** Suppl., 98–115 (1996)

Zeising A. *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers aus einem bisher unerkannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetze entwickelt und mit einer vollständigen historischen Uebersicht der bisherigen Systeme begleitet.* Leipzig: Weigel, 1854

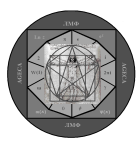


Символ теории ЛМФ:
шри янтра со вписанными в неё основными элементами теории

Введение

Глава 1. Логика и формальная математика

⇧



Глава 4. ⇦
Границы физического мира.
Обобщённые физические законы

⇨ **Глава 6.**
Принцип золотого сечения
в природе и искусстве

⇩

Персональный сайт

.

E-mail: hrantara@gmail.com