

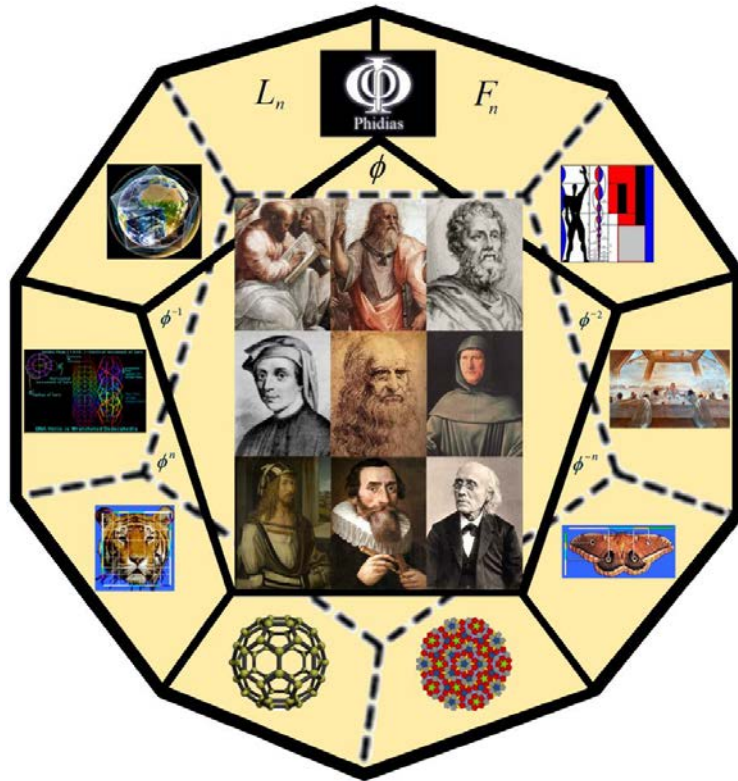
Теория ЛМФ и принцип золотого сечения

	стр.
Введение	2–5
Часть I. Теория ЛМФ	
Глава 1. Логика и формальная математика	5–15
Глава 2. Физическая математика	16–32
Глава 3. Основания физической теории	33–62
Глава 4. Границы физического мира. Обобщённые физические законы	63–78
Часть II. Принцип золотого сечения	
Глава 5. Принцип золотого сечения и числа Фибоначчи	79–121
Глава 6. Принцип золотого сечения в природе и искусстве	122–164
Глава 7. “Золотая” смесь	165–228
Глава 8. Обобщённая теория золотого сечения	229–270
Заключение. Теория ЛМФ и ОТЗС: основные положения, формулы, графики	271–282

*Краеугольным камнем мировой гармонии, без веры в которую естественнонаучное мышление лишилось бы большей части своей привлекательности, является математика. Известно, что путь от общих положений до конкретной их реализации часто долог, извилист и неоднозначен. Потому-то так труден вопрос, каким всё же образом математическая первооснова приобретает характер селективного формообразующего принципа для живой и неживой природы. **Принцип золотого сечения** предоставляет, быть может, наилучшую возможность для анализа подобных проблем. В силу его совершенно особого статуса, а главным образом из-за соотнесённости с фундаментальными математическими константами (ФМК), с положениями теории ЛМФ, вкратце представленной во Введении и Части I настоящей работы, подробное обсуждение этого принципа и всего, что с ним связано, представляется существенным и важным.*

*Фундаментальная физическая теория – мечта многих поколений исследователей. ЛМФ – попытка осуществить эту мечту в виде логически строгой, математически завершённой системы, соответствующей имеющимся экспериментальным данным и допускающей (частично уже подтвердившиеся) прогнозы и эмпирическую верификацию. Это базисная теория физического мира, реализующая идею единства математической логики (Л), числовой математики (М) и фундаментальной физики (Ф). Её корневая структура начинается с логических атомов и завершается обобщёнными физическими законами сохранения, изменения и квантования. В рамках теории ЛМФ получен удивительный результат для постоянной Ферми. Решается ряд важнейших задач, в частности определение численного значения постоянной тонкой структуры, времени жизни мюона и других физических констант, выявление границ физического мира с использованием нового космического параметра – безразмерной константы порядка 10^{125} , получение массовой формулы для частиц определённого типа, **обобщение принципа золотого сечения.***

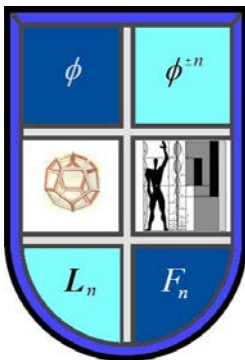
*Теория ЛМФ по идее не только снабжает необходимым инструментарием для теоретического определения любой известной физической постоянной и не только приписывает с ограниченной или неограниченной точностью истинное числовое значение каждой величине. В свете теории ЛМФ некоторые изученные казалось бы вдоль и поперек математические величины предстают в новом качестве, приобретают дополнительные, ранее не известные характеристики. В этом назначение Части II настоящей работы, где изложение исторических фактов и подробное рассмотрение формальных свойств числа ϕ носит иллюстративный характер и подчинено решению основной задачи: выявлению связей между ϕ и исходными ФМК, анализу принципа золотого сечения с точки зрения общих принципов и идей, изложенных в Части I. По сути ставится задача построения **нетрадиционной математической теории золотой пропорции.** Это построение должно быть ответвлением теории ЛМФ и призвано не только подтвердить её возможность, но и осветить некоторые ключевые вопросы, которые в обычной трактовке золотого сечения кажутся загадочными.*



Глава 7. “Золотая” смесь

- 7.1. Статистика чисел F_n , закон Бенфорда и логарифм
- 7.2. Феномен первого знака и числа Фибоначчи
- 7.3. Космология Платона и Кеплера и платоновы тела
- 7.4. Платоновы тела в сакральной геометрии
- 7.5. Современная космология. Додекаэдр и икосаэдр
- 7.6. Система счисления с основанием ϕ . Модуль
- 7.7. Золотое число в физике. Фракталы
- 7.8. “Золотая” пестрая смесь
- 7.9. Принцип золотого сечения и ядра атомов
- 7.10. Принцип золотого сечения в математике
- 7.11. Плотное заполнение и плитки Пенроуза. Квазикристаллы
- 7.12. Числа 5 и 10 в золотом сечении

Глава 7. “Золотая” смесь



В настоящей главе – последней перед представлением обобщённой теории золотого сечения – будет продолжен начатый в предыдущей главе обзор более и менее известных примеров поиска и применения принципа золотого сечения в разных областях, дополненный нами рассмотрением его роли в исследовании стабильности атомных ядер. Представлены такие интригующий темы как закон Бенфорда, малоизвестные свойства чисел Фибоначчи, античная и современные гипотезы додекаэдрической структуры Вселенной, модуль Ле Корбюзье, фракталы, фуллерены, структура молекулы ДНК, плитки Пенроуза, куб Метатрона, связь золотого числа ϕ и его гомологов с фундаментальными математическими константами и другими математическими величинами и т.д. Получен обобщённый закон третьего члена и логарифмического распределения.

Стремление упомянуть хотя бы бегло основные относящиеся к золотой пропорции факты, не упуская из виду наиболее существенного, приводит к объединению под общей “шапкой”

многочисленного и довольно пёстрого конгломерата фактов, которые к тому же заметно различаются по своей значимости и степени достоверности. Впрочем, в зависимости от вкусов и склонностей оценки здесь могут быть разные и даже взаимоисключающие. Во всяком случае наряду с толкованиями, тоже далеко не всегда однозначными, но по крайней мере исходящими из строгих математических результатов, имеется множество гипотез, основывающихся на приближенных соотношениях между формализмом золотого сечения и реальностью или на недостаточно точных эмпирических измерениях, и уж потому дискуссионных, разноречивых – способных вызвать восторженный прием у одних и глубокое недоверие у других.

7.1. Статистика чисел F_n , закон Бенфорда и логарифм

В продолжение темы связи числа ϕ с материнскими функциями e^x и $\ln x$, рассмотрим любопытнейшую математическую проблему, интерес к которой в последнее время заметно возрос. Она носит название закона Бенфорда, или феномена первого знака, или проблемы начальной цифры, и непосредственно затрагивает проблему равноправия знаков, посредством которых осуществляется представление чисел.

Вспомним вначале сказанное в 5.3 о коренном различии в представлении чисел с помощью цепных и десятичных дробей. В n -ичных, в частности десятичных дробях в отличие от цепных обычно реализуется принцип числового равенства, то есть соблюдается закон случайного распределения чисел, обеспечивающий равное в пределах допустимой статистической погрешности представительство всех знаков. Тогда в качестве примера мы ссылались на статистику первых шестисот миллиардов и триллиона двухсот миллиардов десятичных знаков числа π . Сейчас для полной ясности дадим её в явном виде с указанием отклонений (в процентах) от среднего значения равного 60 000 000 000 в первом и 120 000 000 000 во втором случае [Kanada].

Таблица 7.1.1
Статистика десятичных знаков числа π

Цифра	Количество вхождений и отклонения (в процентах)			
	для 600 000 000 000 знаков		для 1 200 000 000 000 знаков	
0	59 999 788 154	-0,000 353	119 999 636 735	-0,000 303
1	60 000 115 765	+0,000 193	120 000 035 569	+0,000 030
2	60 000 334 158	+0,000 557	120 000 620 567	+0,000 517
3	59 999 987 729	-0,000 020	119 999 716 885	-0,000 236
4	60 000 131 060	+0,000 218	120 000 114 112	+0,000 095
5	59 999 819 211	-0,000 301	119 999 710 206	-0,000 241
6	59 999 887 855	-0,000 187	119 999 941 333	-0,000 049
7	59 999 770 829	-0,000 382	119 999 740 505	-0,000 216
8	60 000 439 514	+0,000 733	120 000 830 484	+0,000 692
9	59 999 725 725	-0,000 457	119 999 653 604	-0,000 289

В не показанном здесь случае шести миллиардов знаков среднее отклонение в процентах составляет 0,0031% по абсолютной величине; с увеличением количества знаков в сто раз этот показатель уменьшается примерно в десять раз до 0,000 34%, а с увеличением ещё в два раза он падает до 0,000 27%. Такая статистика говорит сама за себя: закон случайного распределения чисел соблюдается здесь с образцовой точностью, кстати вопреки некоторым утверждениям и прогнозам, которые делались когда были известны не миллиарды, а лишь тысячи десятичных знаков числа π . Увеличение точности поставило всё на свои места и сейчас десятичная дробь числа π может использоваться в качестве генератора случайных чисел.

Займёмся теперь интересующим нас числовым множеством $\{F_n\}$. Для получения статистически надёжных данных нужны, конечно, большие числа и желательно, чтобы они были удобными для обозрения. В формуле Бине

$$F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\phi^{-n}}{\sqrt{5}}$$

с увеличением показателя степени n второе слагаемое стремится к нулю, числитель первого слагаемого всё меньше отличается от целого числа, а десятичный логарифм $\lg \sqrt{5} \approx 0,37$ меньше 1/2. Отсюда следует формула

$$N(F_n) = R(n \lg \phi), \quad n \gg 1 \tag{7.1.1}$$

для общего количества десятичных знаков $N(F_n)$ числа F_n , где $R(x)$ функция округления, то есть нахождения целого числа ближайшего к действительному числу x . Для каждого из десяти знаков $j = 0, 1, \dots, 9$ имеем

$$N_j(F_n) = R\left(\frac{n \lg \phi}{10}\right), \quad n \gg 1 \quad (7.1.2)$$

Это даёт нам возможность подобрать “удобное” число $F_{4784972}$, количество десятичных знаков $N(F_n)$ для которого в точности равно одному миллиону. Кроме того, для большей полноты и определения динамики изменения возьмём три других числа поменьше: дважды выделенное F_{10946} ($10946 = F_{21}$), F_{100000} и $F_{1000000}$. Технические детали несущественны, поэтому приведём лишь конечные результаты по десяти знакам десятичного представления, взяв за критерий оценки среднее и максимальное отклонения (в процентах) от статистически среднего значения.

Таблица 7.1.2
Отклонения вхождений десятичных знаков чисел F_n от статистически средних значений

Число	Среднее отклонение в %	Максимальное отклонение в %
F_{10946}	2,8	5,6
F_{100000}	1,9	3,2
$F_{1000000}$	0,27	0,85

Тенденция приближения к теоретическому идеалу (7.1.2) с увеличением номера n вполне очевидна. Остаётся подтвердить её на примере последнего, самого большого и “удобного” числа $F_{4784972}$, представив его наподобие числа π .

Таблица 7.1.3
Отклонения вхождений десятичных знаков $F_{4784972}$ от статистически среднего значения

Цифра	Количество вхождений	Отклонение в процентах
0	100 652	+ 0,652
1	99 772	- 0,228
2	99 714	- 0,286
3	100 165	+ 0,165
4	99 911	- 0,089
5	99 810	- 0,19
6	99 757	- 0,243
7	99 922	- 0,078
8	100 141	+ 0,141
9	100 156	+ 0,156

Максимальное отклонение равно 0,652%, среднее равно 0,2228% и можно уже делать общий вывод, относящийся к числам F_n и, естественно, к их множеству $\sum_n F_n$: с увеличением n частота вхождения знаков $0, 1, \dots, 9$ стремится ко всё более точному соответствию с законом их равномерного распределения. Этот интуитивно ожидаемый с самого начала вывод легко обобщить на случай системы счисления с любым основанием $a = 2, 3, 4, \dots$. В формуле (7.1.2) надо только заменить основание позиционной системы счисления 10 на a и тогда частота вхождения для каждого из a знаков определится по формуле

$$N_j(F_n) = R\left(\frac{n \log_a \phi}{a}\right), \quad n \gg 1 \quad (7.1.2')$$

которую можно записать через натуральный логарифм:

$$N_j(F_n) = R \left(\frac{n \ln \phi}{a \ln a} \right), \quad n \gg 1 \quad (7.1.2'')$$

Изменив задачу, рассмотрим теперь статистику не *всех*, а лишь *начальных* знаков членов ряда Фибоначчи. Ограничимся вначале первыми ста числами F_n .

Таблица 7.1.4
Частота вхождений для начальных знаков первых ста F_n

Цифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	30	18	13	9	8	6	5	7	4

Картина здесь разительно отличается от ранее рассмотренной. В тридцати (!) случаях из ста число Фибоначчи начинается с 1 и лишь в четырёх (?) – с 9. Очень большие отклонения от предписываемого законом случайного распределения чисел среднего значения $100/9 \approx 11$ бросаются в глаза. Обращает на себя внимание и почти неуклонное убывание частоты с увеличением цифр от 1 до 9. Поразительно, но подобная закономерность, впервые замеченная в конце XIX в [Newcomb S.], забытая, а потом заново открытая в конце тридцатых годов XX в. [Benford], имеет достаточно общий характер. Современная история этого закона началась... с подмеченной потёртости таблиц логарифмов. Перелистывая книгу, Бенфорд заметил, что страницы, на которых стоят логарифмы чисел, начинающихся с единицы, замусолены больше остальных. Тогда он подверг статистическому анализу более 20 000 чисел, относящихся к самым разным наборам величин, – квадратные корни \sqrt{n} (5000 чисел), константы (104), атомные веса (91), молекулярные веса (1800), площади бассейнов рек (337), результаты бейсбольных матчей (1478), номера домов из справочника (342 числа) и т. д. и т. п., всего 20 наборов в среднем по 1011 величин в каждом. Усредненная по всем наборам таблица частот встречаемости (в процентах) девяти цифр имеет следующий вид:

Таблица 7.1.5
Распределение частот в среднем по 20 наборам (по Бенфорду)

Цифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	30,6	18,5	12,4	9,4	8,0	6,4	5,1	4,9	4,7

Было высказано предположение, что вероятность (относительная частота) появления на первом месте десятичного знака q ($q = 1, 2, \dots, 9$) определяется по формуле

$$P(q) = \log_{10}(1 + 1/q) \quad (7.1.3)$$

Следовательно, идеальное распределение вероятностей (в процентах) должно подчиняться логарифмическому закону, представленному в таблице и наглядно показанному на рисунке.

Таблица 7.1.6
Распределение частот по формуле (7.1.3)

Цифра	Частота, %
1	30,10299...
2	17,60912...
3	12,49387...
4	9,69100...
5	7,91812...
6	6,69467...
7	5,79919...
8	5,11525...
9	4,57574...

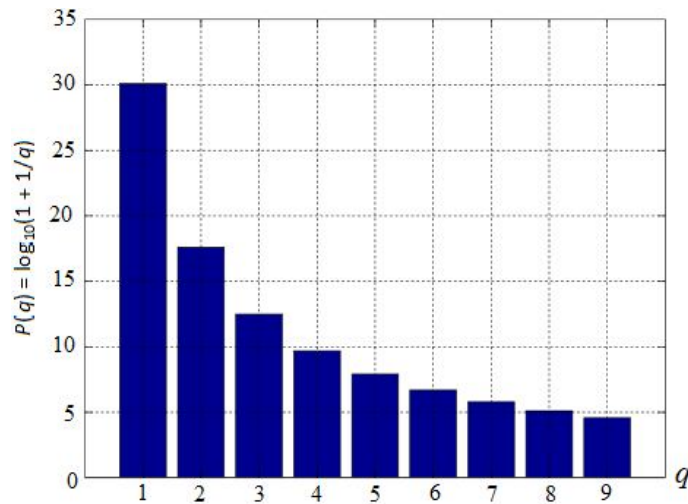


Рис. 7.1.1

Диаграмма распределение частот по формуле (7.1.3)

Сравнение этих частот с данными Бенфорда показывает, что минимальное относительное отклонение $\sigma_{\min} \approx 0,75\%$ (для $q = 3$), максимальное $\sigma_{\max} \approx 12\%$ (для $q = 7$), а в среднем для девяти цифр $\bar{\sigma} \approx 3,9\%$. Такое соответствие нельзя признать случайным, но на этом этапе обсуждения неизбежно возникают вопросы.

а) Для получения статистически корректных выводов необходимы наборы, состоящие если не из бесконечного, то во всяком случае достаточно большого числа данных. Между тем ни один из рассмотренных Бенфордом наборов величин, как и усредняемая определённым образом их совокупность, не говоря уж о множестве первых ста чисел F_n , не совсем или совсем не удовлетворяет этому требованию. Вывод о соответствии логарифмическому закону больше похож на гипотезу, полученную на основе неполной индукции, чем на солидный статистический закон. А неполная индукция (не путать с индукцией математической, по сути дедуктивным принципом) при всей своей привлекательности и продуктивности – неиссякаемый источник всевозможных заблуждений и ошибок. Например, тезис “большая часть нечетных чисел – простые” подтверждается для первых десяти, двадцати, даже девяноста чисел натурального ряда, но ошибочен в целом. Так можно ли ставить рядом со статистическим законом, подтверждаемым на примере более чем триллиона знаков великой константы π и миллиона знаков числа $F_{4\ 784\ 972}$, полуэмпирический закон, апеллирующий к разнородной и крайне ограниченной базе данных? Насколько универсален феномен первого знака, каковы пределы его применимости?

б) Многие наборы составлены из *размерных* величин, численные значения которых зависят от выбора единиц измерения, самого по себе произвольного и исторически случайного. Меняя единицы измерения, можно получить совсем другое число, начинающееся с другой цифры. Даже если допустить, что закон Бенфорда верен для какого-то множества размерных величин, не перестанет ли он быть таковым при изменении единиц измерения?

в) Все без исключения наборы величин записаны в десятичной системе счисления, которая теоретически не имеет преимуществ перед какой-либо другой системой счисления с основанием a , притом не обязательно целым. А запись любого числа за исключением 0 зависит, вообще говоря, от выбора системы счисления. Если принять, что закон первого знака действительно выполняется в определённых случаях, имеет ли, спрашивается, при этом место и “закон сохранения закона Бенфорда”? Точнее, является ли данный закон инвариантом относительно перехода от одной системы счисления к другой?

Исследования недавнего прошлого [Flelinger; Raimi 1969; 1976; Barlow and Bareiss; Schatte], относящиеся к числам и Фибоначчи и Люка [Washington], исследования последнего времени [Boyle; Ley; Nigrini], но особенно работы [Hill 1996–1998] во многом проясняют ситуацию и позволяют ответить на некоторые вопросы. Но давать однозначные оценки по-прежнему не всегда возможно, и не случайно, что закон Бенфорда всё ещё нередко характеризуется эпитетом “таинственный”. В любом случае феномен первого знака отмечен лишь для *естественных* числовых наборов. Это необходимое условие справедливости закона Бенфорда. Что касается размерности величины, то насколько можно судить заметной роли она не играет. Неважно, будем ли мы измерять площадь страны в квадратных километрах или в квадратных милях: с изменением размерности меняются, конечно, все числа, но статистика распределения первого знака существенно не меняется. Одним из основополагающих принципов статистики и теории вероятностей является закон больших чисел, предполагающий большое число *испытаний*, приводящее к нивелировке *случайных факторов*. В свете этого можно ожидать, что с увеличением элементов испытываемого набора распределение всё точнее будет соответствовать формуле (7.1.3). Однако в большинстве случаев, если речь идёт, скажем, о населении или площади стран, возможностей для этого практически нет.

Не совсем ясно, что такое естественный набор величин и какими критериями здесь надо руководствоваться. Так, для казалось бы бесспорно естественной числовой последовательности $\{1/n\}$ [Benford] хорошего соответствия логарифмическому распределению нет. Набор испытываемых величин (5000) здесь выше чем в остальных случаях, однако среднее отклонение равно 35,9 %, а максимальное 94,5 %. Это намного хуже чем в целом по набору всех рассмотренных Бенфордом величин (3,9 % и 12 % соответственно) и хуже чем даже для малой части бесконечного множества чисел Фибоначчи.

7.2. Феномен первого знака и числа Фибоначчи

Об этом говорят данные для первой сотни чисел Фибоначчи, приведённые выше в таблице 7.1.4: $\sigma_{\max} \approx 36,9\%$ и $\bar{\sigma} \approx 9,8\%$. Не ограничиваясь столь мизерным для статистики количеством и последовательно увеличивая набор на сто новых членов, проследим за динамикой изменения этих показателей хотя бы для первых 500 чисел F_n .

Таблица 7.2.1
Отклонение от закона логарифмического распределения для первых пятисот чисел Фибоначчи

n	$\sigma_{\max}, \%$	$\bar{\sigma}, \%$
100	36,9	9,8
200	17,3	5,8
300	10,8	4,3
400	4,6	1,6
500	5,6	1,8

Уже для четырёхсот чисел F_n отклонение от среднего значительно меньше чем для двадцати тысяч взятых Бенфордом величин. Можно сказать, что для столь малого, статистически почти ничтожного – всего несколько сотен – набора величин закон Бенфорда подтверждается с очень хорошей точностью. Более того, соответствие последовательности чисел Фибоначчи логарифмическому закону (7.1.3) первого знака близко к идеальному, но в процентах, вычисляемых для относительно *небольших целых* чисел, это должным образом не отражается. Согласно указанному закону идеальной для набора из n величин должна считаться частота вхождений $k_j(n)$ знака j ($j = 1, 2, \dots, 9$), определяемая по формуле

$$k_j(n) = R[n \cdot \lg(1 + 1/j)] \quad (7.2.1)$$

в которой десятичная дробь в квадратных скобках округляется функцией R до ближайшего целого значения. Например для $j = 1$ и $n = 500$

$$k_1(500) = R[500 \times \lg(1 + 1/1)] = R[150,5149\dots] = 151 \quad (7.2.1')$$

а это как раз *в точности* совпадает с истинным значением; между тем этому соответствует $\sigma \approx 0,3\%$, отнюдь не равное нулю. Поэтому близость истинных значений частоты k к идеальному $k_j(n)$ естественно оценивать их разностью

$$r = k_j(n) - k$$

которая даётся в таблице 7.2.2 для значений k .

Очень хорошее соответствие налицо уже для первой сотни чисел F_n , а для пяти сотен оно просто поразительно: всего четыре минимальных ($r = \pm 1$) отклонения от “идеального” логарифмического значения $k_j(n)$. Это намного лучше чем для любого из известных наборов величин и явно свидетельствует о том, что первые знаки последовательности чисел $\{F_n\}$ распределяются по логарифмическому закону (7.1.3). Через *материнскую функцию* $\ln x$ он запишется в виде

$$P(q) = \frac{\ln(1 + 1/q)}{\ln 10} \quad (q = 1, 2, \dots, 9) \quad (7.2.2)$$

В общем случае системы счисления с целочисленным основанием a имеем:

$$P(q) = \frac{\ln(1 + 1/q)}{\ln a} \quad (q = 1, 2, \dots, a - 1) \quad (7.2.3)$$

Таблица 7.2.2
Точность соответствия закону Бенфорда для первых 500 чисел F_n

n, r	Значения k для $j = 1, \dots, 9$ и их отклонение от $k_j(n)$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$ r $
100	30	18	13	9	8	6	5	7	4	
r_{100}	0	0	1	-1	0	-1	-1	2	-1	7
200	60	36	25	18	17	12	11	12	9	
r_{200}	0	1	0	-1	1	-1	-1	2	0	7
300	91	53	38	27	25	19	17	17	13	
r_{300}	1	0	1	-2	1	-1	0	2	-1	8
400	121	70	51	37	32	27	23	21	18	
r_{400}	1	0	1	-2	0	0	0	1	0	4
500	151	88	63	47	40	33	29	27	22	
r_{500}	0	0	1	-1	0	0	0	1	-1	4

Обсуждение закона Бенфорда, устанавливающего удивительную зависимость между [материнской функцией логарифма](#) и частотой появления на первом месте одного из знаков произвольной n -ичной записи членов “естественных” числовых последовательностей, в частности ряда Фибоначчи, продолжим рассмотрением более общего случая на одном репрезентативном примере. Мы проведем небольшое исследование на полуэмпирическом уровне, поскольку следует ещё раз признать, что глубокого понимания этого закона всё ещё нет, хотя его справедливость по крайней мере для $\{F_n\}$ очевидна и сомнений не вызывает. Можно только констатировать некое *логарифмическое неравноправие* знаков, используемых для записи членов указанных последовательностей в любой целочисленной системе счисления за исключением, разумеется, двоичной. Введём понятие обобщённой фибоначчиевой последовательности (ОФП), определив её так:

$$F_{namk} = a_1 F_{n-m_1} + a_2 F_{n-m_2} + \dots + a_k F_{n-m_k} \quad (7.2.4)$$

Тогда n -ый член ОФП есть по определению сумма k слагаемых типа $a_j F_{n-m_j}$, где a_j и m_j произвольные положительные или отрицательные целые числа и хотя бы одно из a_j отлично от нуля. Частными случаями обобщённой последовательности являются ряды Фибоначчи, Люка, квазифибоначчиевы ($k = 2$) последовательности (5.9.37) и т.д.; для тестирования нужно иметь какое-либо F_{namk} со случайным набором чисел a_j, m_j и k . Возьмём для определённости четырёхчленную последовательность

$$F_{namk} = 4F_{n-3} - 5F_{n+7} - 2F_{n-11} + 2F_{n+9} \quad (7.2.5)$$

и посмотрим на статистику “отрезка” из тысячи членов бесконечного ряда, начиная с какого-либо отрицательного числа, скажем с $n = -19$. Заметим, что последний, тысячный ($n = 980$) член взятого отрезка это 206-значное положительное число, здесь же приведены для наглядности лишь первые 50 членов ряда:

1 593 846, -985 051, 608 795, -376 256, 232 539, -143 717, 88 822, -54 895, 33 927, -20 968, 12 959, -8 009, 4 950, -3 059, 1 891, -1 168, 723, -445, 278, -167, 111, -56, 55, -1, 54, 53, 107, 160, 267, 427, 694, 1 121, 1 815, 2 936, 4 751, 7 687, 12 438, 20 125, 32 563, 52 688, 85 251, 137 939, 223 190, 361 129, 584 319, 945 448, 1 529 767, 2 475 215, 4 004 982, 6 480 197, ...

Мы видим убывающий вначале по абсолютной величине знакопеременный ряд, который начиная с некоторого места (при $n = 6$) положителен и возрастает. Но это лишь второстепенные детали, зависящие от наугад взятого набора параметров n, a, m и k . Куда важнее другое. Для данной последовательности во-первых выполняется правило третьего члена, следовательно это “золотая” последовательность с предельным отношением соседних членов равным константе ϕ . Во-вторых частота вхождений знаков 0, 1, ..., 9 подчиняется (в пределах допустимой статистической погрешности) закону равномерного распределения, который впрочем достаточно тривиален чтобы в дальнейшем больше о нём не упоминать. В-третьих имеет место закон периодичности с [магическим периодом 24](#) приведённого к однозначному виду ряда с суммой членов по-прежнему равной 117. Но главное здесь – данные по закону Бенфорда, показанные в таблице в процентах от общего количества для отрезка $n = 1000$.

Таблица 7.2.3
 Распределение частот для тысячи членов ряда (7.2.5)

Цифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота, %	30,2	17,6	12,6	9,6	7,8	6,8	5,8	5,1	4,5

Сравнение с теоретической формулой (см. таблицу 7.1.6) не оставляет никаких сомнений в том, что закон Бенфорда выполняется здесь с прекрасной, почти идеальной точностью. Хотя этот результат получен для относительно небольшой выборки частного случая обобщённой фибоначиевой последовательности, он справедлив и для любой другой последовательности данного типа. Есть поэтому все основания считать, что для ряда F_n и получаемых с его помощью бесконечных последовательностей закон Бенфорда работает очень хорошо, с удивительно точной и быстрой для статистической закономерности “подстройкой”, а вот для упомянутых выше конечных наборов чисел нематематической природы степень соответствия намного хуже.

В целом же на основе имеющихся данных, касающихся в частности бесконечных числовых последовательностей, трудно судить, насколько универсален феномен первого знака. Не совсем ясно, в каких случаях можно говорить лишь о существенном отклонении от закона равного распределения, а в каких – о более или менее точной подчиненности закону логарифмического распределения. Мы не знаем также, является ли прекрасное соответствие этому закону последовательностей $\{F_n\}$ и $\{F_{namk}\}$ одной из их особых характеристик или же этим свойством в равной или неравной мере обладают и какие-то другие числовые последовательности. Вопросов (как нередко бывает, когда имеешь дело с числовыми множествами) больше чем ответов, которые могут быть получены из рассмотрения отдельных случаев и особенно в результате глубоких теоретических исследований, способных снять покровы таинственности с этого неординарного закона. В любом случае закон Бенфорда в весьма нетривиальной форме подтверждает фундаментальную роль материнской функции логарифма для ряда Фибоначчи как наиболее значительного, быть может, представителя класса *естественных* числовых последовательностей. А к вопросу соответствия закону логарифмического распределения других последовательностей мы обратимся позже с более общей точки зрения, с позиций обобщённой теории золотого сечения (ОТЗС), которой посвящена [глава 8](#).

Но прежде следует всё же довести до логического завершения анализ – без строгого доказательства, минуя как и прежде технические детали – обобщённых фибоначиевых рядов. Будем давать лишь конечные результаты, а их многосложную “полуэмпирическую” верификацию посредством контрольных примеров предоставим терпеливому и настойчивому читателю. Исключая случай когда все множители a_j равны нулю и не лимитируя число слагаемых в (7.2.4), снимем с произвольных параметров ограничения на целочисленность, то есть допустим, что a_j и m_j могут быть *любыми действительными числами*, например константами e и π со знаками плюс или минус. Как мы знаем, для действительного r число F_r определяется [формулой \(5.8.10'\)](#), содержащей косинус и являющейся обобщением формулы Бине для классического ряда Фибоначчи. Уточним, что речь сейчас идёт о бесконечной и вообще говоря не целочисленной последовательности, n -ый ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) член которой содержит k слагаемых, а каждое слагаемое равно $a_j F_{n - m_j} = a_j F_r$, где a_j и m_j произвольно взятые действительные числа. И вот оказывается, что переход от целочисленных параметров к любым действительным параметрам не меняет основных характеристик ряда. По-прежнему справедливы и неизменно приводящее к константе ϕ правило третьего члена и закон Бенфорда.

Пойдём ещё дальше и допустим что переменные a_j и m_j могут быть любыми комплексными числами, частным случаем которых являются числа действительные. Для произвольной комплексной переменной ρ имеет место вполне аналогичная формуле для F_r формула (5.8.10):

$$F_\rho = \frac{\phi^\rho - (\phi^{-1})^\rho \cos(\rho\pi)}{2\phi - 1}$$

В этом самом общем случае ОФП получим бесконечную последовательность комплексных чисел типа $x + iy$ с действительной и чисто мнимой слагаемыми. Рассматривая в отдельности любые достаточно большие отрезки последовательностей $\{x_j\}$ и $\{y_j\}$, придём для каждой из них всё к тем же результатам что и прежде: правилу третьего члена и закону Бенфорда. Добавим, что сказанное справедливо не только в десятичной, но и в любой другой n -ичной ($n > 2$) системе счисления.

Таким образом, с высокой степенью достоверности, хотя и нестрого, без доказательства (которое может быть получено применением принципа математической индукции), иллюстраций и конкретики, которой не стали загромождать и без того насыщенный техническими подробностями текст, имеем любопытный результат. Дадим ему соответствующее название и сформулируем в виде математической теоремы для ОФП.

Обобщённый закон третьего члена и логарифмического распределения

В любой системе счисления с основанием $n > 2$, для любого достаточно большого отрезка бесконечной последовательности

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^k a_j F_{n-z_j}$$

где a_j и z_j произвольно взяты, действительные или комплексные, числа и не все a_j равны нулю, выполняются: обобщённый закон третьего члена

$$a_j F_{n-z_j} + a_j F_{(n+1)-z_j} = a_j F_{(n+2)-z_j}$$

и логарифмический закон (Бенфорда) распределения первого знака

$$P(q) = \frac{\ln(1+1/q)}{\ln n} \quad (q = 1, 2, \dots, n-1)$$

Некоторые другие аспекты затронутых здесь вопросов будут рассмотрены уже в [следующей главе](#).

7.3. Космология Платона и Кеплера. Платоновы тела

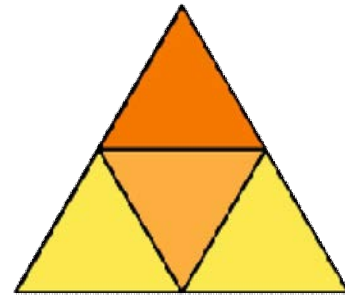
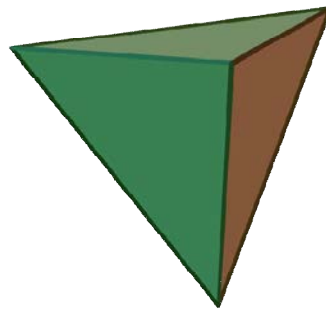
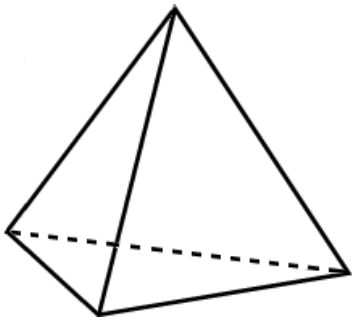
Как ни заманчиво продолжить находящуюся в русле основных идей этой работы тему феномена первого знака в её соотносённости с ФМК, перед нами стоит и другая задача. Нужно довести до конца ранее обещанное и начатое в предыдущих главах ознакомление (пусть не очень подробное, но с многочисленными рисунками и указанием основных источников) с наиболее известными и значительными проявлениями принципа золотого сечения. Одно из таких проявлений относится к геометрии и космологии.

Непоколебимая вера в причастность геометрических идей и построений к космологии, космографии, космогонии долгое время была краеугольным камнем в изучении структуры Вселенной, механизмов её возникновения и развития. Стремление отыскать в геометрических формах элементы универсальной мировой гармонии одинаково присуще древним пифагорейцам и многим современным исследователям, хотя, конечно, побудительные мотивы и особенно терминология, возможности и методы за это время сильно изменились. “Космос, – по словам Платона, вложенным в уста пифагорейца Крития, – прекраснейшая из возникших вещей, а его демиург – наилучшая из причин” [Платон, 29а]. Признание этого тезиса налагает на любого исследователя серьёзные ограничения при выборе адекватных средств описания Вселенной. Платоновский творец-устроитель-демиург, “наилучшая из причин”, преисполнен благих намерений и как истый пифагорец стремится воплотить свой проект в совершенных геометрических формах. Выбрав в качестве первичных элементов огонь и землю, необходимо преодолеть их разъединённость и объединить в нечто единое с помощью “третьего”: “два члена сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо, чтобы между одним и другим родилась некая объединяющая их связь”. Тут и выходит на передний план принцип золотого сечения, или “пропорция”, по Платону: “Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и связуемое, и задачу эту наилучшим образом выполняет пропорция, ибо когда из трёх чисел – как кубических, так и квадратных – при любом среднем числе первое так относится к среднему, как среднее к последнему, и соответственно последнее к среднему, как среднее к первому, тогда при перемещении средних чисел на первое и последнее место, а последнего и первого, напротив, на средние места выяснится, что отношение необходимо остаётся прежним; а коль скоро это так, значит, все эти числа образуют между собой единство” [Платон, 31с–32а].

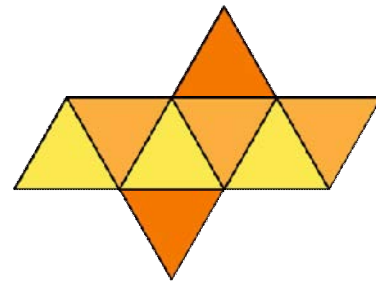
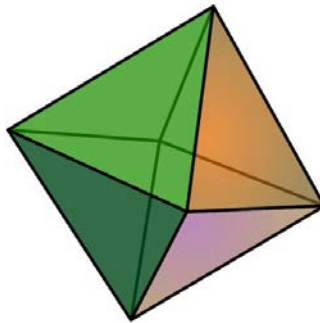
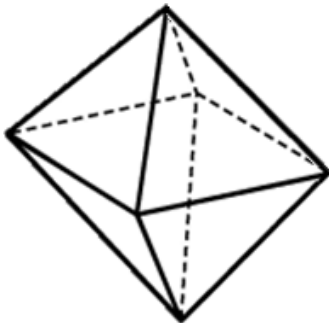
Это рассуждение можно легко и без натяжки перевести на язык геометрических отрезков, образующих золотое сечение и неизбежно приводящих к [квадратному уравнению \(5.2.1\)](#). Но плоскому миру надо придать глубину, перейти от двумерной геометрии Вселенной к трёхмерной. Для этого нужны ещё два элемента, вода и воздух, и принцип золотого сечения работает снова, чтобы окончательно установить необходимые пропорции между первоэлементами: “...Если бы телу Вселенной надлежало стать простой плоскостью без глубины, было бы достаточно одного среднего члена для сопряжения его самог с крайними. Однако оно должно было стать трёхмерным, а трёхмерные предметы никогда не сопрягаются через один средний член, но всегда через два. Поэтому бог поместил между огнем и землей воду и воздух, после чего установил между ними возможно более точные соотношения, дабы воздух относился к воде, как огонь к воздуху, и вода относилась к земле, как воздух к воде. Так он сопряг их, построив из них небо, видимое и осязаемое” [там же, 32а–32b, курсив всюду наш].

Дальше для получения формы первоэлементов и всего беспредельного многообразия вещей природы в качестве “первоначала” берутся два прямоугольных треугольника – равнобедренный и составляющий половину равностороннего треугольника с углами в тридцать и шестьдесят градусов [там же, 53с–54d]. Почитателей золотого сечения может огорчить то, что предпочтение отдано не золотым треугольникам; может показаться, что в этом месте Платон отступает от принципа золотого сечения. В какой-то мере это действительно так, но противоречия здесь нет. Нельзя всё сводить к золотому сечению, даже если это основной руководящий принцип построения, и есть тонкости, которые в любом случае должны быть учтены. Задача, говоря языком

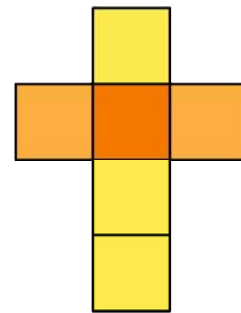
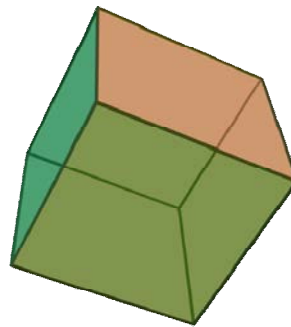
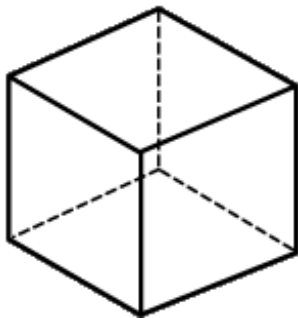
современной геометрии, состоит в том, чтобы из каких-то простейших плоских элементов составить правильные выпуклые многогранники. С помощью своих треугольников Платон довольно просто получает четыре таких многогранника (показанных вместе с додекаэдром на рисунке, в том числе в развернутом на плоскость виде), связывая их с формой первоэлементов: куб форма земли, икосаэдр воды, октаэдр воздуха, тетраэдр огня [там же, 55d–56b].



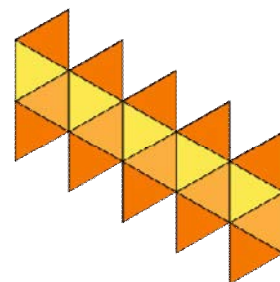
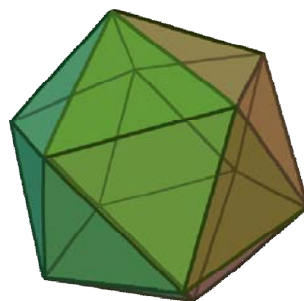
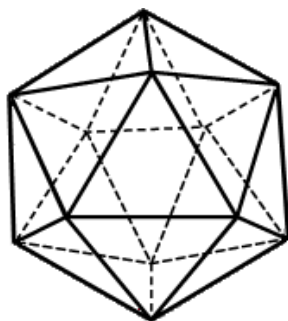
Тетраэдр



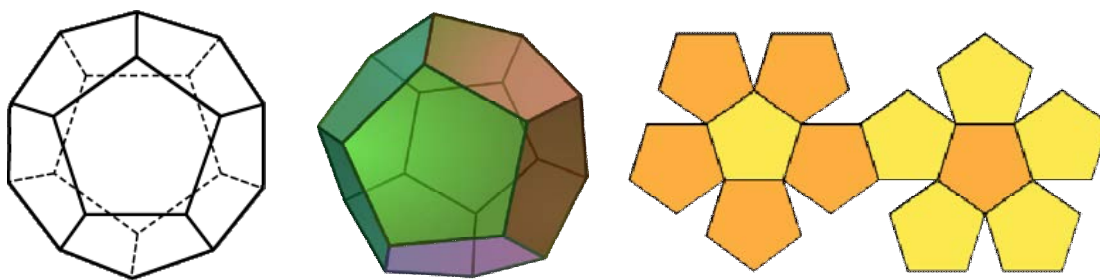
Октаэдр



Гексаэдр или Куб



Икосаэдр



Додекаэдр

Рис. 7.3.1

Правильные выпуклые многогранники – платоновы тела

Для правильных выпуклых многогранников, платоновых тел справедлива теорема Эйлера, по которой число вершин плюс число граней минус число ребер равно двум [Лакатос]. Таких многогранников, характеристики которых даны в таблице (подробнее см. [Platonic Solid; Platonischer Körper]), всего пять, притом поверхность последнего из них, додекаэдра, в отличие от остальных образована фигурами золотого сечения – правильными пятиугольниками, однако это не единственное золотое платоново тело.

Таблица 7.3.1

Правильные многогранники – платоновы тела

Название	Число граней и их форма	Число	
		ребер	вершин
Тетраэдр	4 треугольника	6	4
Октаэдр	8 треугольников	12	6
Куб	6 квадратов	12	8
Икосаэдр	20 треугольников	30	12
Додекаэдр	12 пятиугольников	30	20

Известно, что если каждой грани одного многогранника соответствует вершина другого, то такие многогранники составляют двойственную (дуальную) пару. Тетраэдр дуален сам себе, октаэдр дуален кубу, а икосаэдр с додекаэдром образуют дуальную пару золотых многогранников. Сумма граней и вершин (32 в случае золотых многогранников) у двойственных многогранников естественно одинакова и они могут переходить друг в друга. Соответствие между золотыми платоновыми телами легко различимо в случае, когда один вложен в другой [Каскады из правильных многогранников]. Столь близкая связь между додекаэдром и икосаэдром, возможность трансформации одного в другое играет, по мнению многих, большую роль в природе.

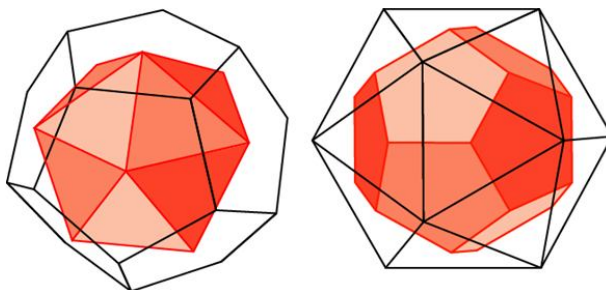


Рис. 7.3.2

Икосаэдр вложенный в додекаэдр и наоборот

Но об этом чуть позже, а пока вернёмся к космологии Платона. Он не строит додекаэдр, но отводит ему совершенно особое место, связывая с небом: “В запасе оставалось ещё пятое многогранное построение: его бог определил для Вселенной и прибегнул к нему, когда разрисовывал её и украшал” [Платон, 55с]. Что бы мы ни думали о подобных конструкциях, надо прежде всего иметь в виду, что в их основе лежит научно-религиозная по сути идея красоты космоса, математического совершенства Вселенной, идея универсальной мировой гармонии. А это фактически красугольный камень всего естественнонаучного мышления, порой открыто провозглашаемый,

порой не осознаваемый, но всегда наличествующий в выдающихся достижениях физической теории. Какими бы ни были математическая выучка и пристрастия бога, демиурга, он использует только *самое-самое* и потому не играет в кости, не играет в числа, не играет в геометрические тела. Мировая гармония (по разному понимаемая) – вот истинный творец космоса по Платону, который перенял эту доктрину от пифагорейцев и передал по наследству Кеплеру, Галилею, Ньютону, Пуанкаре, Эйнштейну, Эддингтону, Вейлю, Дираку, Гейзенбергу и другим архитекторам и каменщикам здания физической Вселенной.

В недрах пифагорейской школы зародилась изложенная Платоном концепция естествознания, которая даже в своем наивно-геометрическом варианте содержит серьёзные аргументы против таких современных псевдонаучных спекуляций как концепция множественности Вселенных – “бесчисленных космосов”, выражаясь языком Платона. “Если бы теперь кто-нибудь, тщательно обдумывая всё сказанное, задался вопросом, следует ли допустить бесчисленные космосы или ограниченное их число, ему пришлось бы заключить, что вывод относительно неограниченности этого числа позволительно делать разве что тому, кто сам очень ограничен, и притом в вопросах, которые следовало бы знать. Если, однако, поставить другой вопрос – существует ли один космос или их на самом деле пять, то здесь, естественно, причин для затруднения было бы куда больше. Что касается нас, то мы, повинувшись правдоподобному слову и указанию бога, утверждаем, что существует один космос; но другой, взглянув на вещи иначе, составит себе, пожалуй, иное мнение” [там же, 55c–55d]. Вторую часть этого отрывка можно понимать в том смысле, что хотя при построении космоса всё второстепенное, не соответствующее идеалу математической красоты должно быть отброшено, но окончательное решение не вполне однозначно поскольку помимо основного допустимы и другие решения. Узкая лазейка, оставленная для “мнения других”, интересна и в том отношении, что уже самые ранние попытки построения модели прекрасной Вселенной натолкнулись, можно полагать, на трудности, связанные с невозможностью сведения всего к одному-единственному математическому принципу, в данном случае к принципу золотого сечения, к одной константе, к одному многограннику.

Видимо, в самом конце долгого пути к созданию геометрии космоса появились какие-то сомнения насчёт тезиса об избранности додекаэдра, тем более что в другом месте утверждается: “небо в своей целостности имеет вид сферы”. Преимущество сферы – в равноудалённости всех точек её поверхности от центра, что созвучно идее однородной Вселенной, не имеющей выделенных направлений. “Но если космос действительно имеет такую природу, какую же из этих точек можно назвать верхом или низом, не навлекая на себя справедливой укоризны за неуместное употребление слов? Ибо центр космоса, строго говоря, по природе лежит не внизу и не вверху, но именно в центре, в то время как поверхность сферы и центром быть не может, и не имеет в себе части, как-либо отличной от других – скажем, более близкой к центру, нежели противоположная ему часть” [там же, 62d]. Противоречие между альтернативами можно, вероятно, устранить, просто вписав додекаэдр в сферу, однако мы не находим у Платона каких-либо указаний на возможность такого примирения. В дальнейшем додекаэдр со своими пятиугольниками и золотой пропорцией многим показался привлекательнее однородной сферы и именно он стал ассоциироваться с пифагорейско-платоновой картиной космоса.

Так, по мнению Тимердинга, “Только это тело символически изображает строение небесного мира, а так как, в связи с правильным пятиугольником, должно появиться... отношение золотого сечения, то последнее и играет главную роль в небесном мире” [Тимердинг, 53]. В отличие от додекаэдра, образованного из правильных пятиугольников, икосаэдр образован из равносторонних треугольников, не имеющих прямого отношения к золотому сечению. Но если вписать в каждый многогранник три взаимно перпендикулярных треугольника золотого сечения, в обоих случаях получается значимый результат: вершины этих треугольников окажутся в центрах граней додекаэдра и в вершинах икосаэдра. А центры граней додекаэдра соответствуют двенадцати вершинам икосаэдра и наоборот – 20 точек, расположенных в центрах граней икосаэдра, соответствуют вершинам додекаэдра; словом, каждый центр грани одного многогранника есть вершина другого, как и должно для пары дуальных многогранников. Приведём для справки основные характеристики этих тел, где R радиус описанной и r радиус вписанной сферы, S площадь поверхности, V объём и θ двугранный угол, записав эти величины через число ϕ . Обозначив длину ребра через a , имеем для додекаэдра:

$$R = a \sin \frac{\pi}{3} \cdot \phi \quad r = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{7+11\phi}}{2\phi-1} \quad S = 6a^2 \sqrt{5(\phi+3/4)} \quad V = a^3 (2 + 7\phi/2) \quad \theta = 2 \arctg \phi \approx 116,57^\circ$$

для икосаэдра:

$$R = \frac{a}{2} \sqrt{2+\phi} \quad r = \frac{a}{4 \sin \frac{\pi}{3}} \phi^2 \quad S = 10a^2 \sin \frac{\pi}{3} \quad V = \frac{5}{6} a^3 \phi^2 \quad \theta = 2 \arctg(\phi + 1) \approx 138,19^\circ$$

Нетрудно убедиться с помощью простых преобразований или прямого вычисления, что отношение R/r в обоих случаях равно $\frac{\sqrt{3(2+\phi)}}{\phi^2}$, поэтому в случае равенства вписанных (или описанных) сфер равны и описанные (вписанные) сферы. Если теперь совместить с началом декартовой системы центр додекаэдра и принять длину его ребра равной 2, получим следующий набор чисел для координат его двадцати вершин:

$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $(0, \pm 1/\phi, \pm \phi)$, $(\pm 1/\phi, \pm \phi, 0)$, $(\pm \phi, 0, \pm 1/\phi)$ [Dodecahedron]. При тех же предположениях двенадцать вершин икосаэдра окажется в точках $(0, \pm 1, \pm \phi)$, $(\pm 1, \pm \phi, 0)$, $(\pm \phi, 0, \pm 1)$ [Icosahedron]; три из них показаны на рисунке справа. Заметим, что координаты восьми вершин $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ додекаэдра не содержат константы ϕ , а все вершины икосаэдра лежат в одной из плоскостей xy , xz , yz и в каждом случае одна из трёх координат равна числу ϕ .

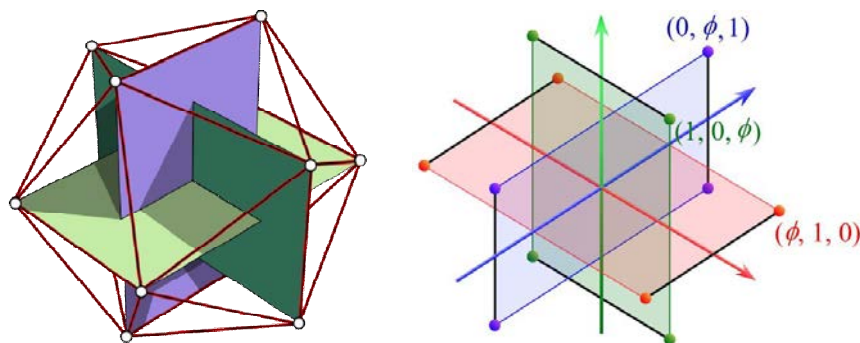


Рис. 7.3.3

Координаты вершин икосаэдра, помещенного в начало декартовой системы

При каком-то другом значения a для длины ребра все числа попросту умножаются на $a/2$. В частности при $a = 2\phi$ координатами вершин додекаэдра будут тройки чисел $(\pm\phi, \pm\phi, \pm\phi)$, $(0, \pm 1, \pm\phi^2)$, $(\pm 1, \pm\phi^2, 0)$, $(\pm\phi^2, 0, \pm 1)$, а вершины икосаэдра окажутся в точках $(0, \pm\phi, \pm\phi^2)$, $(\pm\phi, \pm\phi^2, 0)$, $(\pm\phi^2, 0, \pm\phi)$. В этом совершенно особом случае восемь “не золотых” вершин додекаэдра становятся “трижды золотыми”, а координаты вершин икосаэдра содержат лишь 0 и степени константы ϕ . Следовательно, как фигура золотой пропорции икосаэдр едва ли менее значим чем додекаэдр и вполне очевидно, что в связи с платоновыми равносторонними треугольниками правильнее говорить не об отказе от принципа золотого сечения, а наоборот, о приписываемом ему космологическом статусе, на основе которого возникает своеобразный трёхмерный символ Вселенной, достигается целостность геометрического представления о ней.

Кстати, додекаэдр и икосаэдр не так редко встречается на картинах старинных мастеров, например на картине венецианского художника Якопо де Барбари, по мотивам которой в конце прошлого столетия выпущена итальянская марка. Она была приурочена к пятисоглетию выхода в свет энциклопедического труда “Сумма арифметики, геометрии, дробей, учение о пропорциях и отношениях” францисканского монаха Луки Пачоли (1445–1517), автора “О божественной пропорции”, иллюстрированной рисунками Леонардо [Лука Пачоли]. Универсальная значимость, придаваемая золотой пропорции видна уже из полного названия этого трактата: “Божественная пропорция. Книга весьма полезная всякому проницательному и жаждущему знания уму, из которой каждый занимающийся философией, перспективой, живописью, скульптурой, архитектурой, музыкой или другими математическими предметами, может приобрести приятные, остроумные и удивительно достойные сведения и найти развлечение по разным вопросам и самым секретным знаниям”. Что касается помещенного на видном месте в картине додекаэдра (как и ромбокубооктаэдра – архимедова тела, составленного из 8 треугольников и 18 квадратов), его символическая роль, важность в качестве значимого элемента всей композиции достаточно очевидна.



Рис. 7.3.4

Картина Якопо де Барбари и марка выпущенная по её мотивам

Под сводом охватываемого разведенными в стороны руками Бога гигантского додекаэдра, состоящего, напомним, из 12 пятиугольников, проходит “Тайная вечеря” по Сальвадору Дали. Здесь можно видеть и связь с числом учеников Христа и прямое указание на сакральный смысл собрания, тем более что художник рассадил его участников по золотому правилу, а форма всей картины соответствует пропорциям золотого сечения, см. например [Livio]. Особых сомнений на этот счёт нет, поскольку лишь самую малость, менее трёх сантиметров в ширину и менее двух в высоту, не дотягивает их отношение ($267 \text{ см}/166,7 \text{ см} \approx 1,602$) до золотого идеала ϕ .



Рис. 7.3.5
“Тайная вечеря” Сальвадора Дали

В духе пифагорейской гармонии (музыки) сфер, используя платоновы тела, строил в своем раннем произведении “Космографическая тайна” картину Солнечной системы И. Кеплер. О его постоянном интересе к додекаэдру и икосаэдру свидетельствует отрывок из более позднего трактата, посвящённого совсем другой теме. Он примечателен тем, что в одном контексте с двумя платоновыми телами здесь золотое сечение (“божественная пропорция”) и пятиугольник как его геометрический символ и легко распознаваемый ряд Фибоначчи, сходящийся к золотому числу. Приводим поэтому это место почти полностью. “Существуют два правильных тела, додекаэдр и икосаэдр, из которых первое ограничено правильными пятиугольниками, а второе – равносторонними треугольниками, но прилегающих друг к другу так, что образуются некие пятигранные пространственные углы. Построение этих тел и в особенности самого пятиугольника невозможно без той пропорции, которую современные математики называют божественной. Устроена она так, что два младших члена этой нескончаемой пропорции в сумме дают третий член, а любые два последних члена, если их сложить, дают следующий член, причём та же пропорция сохраняется до бесконечности. ... Пусть оба младших члена будут числами 1 и 1 (ты можешь считать их неравными). Сложив их, мы получим 2. Прибавив к 2 больший из младших членов, получим 3, а прибавив к 3 число 2, получим 5. Прибавив затем к 5 число 3, получим 8, прибавив к 8 число 5, получим 13, прибавив к 13 число 8, получим 21. Отношение числа 5 к 8 приближенно равно отношению числа 8 к 13, а отношение числа 8 к 13 приблизительно равно отношению числа 13 к 21.

По образу и подобию этой продолжающей саму себя пропорции сотворена, как я полагаю, производительная сила, и этой производительной силой запечатлён в цветке подлинный символ пятиугольной фигуры” [Кеплер, 17].

Правда, чтение этого отрывка из трактата “О шестиугольных снежинках” наводит на вопрос: если пятиугольник так замечателен, почему тогда снежинки имеют шести-, а не пятиугольную форму?; хотя, с другой стороны золотая пропорция всё-таки присутствует в строении различных снежинок как разновидностей кристаллов. Но здесь важнее другое. Во времена Кеплера было известно шесть планет включая Землю, а платоновых тел, с которыми полагалось соотносить планеты, только пять. Но в правильные многогранники можно вписывать, а вокруг них описывать сферы на которых по мысли Кеплера, и располагаются орбиты планет. “Земля, – заявляет Кеплер в “Космографической тайне”, – есть мера всех орбит. Вокруг неё опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия”. Фактически он получил следующий по возрастанию расстояния от Солнца ряд чередующихся орбит и многогранников: Меркурий – октаэдр – Венера – икосаэдр – Земля – додекаэдр – Марс – тетраэдр – Юпитер – куб – Сатурн. Такая конструкция возможна при наличии лишь *шести* планет Солнечной системы, соотносящихся с *пятью*

платоновыми телами, и сейчас можно лишь гадать, какой была бы его тайна мироздания, знай Кеплер об открытых значительно позже Уране, Нептуне и Плутоне. Как бы то ни было, космография Кеплера, унаследовав общую идею и тенденцию учения, изложенного в “Тимее”, отличается от него своими частностями. Пифагорейский символ Вселенной додекаэдр спущен на Землю, точнее на земную орбиту. Можно думать, что молодой Кеплер, будучи убежденным коперниканцем, что считалось тогда недопустимым вольнодумством, почувствовал обиду за принижение роли нашей родной планеты и решил выделить Землю хотя бы среди планет солнечной системы, поместив её между двумя телами золотого сечения. Усилия Кеплера успехом не увенчались, но знаменательно, что заученные им тогда числовые соотношения между расстояниями и периодами обращения планет по собственному признанию (“я твердо заучил расстояния и времена обращения планет”) и мнению историков науки очень помогли ему впоследствии. Много лет спустя опираясь на это в сочинении под характерным названием “Гармония мира”, Кеплер пришел к своему третьему закону, предшественнику закона Всемирного тяготения Ньютона.

Отклоняясь немного в сторону, заметим, что было бы в высшей степени символично, если бы ещё до Ньютона Кеплеру, этому великому последователю пифагорейских традиций в естествознании, удалось найти гравитационную постоянную. Этим он открыл бы счёт истинно великим числам природы и был бы по праву признан одним из создателей – *отцом*, а не *предтечей*, *дедушкой* (что впрочем тоже очень почётно) современной физики. Но... пора ещё не настала: Кеплер в основном имел дело с безразмерными соотношениями между длинами и промежутками времени, а теоретический фон, необходимый для введения G в форме размерной величины, ещё не был создан. И Кеплер “упустил” эту уникальную возможность, ему оставался до неё один шаг, ведь константы G ему главным образом не хватило, чтобы получить закон всемирного тяготения.

Следует добавить, что Кеплер отнюдь не одинок в своем понимании Земли как додекаэдра, а корни самой идеи уходят в эпоху античности. “Земля, если взглянуть на неё сверху, похожа на мяч, сшитый из 12 кусков кожи” – это Платон устами Сократа в диалоге “Федон” [Платон 110b]. Уже в начале 19 в. французский геолог де Бимон полагал, что форму додекаэдра наша первоначально жидкая планета приняла при застывании. С помощью сеток, составленных из рёбер додекаэдра и икосаэдра, он пытался построить нечто вроде додекаэдро-икосаэдрической картины рельефа планеты, объясняющей местоположение горных хребтов и наиболее устойчивых областей земной коры. Другой француз, математик А. Пуанкаре, полагал, что Земля представляет собой деформированный додекаэдр. С идеей “Земля – кристалл” выступил в 1929 г. С.И. Кислицын, полагая, что 400–500 млн. лет назад вследствие изменения геосферы имел место частичный переход из одного кристаллического состояния в другое: додекаэдр частично трансформировался в родственный ему икосаэдр. При этом 20 треугольников икосаэдра как бы накладываются на 12 пятиугольников додекаэдра, образуя опутывающую планету сетку, полезную в частности для отыскания новых залежей ископаемых. Понимание Земли как огромного кристалла – золотого многогранника (рис. слева [Earth in Dodecahedron Crystal]) или как сочетания двух таких многогранников [Гончаров, Макаров и Морозов] имеет немало приверженцев, число которых, судя по всему, в последнее время заметно возросло.



Рис. 7.3.6

Земля как кристалл (додекаэдр) и как сочетание двух “золотых” многогранников

В варианте гипотезы “Земля – кристалл” с аббревиатурой ИДСЗ (икосаэдро-додекаэдрическая структура Земли) многогранники как бы вписаны в земной шар и спроецированы на его поверхность. При этом две вершины икосаэдра совмещаются с полюсами Земли, а вершины додекаэдра совмещены с центрами граней икосаэдра. Производится расчёт точных координат показанных на рисунке узлов [там же] с помещением исходного узла под номером 1 (см. на среднем рисунке) в точку $31^{\circ}9'$ в.д., почти совпадающую с долготой пирамиды Хеопса. На основе сопоставления расчётных и фактических данных утверждается, что с рёбрами и особенно с узлами икосаэдро-додекаэдрической модели Земли совпадают многие важнейшие структурные элементы земной коры, геологические образования, крупные рудные и нефтегазовые месторождения, центры магнитных аномалий и сейсмической активности и многие другие особенности, а также очаги наиболее примечательных древних культур и цивилизаций.

7.4. Платоновы тела в сакральной геометрии

Раз уж упомянуты древние цивилизации, не избежать хотя бы краткого освещения темы платоновых тел в *сакральной геометрии*. Как часть мифологического, религиозного мировосприятия и мистического опыта она возникла в незапамятные времена и имеет приверженцев и в наши дни. Рассмотренная в [разделе 6.6](#) “Золотая” пентаграмма – один из наиболее распространённых, но далеко не единственный магический символ древнего мира. Постоянный поиск совершенных геометрических форм и пропорций, “волшебных знаков” – по Гёте присущ многим народам и цивилизациям. Современный архитектор, художник, модельер, конструктор и т.д. не менее устремлены к получению оптимальных, эстетически привлекательных решений, чем их далекие предшественники. Не чужда, как мы видели и увидим ещё позже, идеям универсальной геометрии и фундаментальная наука, в особенности математика, физика и биология. Подобные идеи, возведённые в ранг религиозно-философской доктрины с явным эзотерическим оттенком, накладывают отпечаток на архитектуру, особенно общественно значимых сооружений, храмов, на конструкцию алтарей и предметов культового назначения, на иконографию, живопись, изобразительное искусство, а окутанные мистическим ореолом геометрические построения сакральной геометрии претендуют на роль общезначимой формы пространственно-временной организации и упорядоченности Вселенной.

Хотя в контексте настоящей работы тема сакральной геометрии стоит особняком, тем не менее она требует к себе некоторого внимания из-за её связи с платоновыми телами как носителями гармонии золотого сечения. А к этому как раз сопричастны значимые геометрические фигуры древности: *цветок жизни*, *плод жизни* и *куб Метатрона*, в меньшей степени *древо жизни* и *семена жизни*. Последние два символа будут представлены лишь для полноты описания, на остальных трёх, особенно на кубе Метатрона, придётся задержаться дольше. Начнём со цветка жизни – одного из древнейших магических символов, который можно найти во всех мировых религиях. Более того, полагают, что это нечто вроде изначальной системы, заключающий в себе все тайны мироздания и содержащей все уровни сакральной геометрии любой степени сложности. “Цветок Жизни, – по словам автора двухтомника *Древняя тайна Цветка Жизни*, был и есть известен всему живому. Всё живое вообще, не только здесь, но всюду, знало, что он, очевидно, являлся моделью творения – входом, выходом. Дух сотворил нас по этому образу... Это изначальный язык космоса, язык чистой формы и пропорции. Он называется цветком не просто потому, что он внешне похож на цветок, но потому, что он представляет жизненный цикл плодового дерева” [Мельхиседек, 1, 30]. Геометрически это достаточно простой узор, составленный по принципу *Vesica piscis* (рыбий пузырь, в переводе с латыни): две одинаковые окружности пересекающиеся таким образом, что центр каждой из них лежит на другой окружности. Система таких окружностей образует цветочный узор с симметрией шестого порядка и множеством любопытных пропорций. Изучением математических свойств цветка жизни и его отдельных частей занимался Леонардо да Винчи, усмотрев связь этой фигуры как раз с платоновыми телами и золотым сечением [*The Unknown Leonardo*].

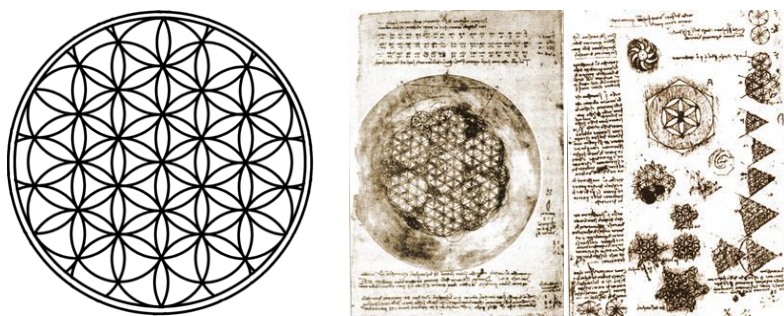


Рис. 7.4.1

Цветок жизни и его исследование в малоизвестной работе Леонардо да Винчи

Если семь расположенных в центре цветка жизни окружностей обвести окружностью, получим его усечённое изображение под названием семени жизни; в дальнейшем оно нам не понадобится.

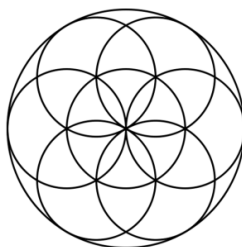


Рис. 7.4.2

Семена жизни

Другой скрытой в цветке жизни, более важной и характерной для многих религиозных и философских систем, мифологии и науки структурой является древо жизни; его получение из цветка жизни показано на рисунке. Платоновы тела и золотое сечение здесь, по крайней мере явно, не просматриваются, поэтому продолжим наше знакомство со значимыми фигурами сакральной геометрии.

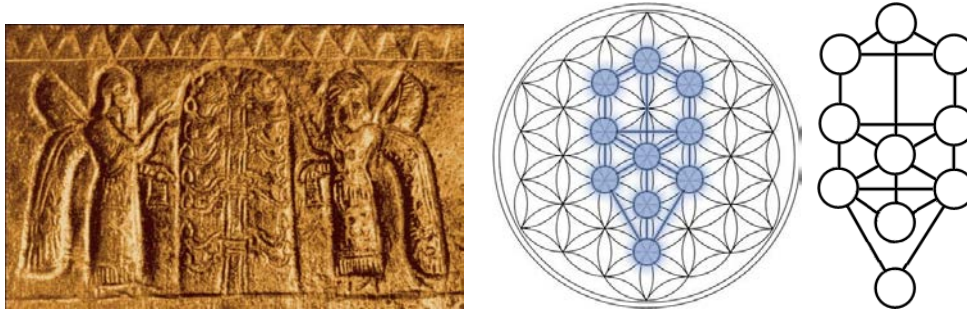


Рис. 7.4.3

Древо жизни на урартском шлеме из Эрбуни и получение древа жизни из цветка жизни

В нашем беглом обзоре четвертая по счёту фигура – *плод жизни* также может быть получена из изначального цветка жизни, см. [Flower of life], который для этого увеличен добавлением новых окружностей. Геометрически плод жизни представляет собой систему из 13 окружностей, но уже расположенных по касательной друг к другу, а не в соответствии с принципом Vesica piscis.

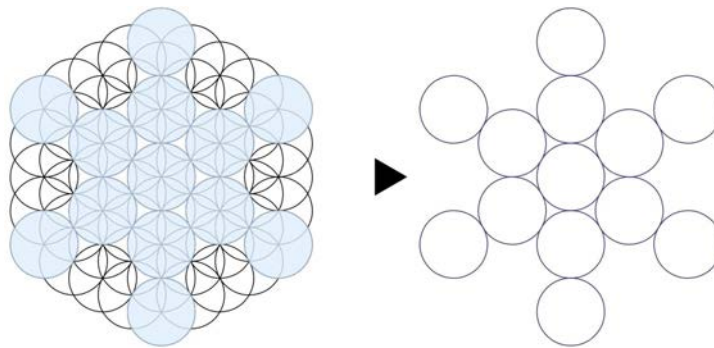


Рис. 7.4.4

Получение плода жизни из цветка жизни

Остаётся соединить прямыми линиями центры всех окружностей по принципу “каждый с каждым” и имеем наконец *куб Метатрона*, названный так по имени одного из ангелов, “небесного посредника”. В сакральной геометрии “это одна из наиболее важных информационных систем во вселенной, одна из основных моделей творения бытия” [Мельхиседек, 113], а геометрически – двумерная фигура с симметрией шестого, как и у цветка жизни, порядка, в которой при внимательном взгляде уже просматриваются контуры платоновых тел.

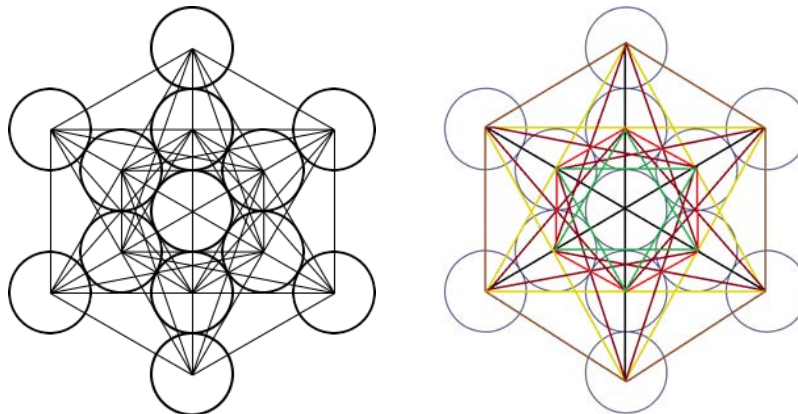


Рис. 7.4.5

Куб Метатрона

Эзотерический туман, которым сакральная геометрия окутывает эти многогранники, приводит к постановке не совсем обычных вопросов. “Откуда берутся Платоновы тела? Каков их источник?”, вопрошает уже известный нам автор [там же, 114]. Хорошо известно и строго доказано, что при всём бесконечном многообразии правильных многоугольников, то есть двумерных замкнутых геометрических фигур с равными сторонами и равными углами при смежных сторонах, в трёхмерном евклидовом пространстве возможны только пять объёмных тел, ограниченных равными правильными многоугольниками. Равносторонними треугольниками ограничены тетраэдр, гексаэдр и икосаэдр, квадратами – куб, а правильными пятиугольниками – додекаэдр. Только эти геометрические объекты, называемые правильными многогранниками или платоновыми телами, отвечают указанным условиям и это такая же математическая истина как, скажем, невозможность заполнения двумерной плоскости какими-либо другими одинаковыми правильными многоугольниками помимо равносторонних треугольников, квадратов и шестиугольников.

Однако, такой чисто научный, “заземлённый” ответ явно не в духе сакральной геометрии, основывающейся на мистическом опыте. “Сокрытые в линиях Куба Метатрона, все эти пять форм там существуют. При разглядывании Куба Метатрона вы смотрите на все пять Платоновых тел одновременно” [там же]. Очевидно, что трёхмерное тело не может содержаться в двумерной фигуре, так что речь может идти лишь о соответствии между ортогональными проекциями или другими двумерными представлениями платоновых тел с одной стороны и фигурами куба Метатрона с другой. Конкретно, необходимо совмещение узловых точек тех и других, то есть центры окружностей куба Метатрона должны совмещаться с проекциями вершин многогранников. Чтобы выяснить, как в действительности обстоит дело с подобными совмещениями, нам придётся провести небольшое исследование.

Прежде всего учтём, что у каждого из платоновых тел все рёбра одинаковой длины, отсюда особое внимание к тем фигурам, которые образованы линиями равной длины. Всего в кубе Метатрона в общей сложности 39 линий шести разных длин. На рисунке 7.4.5 они приведены в порядке убывания длины (радиус окружности взят равным 1) в следующих цветах: черные (3 линии), жёлтые (6), тёмно-красные (12), коричневые (6), зелёные (6), красные (6). Все линии, за исключением чёрных, образуют замкнутые фигуры, представленные в таблице с указанием также величины угла при вершине и длины ребра. Имеем в итоге два шестиугольника, две составленные из равносторонних треугольников звезды Давида, неправильную шестиконечную звезду с двумя неправильными четырёхугольниками. Здесь нет ни одной из известных фигур золотого сечения, а длины рёбер не связаны с законом третьего члена и рядом Фибоначчи. Это легко объяснимо, если принять во внимание, что куб Метатрона соотносится с симметрией шестого порядка, а не золотой пентагональной симметрией.

Таблица 7.3
Основные параметры куба Метатрона

Цвет линии	Число линий	Фигура	Угол при вершине	Длина стороны фигуры
Чёрный	3	Прямые линии	–	8
Желтый	6	Звезда Давида	60°	$4\sqrt{3} \approx 6,928$
Тёмно-красный	12	Шестиконечная звезда, два неправильных четырёхугольника	38,2°	$2\sqrt{7} \approx 5,292$
Коричневый	6	Шестиугольник	120°	4
Зелёный	6	Звезда Давида	60°	$2\sqrt{3} \approx 3,464$
Красный	6	Шестиугольник	120°	2

Перейдем теперь к проекциям платоновых тел на означенные фигуры сакральной геометрии. Есть три равнозначных способа их получения: провести соответствующие линии в изображении плода жизни, стереть лишние или же выделить нужные линии в кубе Метатрона.

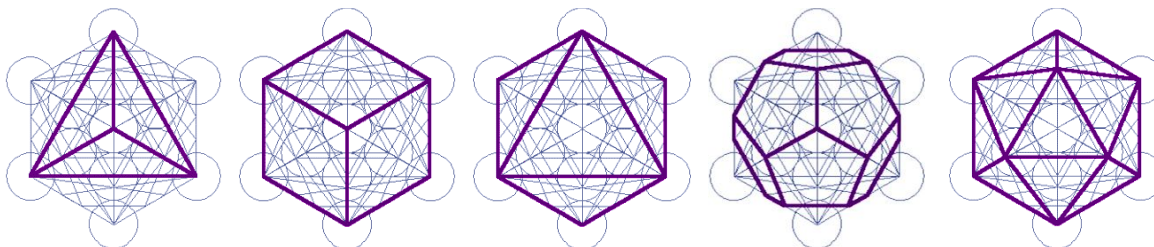


Рис. 7.4.6
Куб метатрона в сопоставлении с платоновыми телами

Полученный последним способом результат, см. например [Metatron's Cube], достаточно красноречив. Совмещение вершин многогранников с центрами окружностей двумерной фигуры удаётся достичь для тетраэдра, куба и октаэдра и оказывается невозможным для додекаэдра и икосаэдра. Следовательно, при данном сопоставлении золотые многогранники, как это не огорчительно для почитателей сакральной геометрии, не могут считаться “сокрытыми” в получаемом из цветка жизни (двумерном) кубе Метатрона.

7.5. Современная космология. Додекаэдр и икосаэдр

Уже в наши дни, в начале третьего тысячелетия платоновская идея об исключительной роли додекаэдра в строении Вселенной получила совершенно неожиданное, поистине сенсационное, хотя и далекое ещё от достоверности подкрепление. Дело в том, что обработка данных, полученных запущенным в 2001 г. зондом NASA WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), привела некоторых исследователей к удивительному выводу: Вселенная имеет форму додекаэдра [Luminet *et al.* 2003; Dumé; Muir]. Полагают, что именно такая форма конечного замкнутого двенадцатигранника наилучшим образом объясняет характер распределения микроволнового реликтового излучения (МРИ), своеобразного “эхо” Большого взрыва. Одновременно это “фотография” космоса в возрасте 380 тысяч лет, фиксирующая флуктуации плотности того периода, отражаемые в температурной анизотропии фонового излучения. В ранней Вселенной фотоны МРИ, образовавшиеся в результате Большого взрыва, интенсивно рассеивались свободными электронами, но позже в связи с остыванием и образованием атомов водорода Вселенная становится более “прозрачной”. Другими словами, “фотография”, полученная с помощью высокоточной аппаратуры зонда WMAP, даёт достаточно чёткое, неискажённое изображение молодой Вселенной. Первоначальные данные подтвердили предсказания стандартной модели (СМ) Большого взрыва и инфляционной космологической модели для областей пространства, разделенных малыми углами, однако позже для углов больше 60° наматилось серьёзное расхождение между предсказаниями СМ и результатами наблюдений. На рисунке из [Luminet *et al.* 2003] температурная анизотропия МРИ, выраженная особым образом через энергетическую величину, представлена в виде угловой функции.

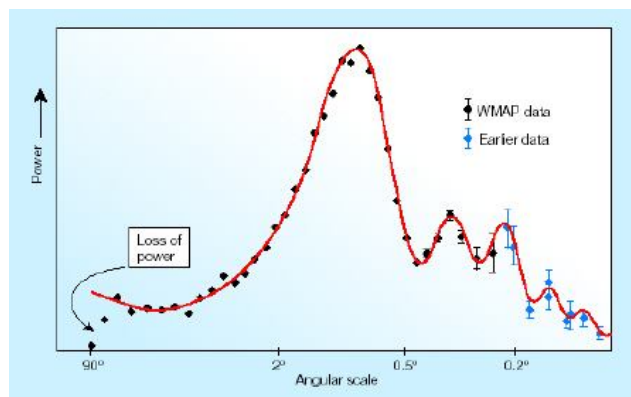


Рис. 7.5.1

Температурная анизотропия МРИ как угловая функция

В области малых значений кривая, определяющая температурную анизотропию как угловую функцию, характеризуется серией пиков, которые почему-то исчезают в области больших углов. Неспособность СМ объяснить это явление и стала причиной выдвижения модели конечной, имеющей додекаэдрическую форму Вселенной как наиболее разумного объяснения имеющегося массива данных.



Рис. 7.5.2

Схематическое изображение додекаэдрической структуры Вселенной

Это повергло в изумление многих и кое-кто уже в полный голос заговорил о том, что гениальное предвидение Платона нашло реальное подтверждение сегодня в опытным данным и их всестороннем математическом анализе, учитывающем все мыслимые альтернативы включая модель бесконечной Вселенной; см. например [Miller]. Для наглядного представления о геометрической структуре Вселенной предлагаем рисунок додекаэдра, сделанный Леонардо да Винчи как раз под влиянием платоновских идей, и рядом современный рисунок из [Luminet *et al.* 2003a]. Говорить о высокой степени надёжности, тем более единственности указанного заключения (уже получившего не только одобрительные, но и критические отзывы и комментарии) пока не приходится. Это лишь возможная интерпретация эмпирического материала, нуждающаяся в дополнительном исследовании гипотеза, которая будет или подтверждена или с меньшим успехом опровергнута.

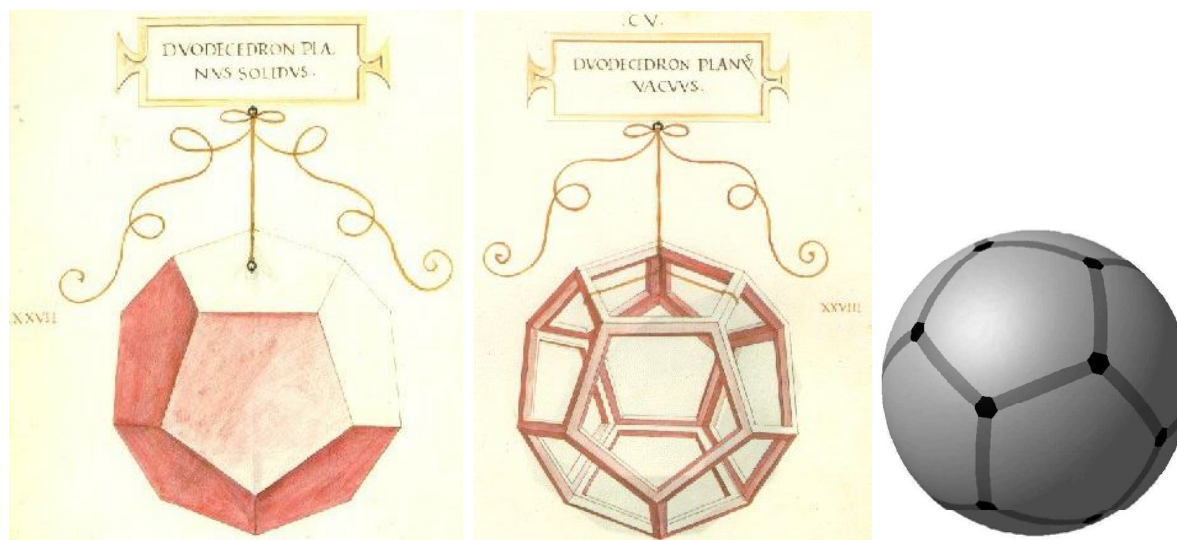


Рис. 7.5.3

Додекаэдр по Леонардо и современная модель Вселенной

Если всё же допустить её правильность, вывод напрашивается сам собой: современная наука, вооружённая сложной экспериментальной техникой и уточнёнными методами теоретического исследования, пришла фактически к той же конкретной геометрической структуре (в уточнённом варианте это т.н. додекаэдрическое пространство Пуанкаре), которая была предложена два с половиной тысячелетия назад. Предложена a priori, без использования каких-либо технических средств, посредством чистого мышления и на основе пифагорейского понимания математической гармонии и геометрического совершенства Вселенной. Подтверждение этой гипотезы означало бы блестящий, не имеющий, возможно, равноценных аналогов в истории естествознания триумф античной религиозно-философско-математической концепции математической красоты и единственности космоса; а как всё обстоит на самом деле, действительно ли мы живем в додекаэдрическом пространстве Платона-Пуанкаре, выяснится видимо уже в недалеком будущем [Roukema *et al.*].

Возникшая в недрах пифагорейской школы, если не раньше, идея божественной геометрии имеет немало сторонников и в наши дни. Основа всё та же – правильные выпуклые многогранники, платоновы тела, особенно связанные с золотым сечением икосаэдр и додекаэдр, но область применимости сакральной геометрии, обсуждаемой выше в связи с кубом Метатрона, сейчас намного шире. Это не только структура Вселенной, Солнечной системы, Земли, но и живой материи. Состоящий из 20 равносторонних треугольников икосаэдр является оптимальным способом формирования замкнутой оболочки из одинаковых элементов – субъединиц и закономерно, что многие вирусы имеют форму икосаэдра или околосферическую форму с икосаэдрической симметрией [Virus]. В проекции на плоскость полный виток двойной спирали молекулы ДНК вписывается в золотой прямоугольник. В ходе зародышевого развития многоклеточных животных организмов, называемого гастрულიей, сперва образуется тетраэдр из четырёх клеток, потом октаэдр, куб, а потом, нетрудно догадаться, икосаэдр и додекаэдр, словом все пять платоновых тел, притом в строгой последовательности. Не менее, если не более интересны утверждения, касающиеся структуры молекулы ДНК, см. например [Brooks; Implosion Group...; Perez; Yamagishi, and Shimabukuro]. Поворачивая куб определённым образом на “золотой” угол в 72° (вспомним треугольники золотого сечения), можно получить икосаэдр, составляющий, как мы знаем, дуальную пару с додекаэдром. Получается, что в построенной по принципу двустороннего соответствия двойной нити спирали ДНК за икосаэдром следует додекаэдр, затем снова икосаэдр, и так далее.

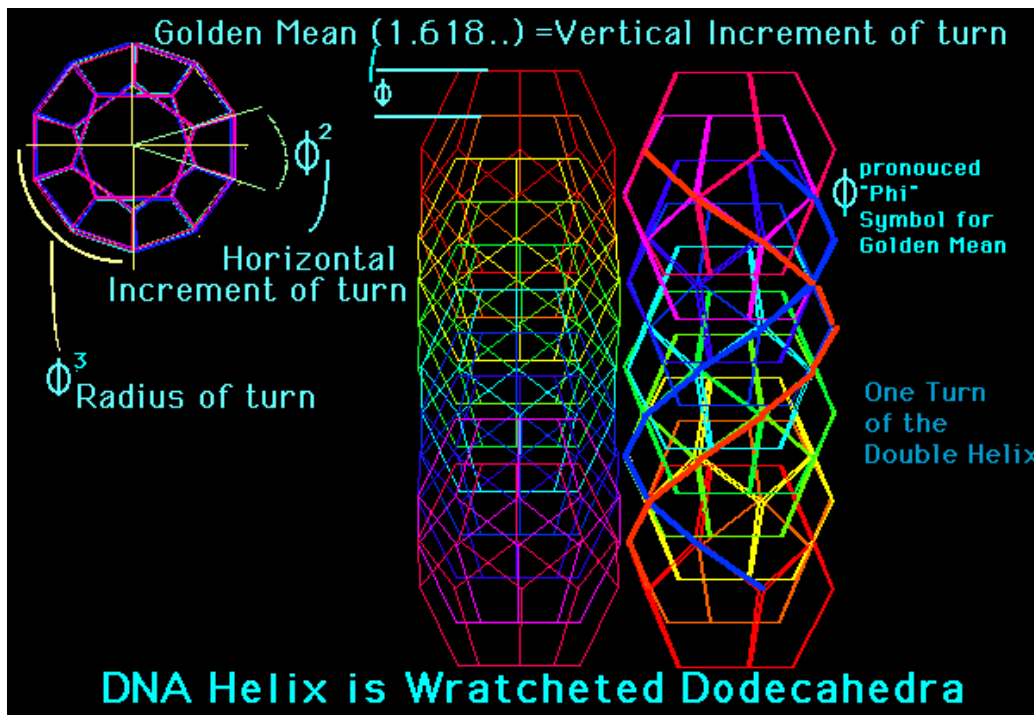


Рис. 7.5.4

Структура ДНК, золотое число и додекаэдр

Следует вообще сказать, что для некоторых “золотоискателей” молекула ДНК это поистине новое *Эльдорадо*. Известно, что в состав молекулы ДНК входят четыре азотных основания, нуклеотиды аденин (А), гуанин (G), тимин (Т) и цитозин (С), образуя пары А–Т и G–С. Нуклеотиды соединяются с группами сахара – дезоксирибозой (D), производной рибозы (состоящей кстати из четырёх атомов углерода и атома кислорода, образующих структуру с пентагональной симметрией), а группы сахара в свою очередь связываются между собой фосфатными группами (P), формируя показанную на рисунке цепь двойной спирали молекулы ДНК [Your Dictionary com.].

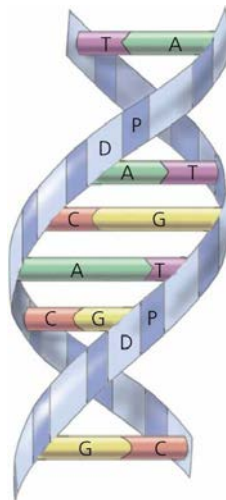


Рис 7.5.5

Молекула ДНК в виде двойной спирали

Генетический код, вся генетическая информация в клетке, определяющая существующие различия между живыми существами, зависит от количества элементов в цепи молекулы и от порядка чередования нуклеотидов А, Т, G, С. Согласно работе [Perez 1991] они образуют фрактальные структуры дальнего порядка, названные “резонансами”. Приводится такой пример резонанса: в участке цепи TCAG из 144 (F_{12}) нуклеотидов 55 (F_{10}) единиц приходится на долю тимина, а 89 (F_{11}) на долю остальных трёх нуклеотидов [Jean-Claude Perez]. Это

соответствие типа $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$, где F_{n-2} количество нуклеотидов определённого вида, например тимина, а F_{n-1} – суммарное количество нуклеотидов А, G, С на том же участке цепи. Соответствие между количеством нуклеотидов в резонансах и числами Фибоначчи, или родственными им числами Люка, названо “ДНК Supracode” (DNA Supracode). Утверждается, что в цепях некоторых молекул ДНК может содержаться несколько тысяч резонансов, то есть нуклеотидных отрезков длиной F_n или L_n , которые делятся золотым сечением соответственно на множества F_{n-2} и F_{n-1} , или L_{n-2} и L_{n-1} .

Молекула ДНК является основой биологической памяти, обеспечивающей генетическую программу передачи информации для воспроизводства живых организмов, поэтому любая относящаяся к ней закономерность заслуживает особого внимания. Утверждения об обнаружении золотого сечения и связанных с ним величин в молекулах ДНК – удобный случай для уточнения употребляемых при этом понятий в продолжение начатого в разделе 5.1 разговора. В изначальном смысле золотое сечение это деление отрезка $\acute{\alpha}\kappa\rho\sigma\ \kappa\alpha\iota\ \mu\acute{\epsilon}\sigma\sigma\ \lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ – в крайнем и среднем отношении (Евклид, “Начала”), то есть нахождение искомой точки с той точностью, которая достижима при использовании наличных технических средств. Не имеющая измерений математическая точка в принципе не может быть реализована в материальном мире, а любое геометрическое построение – лишь визуальный и весьма приблизительный образ научной абстракции. Само число золотого сечения ϕ это константа, иррациональное число, которое можно свести к другим математическим величинам посредством в частности радикалов и экспоненты, но нельзя представить через натуральные числа в виде *конечной* n -ичной дроби. Наконец, ряды Фибоначчи и Люка это последовательности чисел, не обязательно целых или действительных, строящиеся по рекуррентным формулам и сходящиеся в бесконечном пределе к числу ϕ . Ни при каком, сколь угодно большом n отношения типа F_{n+1}/F_n и L_{n+1}/L_n , аппроксимирующие золотое число, самим числом ϕ считаться не могут.

Из этих простых и достаточно тривиальных истин можно сделать несколько неожиданный на первый взгляд вывод: эмпирически, будь то геометрическое построение или физическое измерение, число ϕ получено быть не может. Любая эмпирическая процедура может привести лишь к некоему интервалу значений, содержащему бесконечное множество чисел и если среди них окажется и золотое число, то это ещё мало о чём говорит. Поэтому, любое утверждение об обнаружении путём измерения числа ϕ в каком-либо явлении микро-, макро или мегамира, строго говоря, не вполне корректно и может быть оспорено, подвергнуто сомнению и даже осмеяно. Ведь никакая, обнаруженная в природе, допустим, спираль не является идеально логарифмической, а тем более безоговорочно золотой, и кто может сказать, в каких случаях и на каком уровне приближения к золотому стандарту допустимы подобные утверждения. Не с этим ли, кстати, связано не столь уж редкое отношение к золотому сечению как к “красивой сказке” [Радзюкевич]?

Сомнения безусловно оправданы, если золотое сечение понимается исключительно как геометрическая пропорция, реализуемая во внешнем мире в виде различных фигур и тел, или когда константа ϕ воспринимается просто как определённая числовая величина, а всякое измерение, дающее близкое к 1,62 значение, вызывает трепетный восторг и торжествующую *эврику*. Не менее сомнительно отождествление встречающихся в природе малых положительных чисел, особенно первой десятки, с числами Фибоначчи. Но есть и другая сторона медали. Научному мышлению в равной мере чужды и экзальтированная восторженность и непробиваемый “железобетонный” скепсис. Константу ϕ и её гомологов, фигуры и тела золотого сечения, числа Фибоначчи и Люка следует прежде всего воспринимать как проявления универсальных принципов мировой гармонии, таких как закон наименьшего действия. И совершенно необязательно, чтобы реальное, не выдуманное проявление подобных принципов соответствовало математическому идеалу. Даже универсальные физические законы в безупречной математической упаковке себя, как правило, не обнаруживают. Например, Земля не движется в точности по эллиптической орбите вокруг Солнца, в сущности она вообще движется не вокруг Солнца, а их общего центра масс и это движение не вполне по эллипсу, поскольку есть ещё и влияние различных коррелирующих факторов, в частности наличие других планет. Отсюда, однако, не следует, что в пределах классической механики законы Кеплера, или закон всемирного тяготения неверны, просто малые поправки к основному закону (возмущения в небесной механике, радиационные поправки в квантовой физике и т.д.) вносят определённые изменения в общую картину.

Вывод один: близость каких то отношений к числу ϕ , или его производным, даже с высокой степенью точности, как и обнаружение в каком-то явлении чисел совпадающих с числами Фибоначчи или Люка, пусть даже не начальными, – лишь повод для размышлений и исследований на предмет выявления *принципа золотого сечения*, которым должно быть обусловлено появление числовых величин. Можно сказать, что здесь применим известный методологический постулат: “Существовать – значит быть элементом системы” (Р. Карнап). Другими словами, если соотношения золотой пропорции удаётся вывести математически из теоретических положений общего типа, таких как законы сохранения, обеспечивающие оптимальную организованность, устойчивость, стабильность системы, или если, допустим, исследуемая структура соответствует пентагональной симметрии, то резко возрастает степень правдоподобия, надёжности и нашей внутренней убеждённости в том, что действительно получен “золотой” результат.

Конкретно, в случае ДНК Supra-кода на первом плане (в смысле подтверждения) статистический закон больших чисел, требующий для своего надёжного применения большой выборки. Если, как утверждается в [Jean-Claude Perez], в таких молекулах ДНК как молекула мерзопакостного вируса HIV (ВИЧ) насчитывается несколько тысяч резонансов, причём наиболее длинные из них покрывают 2/3 общей длины цепи нуклеотидов, это следует расценивать как серьёзный аргумент в пользу изложенной выше модели. Разумеется, здесь, как и во многих других случаях, уместна ритуальная формула о необходимости дополнительных исследований.

Продолжая рассмотрение платоновых тел заметим, что вездесущий икосаэдр привлекателен и чисто математически, хотя бы благодаря тому (но не только), что, “используя уравнение икосаэдра, можно решить и любое уравнение пятой степени” [Клейн, 394]. О значении платоновых тел для современной математики можно судить по небольшому разделу с заголовком “Похвала правильным многогранникам” указанной работы Ф.Клейна: “Эти фигуры проходят через всю историю математики. Пифагорейцам они представлялись символами некоего мистического совершенства. Греческие натурфилософы сравнивали их с пятью стихиями. Греческим геометрам удалось показать, что кроме пяти известных никаких других правильных многогранников не существует и что по радиусу описанного шара их можно строить с помощью циркуля и линейки. Тринадцать книг евклидовых “Начал” являются лишь введением к построению правильных многогранников.

На протяжении всех средних веков правильные многогранники оставались предметом мистического почитания и символом твердости характера. ... Кеплеровской фантазии правильные многогранники потребовались для установления связи между размерами планетных орбит. И теперь, в наши дни, они снова вступают в поле зрения математической науки, где удивительнейшим образом связуют воедино геометрию, теорию групп, алгебру и теорию функций, указывая путь к дальнейшим исследованиям” [там же, 396–397].

Мысль, самим Евклидом чётко не обозначенная, о том, что предшествующие главы его геометрии “являются лишь введением к построению правильных многогранников” восходит к неоплатонику Проклу (412–485), к его дошедшему до наших дней произведению “Комментарий к первой книге «Начал» Евклида” [Proclus] (“гипотеза Прокла” подробно обсуждается в работе [Стахов²]; см. также [Сороко]). Поскольку платоновы тела, рассматриваемые в заключительной тринадцатой книге “Начал”, являются как бы венцом всех построений евклидовой геометрии, оригинальное понимание Проклом её конечной цели, разделяемое Клейном и другими, не лишено логики и имеет право на существование. Любопытно, что Платон, чьим именем названы правильные многогранники, в отрывке не упомянут; главное всё же то, что целый ряд замечательных свойств платоновых тел может быть использован для серьёзного поиска случаев применения этих свойств в живой и неживой природе, но и для всевозможных спекуляций самого разного толка. Заметим, что если молекула ДНК геометрически представляет собой получаемое вращением куба чередование икосаэдров и додекаэдров, то инвариантом такой модели следует считать задаваемое обычно как пересечение поверхности

$$z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0$$

с единичной сферой пространство икосаэдра, тождественное пространству додекаэдра.

Накопленный за многие столетия опыт научного исследования, не в последнюю очередь связанный с изучением золотой пропорции, показывает, что наиболее устойчивыми, жизнестойкими являются как раз те системы живой и неживой природы, которые несут в себе начала универсальной гармонии, такие как принципы минимальности, оптимальности, инвариантности, сохранения важнейших параметров системы при любых изменениях включая рост организмов. Есть достаточно серьёзные основания полагать, что правильные выпуклые многогранники, прежде всего икосаэдр и додекаэдр, относятся к числу форм пространственно-временного упорядочения материальных тел разного уровня сложности и масштаба, в наибольшей степени отвечающих указанным требованиям. Добавим, что крайне заманчивая идея единства мира на разных уровнях её организации, от структуры Метагалактики до входящей в состав живой клетки структуры молекулы ДНК (Д. Винтер, см. [Implosion Group...]), в свою очередь породила мистику золотой пропорции в додекаэдро-икосаэдрическом варианте с привлечением “священного” числа 72; останавливаться на этом, однако, не будем.

Следуя пифагорейской традиции, доведенной Кеплером до уровня естественнонаучного, использующего огромный фактический материал метода исследования, некоторые современные авторы пытаются при решении более локальных задач найти числовые закономерности в расположении планет и в других пропорциях, характеризующих Солнечную систему. Решающая роль здесь нередко отводится числу ϕ . Средние расстояния \bar{R} планет от Солнца составляют дискретную последовательность чисел, начинающуюся с 57,1 млн. км для Меркурия и кончающуюся 5,87 млрд. км для Плутона. Существует ли, спрашивается, закономерность в расположении планетных орбит относительно друг друга и если да, то какая? Располагая планеты по возрастанию их расстояний \bar{R}_i до Солнца и приняв \bar{R}_1 – среднее расстояние от Солнца ближайшей к нему планеты Меркурия – равным 1, имеем для отношений типа \bar{R}_{i+1}/\bar{R}_i ($i = 1, 2, \dots, 9$) ряд безразмерных величин, показанных в правом столбце таблицы, см. [Phi and the Solar System].

Таблица 7.5.1
Средние расстояния планет
от Солнца и их отношения для соседних планет

Планета	Расстояние до Солнца, млн. км	Отношения для соседних планет
Меркурий	57,91	1,00000
Венера	108,21	1,86859
Земля	149,60	1,38250
Марс	227,92	1,52353
Церера	413,79	1,81552
Юпитер	778,57	1,88154
Сатурн	1 433,53	1,84123
Уран	2 872,46	2,00377
Нептун	4 495,06	1,56488
Плутон	5 869,66	1,30580

Сумма чисел правого столбца равна 16,18736, а значит среднее 1,618736 по десяти членам ряда $\sum_{i=1}^9 \bar{R}_{i+1} / \bar{R}_i$ отклоняется от ϕ лишь на $\delta \approx 0,00044$. Впечатляющая близость, если только причислить астероид

Цереру к планетам Солнечной системы. Если же изъять его из списка, то полученное по девяти планетам значение 1,76736 уже очень далеко от золотого числа. Астероиды, называемые также карликовыми планетами, как и девять планет Солнечной системы обращаются вокруг Солнца, и в сущности разница между теми и другими лишь в размерах. Предполагают, что общая масса почти ста тысяч уже открытых и получивших имена и ориентировочно почти миллиона ещё не открытых и не исследованных астероидов меньше 0,1% от массы Земли [Pitjeva]. Расположенная между Марсом и Юпитером в поясе астероидов Церера – самая большая (диаметр около 950 км, масса $9,5 \cdot 10^{23}$ г) среди карликовых планет, настоящий гигант в мире астероидов. На долю Цереры приходится приблизительно треть их общей массы, но достаточно ли этого для включения “планетоида” с такой всё же относительно ничтожной массой в список обычных планет, при наличии сравнимых с Церерой по размерам астероидов (Паллада, Веста, Юнона, Икар и др.)?

Правда, может подтвердиться высказанная ещё Кеплером в 1596 г. довольно популярная сегодня и в какой-то степени подкрепляемая математическими расчётами гипотеза о некогда существовавшей между Марсом и Юпитером планете Фазтон. Полагают, что именно её распад (по одной из версий под воздействием гравитации Юпитера, по другой из-за столкновения с большим космическим телом) привёл к образованию пояса астероидов. Если выяснится, что Фазтон действительно существовал, многие расценят это как триумф кеплеровской догадки и пифагорейской идеи о десяти планетах Солнечной системы, зато обсуждаемая здесь “золотая модель” особенно не выиграет. Гипотетический Фазтон всё равно был бы очень мал по сравнению с остальными девятью планетами, ненамного больше Цереры. Добавим от себя: математический анализ задачи показывает, что между Марсом и Юпитером нет имеющей физической смысл точки, приводящей к точному значению ϕ для указанного выше среднего значения. Точнее, уравнение

$$a + \frac{x}{b} + \frac{c}{x} = 10\phi$$

где a сумма всех членов правого столбца таблицы кроме пятого и шестого, b и c средние расстояния от Солнца для Марса и Юпитера соответственно, не имеет решения в действительных числах; при таком подходе золотой стандарт для Солнечной системы математически недостижим. В качестве ничего пока не значащего, но любопытного обстоятельства заметим, что если b и c в последнем равенстве заменить отсутствующими в нём значениями из пятой и шестой строк таблицы, то один из двух корней уравнения будет равен 0,567103, а это число совпадает с **омега-константой** в четырёх знаках после запятой, то есть в пределах точности измерения расстояний планет до Солнца оно практически неотличимо от $W(1)$.

Имеются конечно и другие исследования подобного рода. Важным параметром больших и малых тел Солнечной системы является *сидерический период обращения*, обозначаемый обычно символом T и определяемый как промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот вокруг Солнца. Располагая планеты Солнечной системы, а также пояс астероидов в порядке убывания их T [Harris], имеем

дискретный ряд чисел в диапазоне от 60 129 суток для Нептуна до 88 суток для Меркурия (в данном списке почему-то отсутствует Плутон – самая удаленная от Солнца планета). Если теперь, начиная с Нептуна и Урана, брать отношения типа T_i/T_{i+1} , то в каком-то приближении и с некоторой натяжкой получим последовательность $1/2, 1/3, 2/5, 3/8, 5/13, 8/21, 13/34$, то есть ряд F_n/F_{n+2} ($n = 1, \dots, 7$) для стоящих через один чисел Фибоначчи, стремящийся как известно к ϕ^{-2} .

Аналогично, опираясь на большое количество эмпирических данных, относящихся к планетам Солнечной системы, Солнцу и спутникам Юпитера, Сатурна, Урана, можно прийти к выводу, что “соотношения периодов обращения соседних планет равно числу ϕ или ϕ^2 ” [Бугусов, 475], что “числовой ряд ϕ^k и его гомологи являются числами адекватными космическим объектам, т.е. естественными числами для их описания”. Предлагается даже следующее: “...Ввиду адекватности «золотого числа» таким крупным областям человеческого знания, как астрономия, архитектура, теория музыки, ботаника и др. возникла необходимость и возможность создания специальной системы счисления («золотой математики»), основанной не на числе 10, а на «золотом числе». Эта математика позволила бы более чётко и логично, чем обычная, решать поставленные перед нею задачи в указанных областях знания” [там же, 499]. Справедливости ради надо сказать, что с “астрономией” золотого сечения не всё ясно, но если эти идеи верны, тогда число ϕ возводится в ранг безразмерной космологической константы. Что касается системы счисления, основанной на ϕ , это уже тема следующего раздела.

Возвращаясь в свете сказанного об икосаэдре к теме пяти- и шестиугольников заметим, что любое содержащее правильный пятиугольник геометрическое тело – носитель золотой пропорции. Интересным примером сочетания многоугольников двух типов является *усечённый икосаэдр*, относящийся к классу полуправильных многогранников и к подклассу архимедовых тел. В отличие от обычного икосаэдра, содержащего 20 равносторонних треугольников, усечённый икосаэдр, напоминающий по форме классический футбольный мяч, составлен из 12 правильных пятиугольников и 20 правильных шестиугольников. При этом, как видно из рисунка, каждый шестиугольник граничит с тремя шестиугольниками и тремя пятиугольниками, каждый пятиугольник окружен пятью шестиугольниками, а значит в каждой из шестидесяти вершин сходятся два шестиугольника и пятиугольник. Другая важная особенность C_{60} как носителя икосаэдрической симметрии, выделяющая её среди множества других фуллеренов, в отсутствии двух смежных пятиугольников [Fullerene].

Совместим, как прежде в случае икосаэдра и додекаэдра, с началом декартовой системы центр усечённого икосаэдра, приняв для удобства длину его ребра равной 2. Все вершины усечённого икосаэдра лежат на описанной вокруг него сферы с координатами, которые можно представить в виде различаемых по своим числовым значениям групп, содержащих соответственно 12, 24 и 24 трёхмерные координаты.

$$\begin{aligned} (0, \pm 1, \pm 3\phi) & \quad (\pm 1, \pm 3\phi, 0) & \quad (\pm 3\phi, 0, \pm 1) \\ (\pm 2, \pm(1+2\phi), \pm\phi) & \quad (\pm(1+2\phi), \pm\phi, \pm 2) & \quad (\pm\phi, \pm 2, \pm(1+2\phi)) \\ (\pm 1, \pm(2+\phi), \pm 2\phi) & \quad (\pm(2+\phi), \pm 2\phi, \pm 1) & \quad (\pm 2\phi, \pm 1, \pm(2+\phi)) \end{aligned}$$

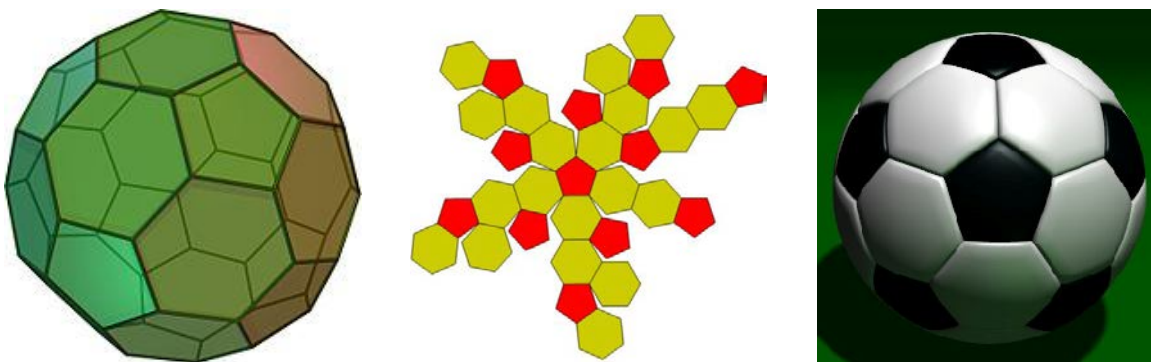


Рис 7.5.6

Усечённый икосаэдр и футбольный мяч

Но самое интересное, что подобная структура реализуется в виде молекулярного соединения C_{60} – члена семейства фуллеренов, представляющего собой одну из модификаций (наряду с алмазом, графитом, карбином, графеном и т.д.) углерода. Молекула C_{60} , называемая также бакминстерфуллереном – по имени американского архитектора Бакминстера Фуллера, применявшего правильные пяти- и шестиугольники для постройки куполов зданий – была синтезирована в 1985 г. [Kroto et al.]; за открытие фуллеренов Х.Крото, Р.Смолли и Р.Керлу в 1996 г. была присуждена Нобелевская премия по химии. Вскоре, вслед за лабораторным открытием C_{60} был обнаружен в образующейся в дуговом разряде на графитовых электродах саже, при исследовании грозвых разрядов в атмосфере, в горных породах докембрийского периода в Карелии [Buseck et al.], а в 2010 г. в облаке

космической пыли, окружающем находящуюся на расстоянии 6500 световых лет от Земли звезду. Это, по словам Крото, свидетельствует о существовании фуллеренов в самых удаленных закоулках нашей галактики [Gill]. Углерод – один из самых распространенных в окружающем мире химических элементов, а его аллотропная модификация C_{60} , то есть 60 атомов углерода в вершинах архимедова тела (кстати, самая большая из всех когда-либо обнаруженных в космосе молекул) – важнейший и наиболее распространенный, как принято считать, представитель многочисленного семейства фуллеренов. “Золотые” весточки о существовании материальных структур с геометрией усеченного икосаэдра можно расценивать как одно из наиболее явных и впечатляющих проявлений принципа золотого сечения в природе.

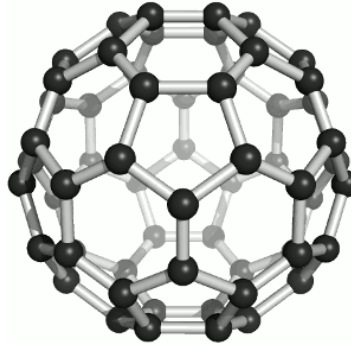


Рис 7.5.7
Модель фуллерена C_{60}

7.6. Система счисления с основанием ϕ . Модульор

Не менее интересен вопрос о системах счисления связанных с реализацией принципа золотого сечения. Нечто подобное системе счисления с основанием ϕ вместо 10 вероятно применялось уже давно, в частности в архитектуре. Точнее, при строительстве различных сооружений использовались, также русскими мастерами, см. [Пилецкий; Волков], системы мер длины, основанные на практическом знании золотого сечения, с эталонами длины, образующими сходные с рядом Фибоначчи последовательности. Пользовались также соответствующими рабочими и чертежными инструментами, вспомним хотя бы циркуль золотого сечения из Помпей (рис. 5.1.6). Арифметические свойства числа ϕ таковы, что с возрастанием сложности композиции, с увеличением количества деталей и элементов сооружения точность их окончательной пригонки, каким бы невероятным это ни казалось на первый взгляд, может увеличиваться, а не уменьшаться. Напомним, что чем выше показатель степени в выражениях ϕ^k или $\phi^k/\sqrt{5}$, тем меньше не только относительное, но и абсолютное отклонение от соответствующего целого числа. В указанном случае в принципе золотого сечения гармония и эстетика пропорций органически сочетаются с практической целесообразностью.

Но перспективы “золотой математики” значительно шире. Строгое построение систем счисления с основанием ϕ , впрочем и любым другим положительным – целым, дробным или иррациональным – основанием r , не сталкивается с какими-либо трудностями формального характера. Общая форма представления произвольного действительного числа M через r выглядит так:

$$M = \pm \sum_n l_n r^n \quad (7.6.1)$$

где n пробегает конечный или бесконечный ряд значений $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а l_n для каждого из слагаемых принимает одно из значений $0, 1, 2, \dots, k$, причём k не должно превышать r . Поскольку $1 < \phi < 2$, в системе с основанием $r = \phi$, как и в двоичной системе, l_n может принимать лишь значение 0 или 1. Эти два символа необходимы и достаточны для представления действительных чисел в позиционной системе счисления, основанной на ϕ . Например, само число ϕ запишется в ней как 10, двойка – 10,01, число π с учётом того, что

$$\pi = \phi^2 + \phi^{-2} + \phi^{-5} + \phi^{-7} + \phi^{-9} + \phi^{-12} + \phi^{-16} + \dots$$

выражается бесконечной дробью

$$\pi_\phi = 100,0100101010010001\dots$$

Важной особенностью золотого числа является возможность представить любое целое число посредством конечной суммы его положительных и отрицательных степеней, что следует из формул (5.9.3) и (5.9.4), выражающих $\phi^{\pm n}$ в виде линейной комбинации ϕ и соответствующих чисел Фибоначчи. Можно при этом

потребуется, чтобы не было двух рядом стоящих единиц либо нулей; целое число n запишется соответственно двумя различными способами. Например, для числа 24 имеем следующие формы записи:

$$\begin{aligned} 24 &= \phi^6 + \phi^3 + \phi^1 + \phi^{-4} + \phi^{-6} & 24_\phi &= 1001000,000101 \\ 24 &= \phi^5 + \phi^4 + \phi^2 + \phi^1 + \phi^0 + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-5} + \phi^{-6} + \phi^{-7} + \phi^{-8} & 24_\phi &= 110111,01101111 \end{aligned}$$

В дальнейшем при изложении общей теории золотого сечения мы убедимся, что возможность записи любого целого числа в виде суммы степеней константы – характерная особенность не только золотого числа, но и других членов определённого семейства чисел.

Объединение большого класса систем с двоичным кодом достигается естественным обобщением задачи нахождения золотого сечения или равнозначного ей уравнения (5.2.1). Обобщение приводит [Стахов 1984, 13] к уравнению

$$x^{p+1} = x^p + 1 \tag{7.6.2}$$

в котором показатель целой степени p меняется от нуля до бесконечности. При $p = 0$ неизвестная $x = 2$; если $p \rightarrow \infty$, неизвестная x стремится к 1 (унитарный код). Во всех остальных случаях, в том числе классическом $p = 1$, положительные корни ϕ_p этого уравнения располагаются в интервале между 2 и 1. Каждый член бесконечного множества чисел типа ϕ_p задаёт свой способ записи (7.6.1) произвольного числа M в двоичном коде 0, 1. Система счисления с основанием ϕ впервые была предложена не так давно [Bergman]. Попытка доказать, что системы счисления с иррациональным основанием ϕ_p – “коды золотой p -пропорции” имеют большую ценность для различных областей вычислительной и измерительной техники, предприняты в работах [Стахов 1984; Stakhov; Newcomb R.; Monteiro, Newcomb; Ligomenides, Newcomb; Hoang; Stankovic, Stankovic, Astola, Egizarian; Séroul]. Сходны по своим свойствам с кодами золотой p -пропорции “ p -коды Фибоначчи”, использование которых в технике считают весьма перспективным [Kautz; Стахов⁵].

Основанием системы счисления может служить не только определённое число, скажем 10, 5 или ϕ , но и бесконечная последовательность чисел, в частности $\{F_n\}$. Любое число может быть записано в виде суммы чисел Фибоначчи [Zeckendorf 1972; 1972a], причём такая запись единственна и не может содержать двух рядом стоящих чисел F_n и F_{n+1} по той простой причине, что $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$. В системе счисления с основанием $\{F_n\}$, как и в случае системы с основанием ϕ и фактически по той же причине ($F_{n+1}/F_n \rightarrow \phi < 2$), множители l_n из общей формулы (7.6.1) могут принимать лишь два значения, 0 или 1. Например, с учётом того, что $F_1 = F_2 = 1$,

$$137 = 89 + 34 + 13 + 1 = 1 \cdot F_{11} + 0 \cdot F_{10} + 1 \cdot F_9 + 0 \cdot F_8 + 1 \cdot F_7 + 0 \cdot F_6 + 0 \cdot F_5 + 0 \cdot F_4 + 0 \cdot F_3 + 1 \cdot F_2$$

следовательно $137_{\text{Fib}} = 1010100001$, а допустим, константа π выражается бесконечной дробью

$$\pi_{\text{Fib}} = 100,00000100001010010000001010010000100001\dots$$

Система записи (единственным образом) целого числа посредством чисел Фибоначчи, в которой каждое F_i встречается не больше одного раза и используются лишь два символа, является минимально-битовым фибоначчиевым представлением Цекендорфа. Сказанное относится с небольшими вариациями и к последовательности Люка [Zeckendorf 1972]. Если же снять запрет многократного применения каждого F_i , то число возможных вариантов представления данного числа n и количество используемых при этом различных символов стремительно растут с увеличением n [Hoggatt, Cox, Bicknell]. Так, существует 22 разных способа подобного представления числа 10 и уже 1489 способов представления числа 40.

Перейдем к продолжающей вызывать интерес и споры теории модулора Ле Корбюзье, изложенной например в работах [Ле Корбюзье 1970; 1976]. Не касаясь существующих оценок, от едких замечаний до восторженных эпитетов (всё же положительные оценки, особенно в наши дни, явно преобладают), попытаемся вкратце, в несколько вольном изложении и в определённом ракурсе представить центральную, можно думать, идею модулора. В логически строгой реконструкции в его основу фактически положено не число ϕ и не ряд F_n , как нередко утверждается, а принцип золотого сечения в форме правила третьего члена. Применение этого правила, мы знаем из раздела 5.6, при любом выборе двух начальных чисел, не обязательно даже действительных, приводит к последовательности непосредственно связанной с рядом Фибоначчи и дающей в пределе константу ϕ (см. формулу 5.6.6). Это в сущности всё, что надо знать для понимания математики модулора, основанной таким образом на простейшем и в то же время фундаментальном принципе. Хотя мыслимая область применимости модулора значительно шире, заложенную в нём идею удобнее всего иллюстрировать на важнейшем примере пропорций и положений человеческого тела. В левой части рисунка указаны три основных, если можно так выразиться, макропараметра человеческой фигуры, среди которых важнейшим является нижний. Откуда, спрашивается, взялись эти 113 см? Ответ достаточно прост: это пупок, которым рост в 6 футов = 182,88 см \approx 183 см делится в золотой пропорции (как не вспомнить статую Дорифора или рисунок Леонардо!). Вдвое большая величина 226 см определяет высоту кончиков пальцев поднятой определённым образом руки.

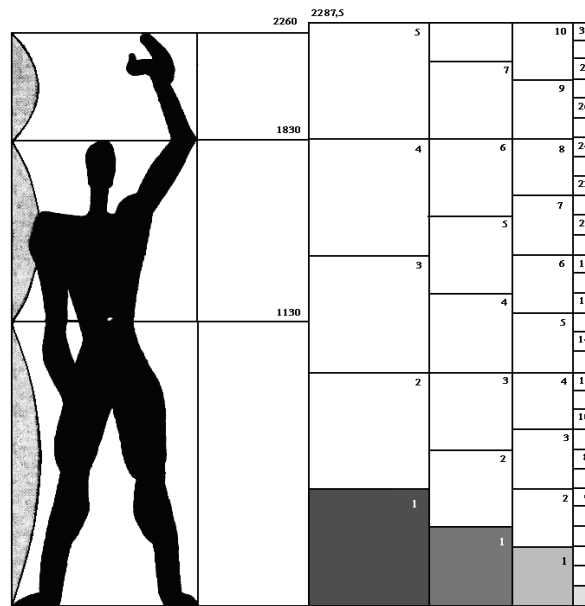


Рис 7.6.1

Модуль и пропорции человеческого тела

В правой части рисунка даны в виде не одинаково окрашенных квадратов единицы измерения, равные восемнадцати, двенадцати, девяти и трем дюймам, которые в длину равную 90 дюймам $\approx 228,6$ см, чуть большую 226 см, укладываются соответственно 5, $7\frac{1}{2}$, 10 и 30 раз. Идея модуля как образующей некое гармоническое единство системы связанных с пропорциями человеческого тела числовых величин здесь пока только смутно просматривается. Но уже ясно, что основные пропорции и положения человеческого тела, не говоря уж о его “тонкой структуре”, никак не укладываются на одной-единственной шкале, строящейся по правилу третьего члена. Поэтому в полном варианте модуль, называемый иногда модулем II, содержит две шкалы: красную и синюю, деления которой вдвое крупнее делений красной шкалы.

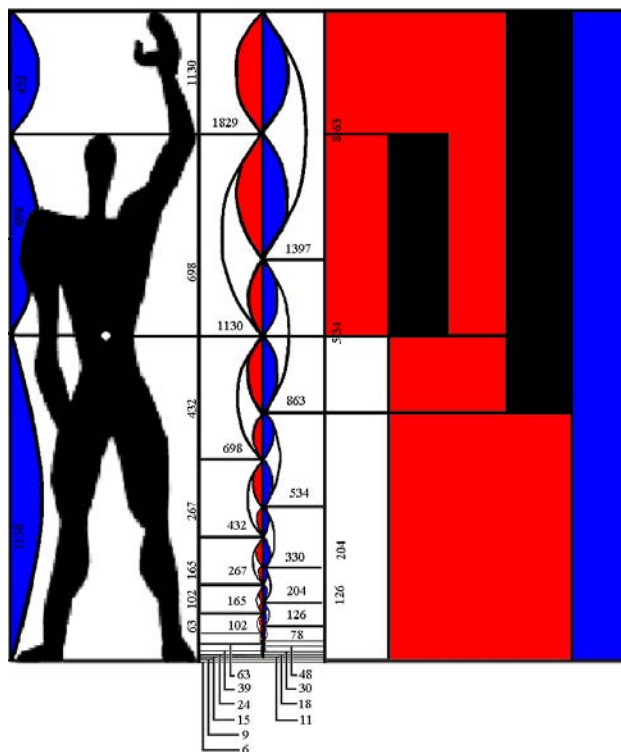


Рис 7.6.2

Модуль II и пропорции человеческого тела

Даны 24 числа, представляющих в общей сложности четыре десятка величин. Крайняя левая, синяя шкала состоит из размерных (в миллиметрах) чисел 432, 698, 1130, дающих в сумме 2260, то есть длину тела с поднятой рукой. Остальные четыре шкалы, для удобства пронумерованные слева направо цифрами II–V, приведены в таблице.

Таблица 7.6
Четыре шкалы модулора

N	Числовой ряд, мм													
II	63	102	165	267	432	698								
III	6	9	15	24	39	63	102	165	267	432	698	1130	1829	
IV	11	18	30	48	78	126	204	330	534	863	1397			
V	126	204	330	534	863									

Здесь нет в явном виде ни чисел Фибоначчи ни тем более константы ϕ , но все целочисленные последовательности построены по закону третьего члена (несколько отклонений на 1 мм, связанных с возникающими при округлении нецелых чисел погрешностями, не в счёт), а это и есть решающее условие. Соотношение между двумя величинами a_k и a_m ($k < m$) любой из пяти указанных шкал или любой другой непосредственно на рисунке не обозначенной шкалы модулора можно с помощью функции $R(x)$ округления действительного числа x до ближайшего целого числа и с учётом сделанной оговорки о погрешностях округления записать в таком виде:

$$a_k = R(a_m \phi^{k-m}) \quad (7.6.3)$$

Если в третьей например шкале взять $a_3 = 15$ и $a_{11} = 698$, то в справедливости равенства $15 = R(698 \phi^{-8})$ нетрудно убедиться хотя бы прямой проверкой. Имея два начальных члена a_1 и a_2 числового ряда шкалы модулора, можно на основе **общей формулы (5.6.3)** и с той же оговоркой о возможных погрешностях округления найти общую формулу для любой величины a_n :

$$a_n = a_1 F_{n-2} + a_2 F_{n-1} \quad (7.6.4)$$

Например для той же третьей шкалы, в которой $a_1 = 6$ и $a_2 = 9$, соотношение

$$a_{11} = a_1 F_9 + a_2 F_{10} = a_1 F_{n-2} + a_2 F_{n-1}$$

выполняется с точностью до единицы: $6 \cdot 34 + 9 \cdot 55 = 699 = a_{11} + 1$. Следовательно, в основу модулора как универсальной по идее системы чисел, связанных в частности с пропорциями человеческого тела, действительно положен принцип золотой пропорции в форме правила третьего члена, неизменными спутниками которого являются числа Фибоначчи и константа ϕ , использованная также по устоявшейся традиции для определения основной точки деления (пупом) тела на две неравные части.

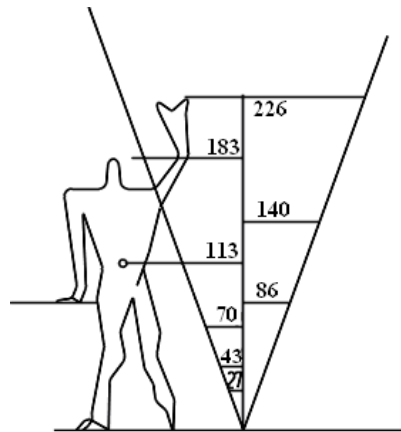


Рис. 7.6.3

Двушкальная схема модулора

В упрощенном, содержащем лишь две шкалы варианте модулора в качестве основных величин взяты 113 см для красной шкалы и вдвое больше 226 см для синей. Нетрудно заметить, что по правилу третьего члена построен и левый числовой ряд ($27 + 43 = 70$, $43 + 70 = 113$, $70 + 113 = 183$) и правый ($86 + 140 = 226$). Хотя метр как десятиmillionная часть четверти парижского меридиана – чисто французское изобретение, повсеместно применяемое в научной практике, здесь единицей измерения (роста человека) служат не франко-геоцентрические

метры, а английские антропоморфные футы, переведённые всё же в привычные сантиметры. Понятно, что ни метр с миллиметрами и десятичной системой счисления ни фут с английской системой мер длины для математически точного моделирования по модулю не приспособлены; для этой цели больше подошла бы основанная на последовательности Фибоначчи золотая математика с такой единицей измерения длины – назовем её для краткости *ле*, – при которой рост в шесть футов, равный 1828,8 мм, был бы равен, скажем, 2584 ($= F_{18}$) *ле*. Но в концептуальном плане важна, конечно, не единица измерения, не конкретные шесть футов и даже не система счисления, а принцип образования последовательности чисел, характеризующих пропорции человека по двухшкальной системе.

Обозначив рост человека отвлеченным числовым символом *l* и используя функцию округления *R*, можно представить красную шкалу на рисунке в виде убывающей последовательности

$$l, R(l\phi^{-1}), R(l\phi^{-2}), R(l\phi^{-3}), R(l\phi^{-4})$$

а синюю как последовательность

$$R(2l\phi^{-1}), R(2l\phi^{-2}), R(2l\phi^{-3})$$

Всё это перекликается со многими построениями, известными из истории золотой пропорции. Так, сам Ле Корбюзье – большой почитатель золотого сечения – полагал, что в рельефе из храма Сети I (фараона XIX династии, правил в 1290–1279 гг. до н.э.) в Абидосе, изображающем его отца, фараона Рамзеса I, пропорции фигур соответствуют золотому сечению. Задолго до этого, во времена III династии (27 в. до н.э.) в гробнице архитектора, врача и писца Хесира есть его изображение на рельефе деревянной доски, где он держит в руках измерительные инструменты, в которых, как считают, зафиксированы пропорции золотого сечения. А в работе [Шмелёв 1993] утверждается, что золотые пропорции обнаруживаются при математическом анализе этой и трёх других сохранившихся деревянных резных панелей из того же захоронения.

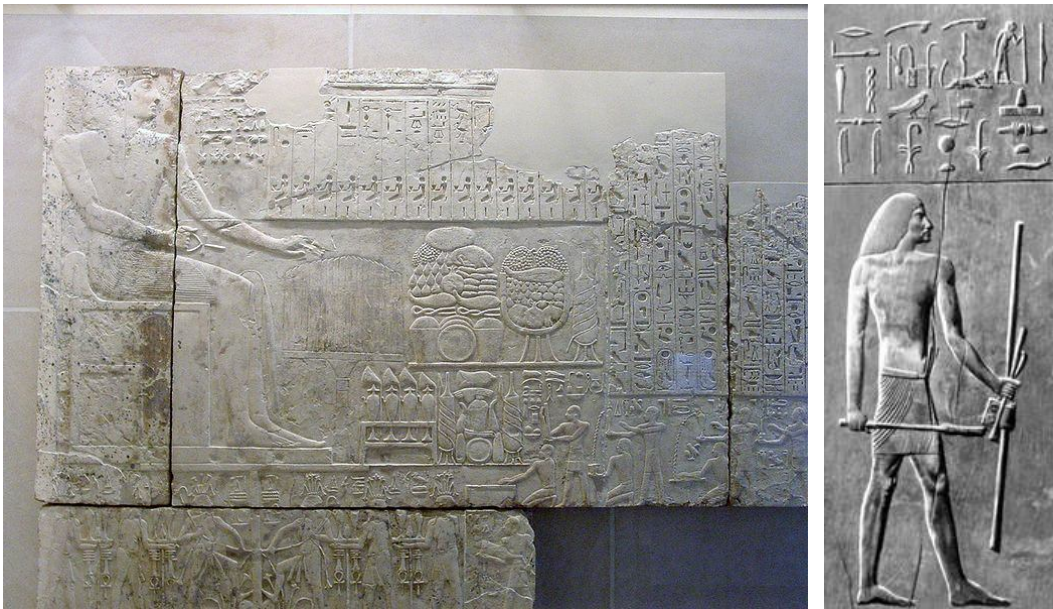


Рис. 7.6.4

Рельеф с изображением Рамзеса I из храма Сети I и Хесиара с измерительными инструментами в руках

В сущности Ле Корбюзье возродил, продолжил и развил на новом уровне идеи своих многочисленных исторических предшественников, стремясь полнее использовать такие особенности золотой пропорции как её обусловленность правилом третьего члена, связь с числами Фибоначчи, аддитивное свойство. Что касается точности соответствия оригинала идее, то обычный человек, видимо, скроен по модулю Ле Корбюзье не больше чем по Дорифору Поликлета.

7.7. Золотое число в физике. Фракталы

Всякая реалья, претендующая на роль универсального принципа мировой гармонии, должна по идее работать на всех уровнях организации материального мира. Принцип золотого сечения, как уникальная математическая конструкция и естественное начало, положенное в основу оптимизации, самоорганизации, формообразования и т.п. различных природных явлений, не должен составлять исключения. В конце 2010 г. появилось вызвавшее большой интерес сообщение [Coldea *et al.*] об обнаружении скрытой симметрии и

золотого сечения в микромире. В аннотации к статье, которую дадим в близком к оригиналу изложении и с небольшими сокращениями, сказано, что при нулевой температуре между различными фазами вещества имеют место квантовые фазовые переходы. При этом вблизи точки перехода могут возникать экзотические квантовые симметрии, определяющие спектр возбуждённых состояний системы. Появление вблизи критической точки цепочки Изинга симметрии, описываемой группой Ли E_8 со спектром из восьми частиц, было давно предсказано. Соответствующая система экспериментально реализована посредством сильного поперечного магнитного поля с целью настройки ферромагнетика CoNb_2O_6 (ниобат кобальта) по его критической точке. Чуть ниже критического значения поля спиновая динамика показывает тонкую структуру с двумя резкими пиками при низких энергиях в соотношении близком к золотому сечению, предсказанному для первых двух мезонов спектра E_8 .

Фактически речь идёт о магнитном резонансе с двумя энергиями (частотами), из которых одна больше другой приблизительно в ϕ раз, а также об обнаружении в квантовом мире ранее предсказанной группы E_8 . Данные, касающиеся отношения m_2/m_1 резонансных частот в области низких энергий при индукции магнитного поля около 5 тесла, причём погрешность измерения в статье не указана. Впрочем, о сходимости отношения энергий m_2/m_1 к золотому числу лучше судить по оригиналу, особенно по рисунку D.

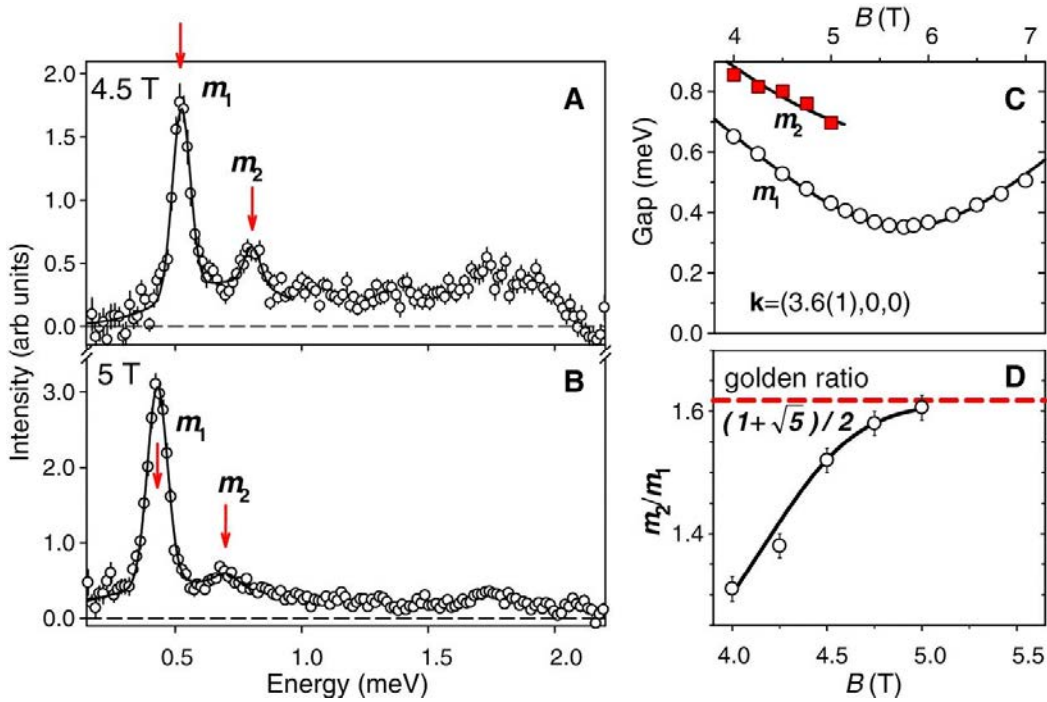


Рис. 7.7.1

Сходимость отношения m_2/m_1 к золотому числу

Можно полагать, что экспериментальное исследование, хотя бы для подтверждения и уточнения полученных данных, будет продолжено с использованием уже более сильных магнитных полей. Что же касается группы Ли E_8 , то это история с продолжением. Заметим, что группа E_8 имеет ранг 8, размерность 248 и 240 векторов корневой системы, порядок (число элементов) $192 \cdot 10! = 696\,729\,600$. Геометрическим образом группы E_8 служит показанный на рисунке граф многогранника, в котором 240 черных точек, по 30 на каждой из восьми концентрических окружностей, соответствуют векторам корневой системы. В восьмимерном евклидовом пространстве, где E_8 задаётся как множество векторов с квадратом длины равным 2, все координаты выражаются нулем, единицей или одной второй. При этом, как нетрудно подсчитать, “целочисленная” группа $(\pm 1, \pm 1, \pm 0, \pm 0, \pm 0, \pm 0, \pm 0, \pm 0)$ содержит $4 \cdot (8 \cdot 7/2) = 112$ восьмимерных координат, а группа полуцелых значений $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$ состоит из $1/2 \cdot 2^8 = 128$ координат [E_8]. Здесь, как видим, в отличие от додекаэдра, правильного и усеченного икосаэдра, ни одна из 240 восьмимерных координатных точек, ни одно из $8 \times 240 = 1920$ чисел золотым не является. Знаменателен однако сам факт соотношения известной группы E_8 с константой ϕ и если полученные в указанном экспериментальном исследовании данные окончательно подтвердятся, можно будет говорить о присутствии принципа золотого сечения в области квантовых явлений микромира.

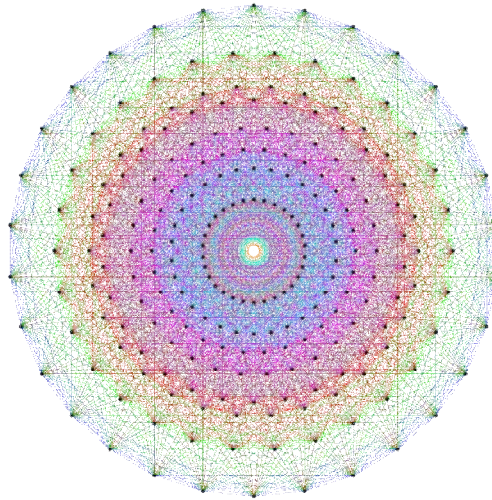


Рис. 7.7.2

Граф многогранника E_8

Группа Ли E_8 , точнее произведение $E_8 \otimes E_8$ имеющее $248 \cdot 2 = 496$ размерностей, наряду с константой ϕ и размерностью Хаусдорфа нашла применение в предложенной Эль Наше теории E infinity, призванной обобщить общую теорию относительности Эйнштейна. Для описания пространства-времени требуется, по мысли автора, математический аппарат теорий нелинейных систем, сложности и хаоса. Это по сути геометрия фракталов, сводимая к континуальному множеству Кантора, которое используется в качестве модели квантово-механического пространства-времени [El Naschie 2004; Marec-Crnjac]. Хотя построенное особым методом из канторовых множеств пространство-время E infinity имеет бесконечную размерность, эта бесконечность иерархична. В области низких энергий топологическая размерность равна 4, а самое для нас интересное связано с размерностью Хаусдорфа. Так вот, согласно теореме Маулдина–Вильямса [Mauldin and Williams; Mauldin] размерность Хаусдорфа для достаточно общего случая случайного канторова множества выражается числом $\phi^{-1} = 0,618\ 0339\dots$. Этот интересный сам по себе результат используется в формуле

$$\langle \text{Dim } E - \infty \rangle_{\text{H}} = \sum_0^{\infty} n (d_c^{(0)})^n$$

определяющей размерности Хаусдорфа пространства-времени теории E infinity. Поскольку $d_c^0 = \phi^{-1}$, бесконечная сумма

$$\langle \text{Dim } E - \infty \rangle_{\text{H}} = 0 \cdot \phi^0 + 1 \cdot \phi^{-1} + 2 \cdot \phi^{-2} + 3 \cdot \phi^{-3} + 4 \cdot \phi^{-4} + \dots$$

в силу особенностей золотого числа равна $4 + \phi^{-3} = \phi^3 = 2\phi + 1 = 4,236\ 067\dots$, а в виде непрерывной дроби

$$\langle d_c \rangle \equiv \langle \text{Dim } E - \infty \rangle_{\text{H}} = 4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}}$$


Посредством исключительной группы Ли $E_8 \otimes E_8$ определяется объём пространства-времени в теории E infinity, но особая роль здесь отводится константе ϕ^{-1} (в разных степенях) и размерности $\langle d_c \rangle \equiv 4 + \phi^{-3}$. Эти и некоторые вспомогательные величины используются при решении, относящихся к теории струн проблем, для определения численных значений постоянной тонкой структуры, констант взаимодействия электрослабого и гравитационного взаимодействий, масс элементарных частиц различных типов, включая кварки, лептоны, мезоны, нуклоны и другие адроны, векторные бозоны, гипотетические частицы Хиггса. Фактически это попытка “озолотить” значительную часть физической теории, однако хорошего соответствия между теоретическими результатами, см. [El Naschie 2004, 228–229], и наиболее точными экспериментальными данными [Fundamental Physical Constants] нет.

Золотые числа появляются и при нетрадиционном анализе результатов опыта, поставленного ещё Т. Юнгом более двух веков назад. Как известно, прохождение пучка фотонов или других микрочастиц через две узкие щели в непрозрачном экране даёт интерференционную картину на проекционном экране, установленном позади первого. Заметим по поводу, что понимание опыта Юнга как доказательство корпускулярно-волнового дуализма представляет сегодня лишь исторический интерес. В квантовой физике адекватное описание состояния

частицы даётся комплексной ψ -функцией, которая является, напомним, проявлением свойств материнской функции экспоненты в области квантовых явлений. А интерпретация микрообъекта как частицы или волны – не более чем попытка свести, притом весьма приблизительно, лишённую наглядности физическую величину к знакомым классическим понятиям. Как бы то ни было, стоит задача определить вероятность прохождения щелей и анализ ситуации с позиций теории E infinity, то есть с помощью геометрии основанной на канторовских трансфинитных множествах, приводит к довольно неожиданному результату. Вероятность прохождения первой щели оказывается равной $\phi^{-1} = 0,618\ 0339\dots$, а второй щели $\phi^{-2} = 0,381\ 966\dots$ [El Naschie 1995; 2005].


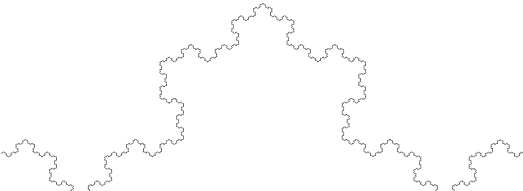
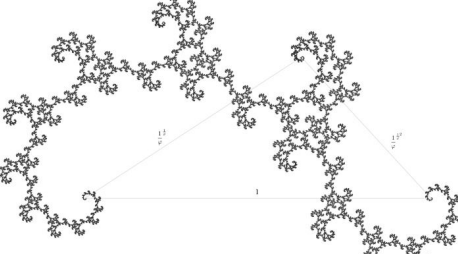
Канторово множество само по себе есть пример простейшего фрактала, бесконечного множества точек евклидова пространства с размерностью Хаусдорфа равной $\ln 2/\ln 3$. Геометрически фрактал это самоподобная фигура, каждый фрагмент которой с уменьшением масштаба повторяет предыдущий фрагмент. Подобное воспроизводство начальной геометрической формы с уменьшающимися в определённой пропорции размерами нетрудно заметить на примере фрактала канторова множества.

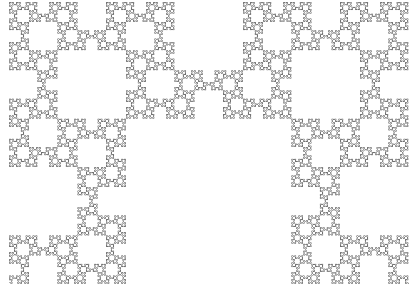
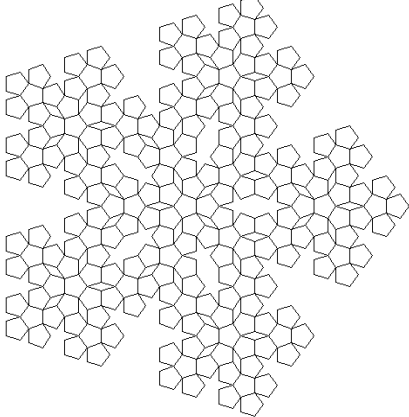
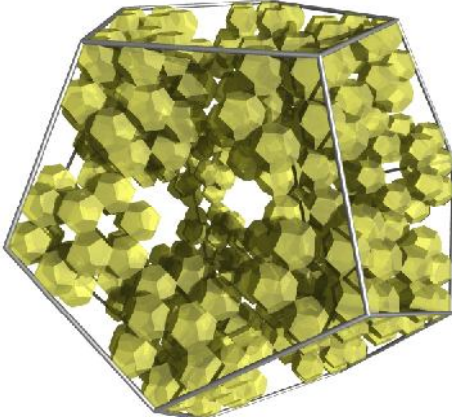
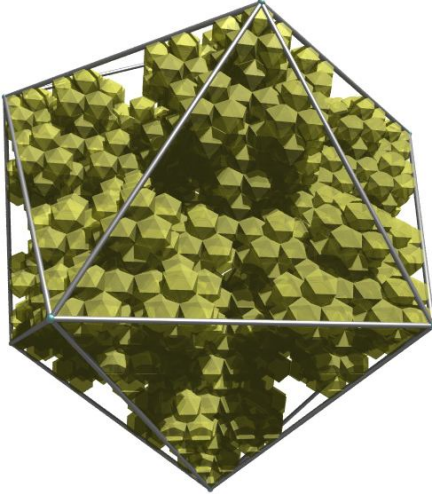
Таблица 7.7.1
Фрактал канторова множества

Название фрактала и размерность Хаусдорфа	Десятичное значение	Иллюстрация
Канторово множество $\frac{\ln 2}{\ln 3}$	0,694 241...	

Среди несметного разнообразия фракталов нам в данном контексте интересны только те, что связаны с константой ϕ . Список известных “золотых”, или лучше сказать “позолоченных” фракталов [List of fractals by Hausdorff dimension] приведём без каких-либо комментариев; стоит лишь отметить, что как и в случае канторова множества размерность Хаусдорфа каждой из них выражается с помощью материнской функции логарифма.

Таблица 7.7.2
Фракталы связанные с золотым сечением

Название фрактала и размерность Хаусдорфа	Десятичное значение	Иллюстрация
Асимметричное канторово множество $\frac{\ln \phi}{\ln 2} = \frac{\ln(1 + \sqrt{5})}{\ln 2}$	0,694 241...	
Фрактал Фибоначчиева слова 60° $3 \frac{\ln \phi}{\ln \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right)}$	1,208 302...	
Золотой дракон $\frac{\ln \phi}{\ln \sqrt{\phi}} = \phi$	1,618 033...	

<p>Фрактал Фибоначчиева слова</p> $3 \frac{\ln \phi}{\ln(1 + \sqrt{2})}$	<p>1,637 938...</p>	
<p>Пятиугольные хлопья</p> $\frac{\ln 6}{\ln(1 + \phi)}$	<p>1,861 715...</p>	
<p>Фрактал додекаэдра</p> $\frac{\ln 20}{\ln(2 + \phi)}$	<p>2,329 621...</p>	
<p>Фрактал икосаэдра</p> $\frac{\ln 12}{\ln(1 + \phi)}$	<p>2,581 926...</p>	

7.8. “Золотая” пестрая смесь

Число ϕ и ряд Фибоначчи нашли применение и в теории музыки [Сабанеев; Ю.Ф.В.; Лоцев; Norden] при числовом анализе тех произведений, например Баха [Siegele] или “Кармен” Бизе [Конюс, 35], где сочетание звуков обеспечивает наибольшее благозвучие, оказывается самым приятным для слуха. Исследовав 1770 музыкальных произведений, Л.Сабанеев обнаружил золотое сечение примерно в трёх произведениях из четырёх, а всего наблюдалось 3275 случаев применения золотого сечения, присутствующего почти во всех произведениях Бетховена – 97%, Гайдна – 97%, Шопена – 92%, Моцарта – 91%, Шуберта – 91%, Скрябина – 90%. По работе [Haylock] числа ϕ^{-1} и ϕ^{-2} обнаруживаются при анализе структуры пятой симфонии Бетховена. А анализ многих сонат Моцарта согласно [May] показал, что почти все они делятся на две части золотым сечением, см. также [Putz]. Предполагается даже, что сделано это вполне сознательно, поскольку Моцарт по словам его сестры был очарован красотой математики и любил играть с числами. Имеются также исследования золотой пропорции в произведениях Бартока [Lendvai; Lowman 1971a], Дебюсси [Howat 1983], Шуберта [Howat 1998] и других композиторов, а также в народной, старинной [Larson] и современной музыке [Lowman 1971], см. также [Garland] и особенно [Madden] – с множеством указанных там источников по золотому сечению в музыке. Если же говорить о музыкальных инструментах, например о скрипке, то, судя по рисункам, она вполне может считаться “золотой” [Mathematicians Pictures; Music and the Fibonacci Series].

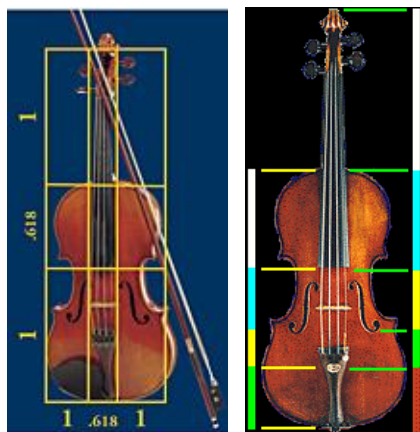


Рис 7.8.1

Скрипка как инструмент золотого сечения

Добавим сюда и утверждения о сознательном использовании чисел Фибоначчи в “Энеиде” Вергилия и стихах римских поэтов того периода [Duckworth], о золотом сечении в произведениях Шиллера, Толстого, Лермонтова [Розенов], в фильме “Броненосец Потёмкин”. О последнем случае лучше судить по словам самого С.Эйзенштейна – большого, кстати, любителя золотой пропорции: “... в «Потёмкине» не только каждая отдельная часть его, но весь фильм в целом, и при этом в обоих его кульминациях – в точке полной неподвижности и в точке максимального взлёта, — самым строгим образом следует закону золотого сечения – закону строя органических явлений природы” [Эйзенштейн]. Утверждается также “изобилие” золотого сечения в поэзии Пушкина (в качестве примера анализируются “взятые наугад” отрывки из “Руслана и Людмилы” и “Полтавы”), его наличие в “работах подлинно великих мастеров реализма”, в частности в картине В.И. Сурикова “Боярыня Морозова” [там же].

Есть, конечно, труды более общего характера, посвящённые применению золотой пропорции и чисел Фибоначчи в искусстве в целом, – помимо упомянутых в разделах 5.1 и 5.10 работ см. [Read; Linn]. Если судить по этим работам, можно прийти к заключению, что наиболее пылкие почитатели золотой пропорции готовы применять положенный в её основу принцип ко многим ограниченными определённым промежутком времени видам деятельности, в особенности творческой. Выходит, сочиняя симфонию, делая научный доклад, читая лекцию, произнося речь, составляя программу концерта, рассказывая о себе и т.д. и т.п., надо непременно использовать этот принцип, чтобы достичь максимального эффекта, предельно сильного воздействия на аудиторию. Читая, например, рассчитанную ровно на час лекцию с разоблачением шарлатанских приемов мнимого выявления золотой пропорции в сомнительных случаях, следует пустить свои самые острые стрелы на кульминационной, “золотой” для часового выступления тридцать седьмой минуте. Берите высокие ноты и на пятой, девятой, четырнадцатой, двадцать третьей минуте, поскольку в данном случае именно последовательность 5, 9, 14, 23, 37 является золотой.

Зададимся теперь несколько неожиданным вопросом: что общего между подробно рассмотренной в предыдущей главе **большой пирамидой Хеопса** и термодинамическим равновесием? Такая не совсем корректная постановка вопроса скорее рассчитана на то, чтобы привлечь внимание, поэтому сразу поясним, что

речь фактически идёт об особенностях прямоугольного треугольника, один из углов которого равен $\approx 51^\circ 50'$. Это тот угол наклона граней к основанию, который придаёт особо привлекательный вид большой пирамиде и, по-видимому, обеспечивает её повышенную устойчивость. В подобном треугольнике, мы знаем, отношение меньшего катета к большему равно $1 : \sqrt{\phi}$ (если только не $1 : 4/\pi$), а отношение гипотенузы к меньшему катету выражается числом ϕ (рис. 6.2.5). Четыре таких треугольника образуют ромб с отношением диагоналей равным $\sqrt{\phi}$, который можно условно назвать пирамидально-золотым в отличие от просто золотого ромба с отношением диагоналей равным ϕ (рис. 5.2.2). Наконец, посредством двух таких ромбов – малого и большого, у которого меньший катет например треугольника IOC равен большему катету треугольника AOC , – можно образовать пирамидально-золотой эллипс с фокусами, расположенными в вершинах малого ромба.

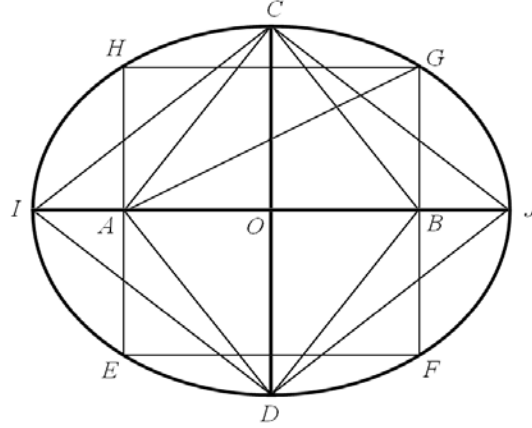


Рис. 7.8.2

Пирамидально-золотой эллипс

Если фокусное расстояние AB эллипса принять равным 2, то длина $AC + CB = AG + GB$ и длина большой оси IJ равны 2ϕ . В силу построения данного эллипса, в частности из подобия образующих малый и большой ромбы треугольников следуют соотношения

$$CB : CJ = OB : OC = OC : OJ = 1 : \sqrt{\phi}$$

которым в работе [Grzedzielski] придаётся особое значение. Утверждается, без должного впрочем математического обоснования, что это соотношение “выражает пропорцию термодинамического равновесия в оптических кристаллах и создаёт оптимальные условия для достижения фотонами фокусов с минимальными энергетическими потерями”. В любом случае эллипс, в основу построения которого фактически положен угол в $\approx 51^\circ 50'$, не лишён интереса, а свойства пирамиды с таким углом наклона граней до конца ещё не изучены.

Явные проявления принципа золотой пропорции, нередко в форме соотносённости с рядом Фибоначчи, встречаются у разных животных, см. [Стахов¹]. Живым воплощением классического определения золотого сечения в отрезках может служить обыкновенная стрекоза, у которой отношение общей длины к длине хвоста равно отношению длины хвоста к длине корпуса. Точками, указанными на рисунке, тело ящерицы делится в пропорции близкой к $1 : \phi : \phi^2 : \phi^3$.

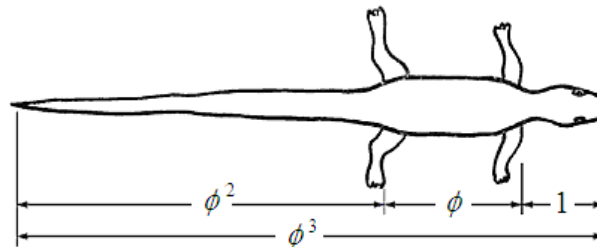


Рис. 7.8.3

Золотые пропорции тела ящерицы

Несколько золотых прямоугольников выявляется при анализе по глазкам рисунка на крыльях одной из разновидностей бабочки. Если к стати оставить только прямоугольники и раскрасить их соответствующим образом, можно получить нечто отдаленно напоминающее картины Мондриана из раздела 5.2.

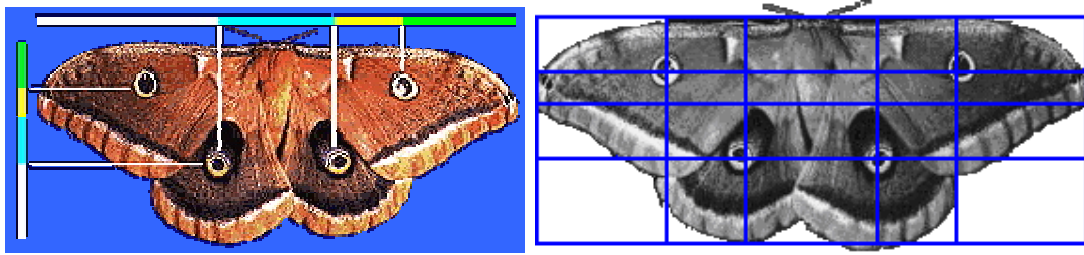


Рис. 7.8.4

Золотые пропорции, выявляемые у бабочки

Золотые пропорции, точнее пропорции близкие к золотым, можно при желании во множестве обнаруживать у самых разных представителей животного мира.

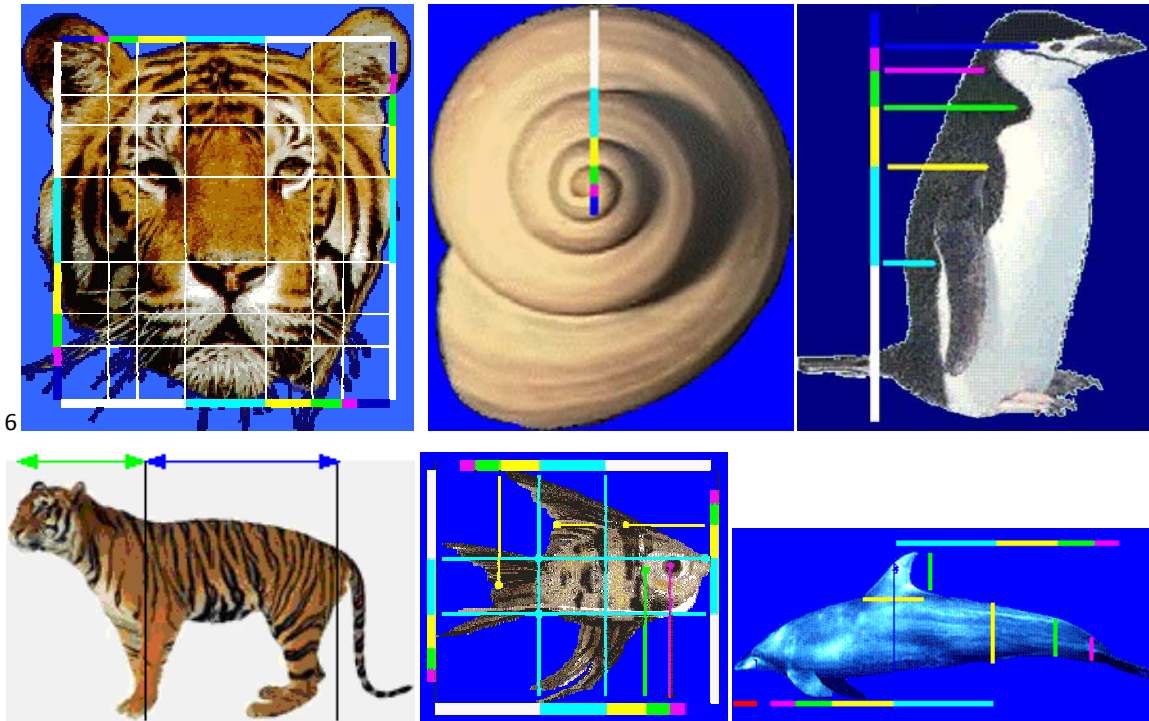


Рис 7.8.5

Золотые пропорции в животном мире

Считается, что скорлупа птичьего яйца особенно прочна, если яйцо вписывается в прямоугольник золотого сечения либо в прямоугольник с отношением длин сторон $\sqrt{\phi} : 1$, и такие яйца в природе не редкость.

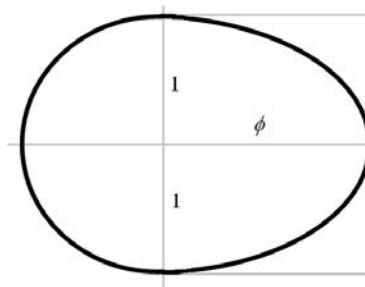


Рис 7.8.6

Золотое яйцо птицы

У многих членистоногих число 5 (которое, надо признать, слишком мало, чтобы жестко связывать его с последовательностью Фибоначчи) характеризует количество сегментов на груди, перьев на хвосте, частей ног. У мечехвоста 5 пар конечностей, столько же шипов на брюшке и сегментов на груди; у лангуста 5 пар ног и 5 перьев на хвосте, каждая нога состоит из 5 частей, а брюшко из 5 сегментов. Впрочем, встречаются и более убедительные 8 и 13, например скорпион наряду с пятью парами конечностей и пятью сегментами на хвосте имеет 8 сегментов на брюшке, а панцирь краба состоит из 13 пластин. Более, очевидно, весомы, в смысле соотносённости с рядом Фибоначчи, данные, относящиеся к представителям животного мира более высокого уровня организации. В панцире черепахи 13 роговых пластин, из них 5 в центре и 8 по краям, 34 позвонка содержится в позвоночнике; столько же позвонков у гигантского оленя и, кто бы мог подумать, у человека. Числом 55 определяется количество роговых пластин у гавиалового крокодила с Малайского архипелага, темных пятен на теле кавказской носатой гадюки, позвонков у кита и у многих домашних животных, 144 позвонка насчитали в скелете габонской гадюки. Количество пар зубов у домашних животных близко или равно 21, у гиены их 34, а у одного из видов дельфинов равно 233 ($= F_{13}$). Есть также данные о том, что эволюция живых организмов может происходить путём, так сказать, последовательного продвижения вверх по ряду Фибоначчи, а значит и приближения к золотому числу. Например, вначале у ихтиозавра, рыбаощера мезозойской эры количество расположенных в 3 ряда костей в конечностях было равно 34 (F_4, F_9), затем в процессе эволюции и в связи с переходом от наземной жизни к водной ихтиозавр улучшил оба своих фибоначчевых показателя на единицу: 55 костей в 5 рядов (F_5, F_{10}), хотя от вымирания это его не спасло. Может показаться, что подобный подбор данных служит определённой цели, носит предвзятый характер. В какой-то мере так оно и есть, но вместе с тем трудно отрицать определённое тяготение в животном мире к золотой пропорции и числам Фибоначчи.

Более убедительны случаи проявления принципа золотой пропорции, доставляемые ботаникой [Church 1904; 1968; Гика; d'Arcy Thompson; Жуковский; Вейль; Davis 1970; 1971]. Так, количество ветвей при переходе с одного уровня дерева на другой может меняться “по Фибоначчи”, образуя, как это показано на рисунке, последовательность 1, 2, 3, 5, 8, 13.

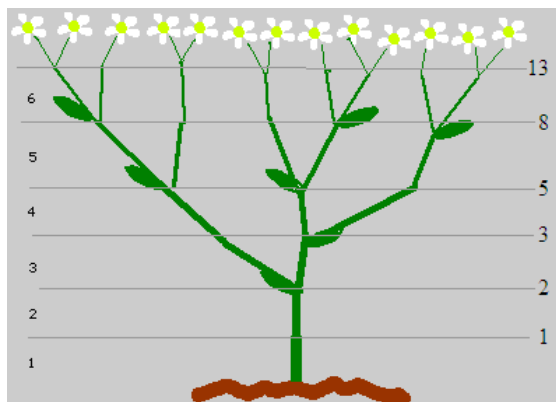


Рис. 7.8.7

Количество ветвей на разных уровнях от поверхности земли

По 3 лепестка имеют ирис, триллиум и лилия (у лилии часто 6 лепестков, образующих 2 группы по 3 лепестка в каждой), 5 – лютики, дикая роза, живокость, водосбор, 8 – дельфиниум. Ещё более впечатляет соответствие двузначным числам Фибоначчи: 13 лепестков имеют календула, крестовник луговой, цинерария, 21 цикорий, астра, 34 подорожник, 55 или даже 89 лепестков маргаритки и некоторые виды астры (наряду с 21 и 34). Чаше встречаются, конечно, числа отличные от F_n , и в этом смысле действие принципа золотого сечения в мире растений не универсально. Однако сам факт его ограниченного присутствия не вызывает здесь особых сомнений, тем более что есть и другие значительные факты.

Семена и цветки многих растений расположены по двум противоположно направленным дугам, близким по форме к логарифмической спирали. Количества семян в спиралях различных растений образуют пары 5 и 3, 13 и 8, 21 и 13, 34 и 21, 89 и 55, 144 и 89 и даже 233 и 144. Всё это числа из ряда Фибоначчи, причём отношение $233/144$ для последней пары отличается от значения ϕ лишь на две соты тысячи. Установлено, что при отношении $144/89 = F_{12}/F_{11}$ количества семян в спиралях подсолнуха достигается наиболее высокая урожайность этой культуры. Принцип золотой пропорции, реализуемый в этом примере дважды: в форме расположения элементов (близкая к золотой логарифмическая спираль, см. рис. 6.8.5) и в самом количестве элементов (числа Фибоначчи), приводит, как видим, к максимальному результату. Более того, количество спиралей (как в одном, так и в другом направлении), естественно неодинаково в цветочных головках различных растений, часто, хоть и не всегда соотносится с числами Фибоначчи.

Далее известно, что соседние листья на ветке дерева образуют некий постоянный для данного вида угол, называемый углом расхождения. Этот угол сохраняется и в расположении веток, почек, цветов и так далее, так что он как бы константа данного вида растений. Угол расхождения выражается дробью, которая показывает, какую часть окружности он составляет. Самыми распространенными считают углы

$$1/2, 1/3, 2/5, 3/8, 5/13, 8/21, 13/34, \dots$$

Числители и знаменатели дробей, каждая в отдельности, выстраиваются во всё тот же ряд Фибоначчи, сама же последовательность дробей стремится к значению ϕ^{-2} .

Более того, на поверхности утолщающихся веток или стеблей листья растений располагаются по спирали, близкой к логарифмической. Трёхмерная спираль и ряд Фибоначчи – таков обычно наблюдаемый вариант филлотаксиса (*листорасположения* в переводе с греческого). Литература по филлотаксису и смежным вопросам, по *математике* филлотаксиса довольно обширна, причём некоторые относительно старые труды [Cook; d'Arcy Thompson] переизданы. Наряду с публикациями недавнего прошлого [Richards; Leppik; Coxeter 1953; 1969 ch. 11; 1972; Stevens; Vogel; Steinhaus], см. также список в предыдущем абзаце, немало работ и последних лет [Dixon; Jean 1992; 1994; Stewart 1995; 1995a; Conway and Guy 1995; Prusinkiewicz and Lindenmayer; Adler, Barabe, Jean]. Относительно трёхмерной спирали, являющейся обобщением *двухмерной плоской спирали* (с сохранением большинства её свойств), всё вроде бы ясно: сохранение формы и других ранее рассмотренных для плоской спирали параметров. Что касается чисел Фибоначчи, то достаточно разумное понимание получено и здесь. Ещё в позапрошлом столетии догадывались о том, что наиболее оптимальное и не зависящее от размеров растения расположение листьев достигается лишь при строго определённых углах расхождения. В частности, именно при таких углах каждый лист в наименьшей степени затемняет нижние листья и затемняется верхними; эти углы наиболее благоприятны и для того чтобы дождевые капли стекали назад вдоль листа, а затем вниз по стеблю к корням растения. Аналогичная закономерность наблюдается в расположении семян некоторых растений. Сравнительно недавно было получено строгое математическое доказательство утверждения о существовании определённых углов, обеспечивающих оптимальный, не зависящий от начальных размеров и дальнейшего роста вариант “упаковки” [Douady and Couder]. Возникает вопрос: почему в филлотаксисе природа предпочла числа Фибоначчи, то есть подходящие дроби константы ϕ , а не допустим подходящие дроби констант π или e ? Если коротко, то ответ сводится к тому, что выражение

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

определяет, *мы знаем*, наиболее медленно сходящуюся цепную дробь и в этом смысле число ϕ является “наилучшим” среди всех иррациональных чисел. Нельзя, конечно, забывать, что во многих случаях в растениях реализуются и другие числовые последовательности. Среди них связанный с рядом Фибоначчи ряд Люка и другие неординарные последовательности чисел вроде 3, 1, 4, 5, 9, ... , или 5, 2, 7, 9, 16, ... [Coxeter 1961, 172], отличающиеся от рядов F_n и L_n начальными членами, но тоже соответствующие *правилу третьего члена*. Живая природа многообразна и наряду с золотой пропорцией в ней немало числовых отношений менее благородного происхождения. Очевидно, принцип золотой пропорции может считаться весьма распространенным, но отнюдь не универсальным законом организации растительного мира. Кроме указанных выше работ по золотой пропорции и числам Фибоначчи в ботанике и биологии вообще см. также [Basin; Hunter and Madachy; Land; Brousseau; Jean 1976; 1984; 1986; Braun; Sutton].

Нельзя не заметить, что пламенный энтузиазм “золотоискателей” с одной стороны способствует выявлению всё новых областей и случаев действия принципа золотого сечения, но с другой нередко даёт весьма произвольные толкования, подгоняя факты под заранее известную схему. Берётся, к примеру, поверхность Земли, более 70 % которой покрыто мировым океаном, так что на долю суши приходится менее 30%. Нехорошее отношение $\approx 0,7$ можно, однако, исправить, приблизив к идеальному $\approx 0,618$, если... вычесть из площади океана площадь всех морей. А вопрос о том, насколько правомерно вычитание площади морей, являющихся частью мирового океана, должен считаться неуместным и не ставиться, поскольку он портит полученное столь дорогим способом золотое отношение. Или чего стоит утверждение о глубокой будто бы связи между числами Фибоначчи и сакральным числом буддизма 108, выявляемой соотношением $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 108$. Приходится с сожалением признать, что профанация идеи, попытка любыми средствами подогнать всё и вся под золотое число или его многочисленные гомологи, под числа Фибоначчи весьма характерна для некоторых пылких обожателей золотой пропорции. Если учесть, что ровно половина – пять чисел первого десятка включая 1, 2, 3, 5, 8 являются членами последовательности Фибоначчи, возможностей для этого более чем достаточно. Одна голова, одна шея, одно сердце, два уха, два глаза, две руки, пять пальцев и т. д. и т. п. – вот, оказывается, свидетельство того, что человек это носитель гармонии “по Фибоначчи”.

Более любопытен пример, связанный с особыми точками Земли как вращающегося вокруг своей оси сфероида. Эти точки – северный и южный полюса, пересекающие воображаемую ось земного вращения. Расстояние между ними поделено на 180 географических градусов: 90° северной широты и 90° южной широты. Между двумя полюсами, в каждом из полушарий, находится “золотая широта” и утверждается [Кааба и “золотое сечение”], что именно на одной из них расположен священный город Мекка с мусульманской святыней – Чёрным камнем. Посмотрим, насколько это соответствует действительности. Искомую широту легко найти из уравнения $\frac{90+x}{90-x} = \phi$; отсюда $x = \frac{90(\phi-1)}{1+\phi} = 21^{\circ}14'46''$, что действительно довольно близко,

но всё же не совпадает с широтой Мекки $21^{\circ}25'21''$ (координаты самой Каабы $21^{\circ}25'21,02''$) [Мекка; Black Stone]. Разница в $13'35''$ означает относительное отклонение $\approx 1\%$, или 13,6 географических миль в единицах длины, а значит “золотая широта” пролегает приблизительно в 25 с небольшим километрах к югу от Мекки.

Количество всевозможных числовых отношений в мире несметно и в этом практически необозримом множестве более или менее значимых отношений можно отыскать, по крайней мере с определённой степенью точности, всё, что придёт в голову. Повторяя сказанное в разделе 7.5, считаем не лишним ещё раз отметить, что близость какого-либо отношения к числу ϕ или его производным, на практике как правило не очень высокая, сама по себе мало о чём говорит. Не всё ведь золото, что блестит, не всякое близкое к 1,62 число – золотое; в нашем случае для признания подлинности требуется нечто большее чем близость числовых значений. Игнорировать числовое совпадение с порога, конечно, не следует, но по большому счёту природное число только тогда вправе считаться истинно значимой, непосредственно связанной с математической константой или известной числовой последовательностью величиной, когда её появление обусловлено действием универсальных принципов, в данном случае принципа золотого сечения. Приводящий к появлению константы механизм не всегда, понятно, выявляется так просто и однозначно как в случае филлотаксиса, являющегося следствием принципа золотого сечения в форме закона оптимальной упаковки, или в случае роста раковины по золотой логарифмической спирали с сохранением важнейших параметров. Но нет в сущности другого способа утвердить в правах заслуживающую внимания научную гипотезу, кроме как выявить глубокую математическую основу появления данных чисел или обнаружить соответствующий полуэмпирический закон, на худой конец эмпирическую закономерность. Не первичен впрочем и сам принцип золотого сечения: он лишь частное проявление неких особенностей фундаментальной математической первоосновы, изложенной в Части I. В установлении связи между математической первоосновой и золотыми числами, в построении с этих позиций обобщённой теории золотого сечения (ОТЗС) и состоит, напомним, главная цель настоящей Части II, и мы намного медленнее чем хотелось бы, но неуклонно к ней приближаемся.

Для большей полноты изложения список ранее указанных исследований мы дополним другими трудами, расположенными хронологически в каждом из шести тематических разделов, хотя в некоторых случаях отнесение данной работы к тому или иному разделу весьма условно. Работы общего характера – [Colman; Coxeter and Greitzer; Runion; Hoggatt; Le Lionnais; Wells 1986; 1991; Ogilvy and Anderson; Ogilvy; Hilton and Pedersen 1991; Markowsky; Walser; Conway and Guy 1996; Dunlap; Reid; Herz-Fischler; Hilton, Holton, and Pedersen]; с историческим уклоном – [Horadam; Boulger; Livio]; сугубо математические исследования – [Brook; Graham; Halton; Jean and Johnson; Schroeder; Varnadore; Reiter; Young; Bondarenko; Guy 1994; Hilton and Pedersen 1994; Devaney; Johnson R.C.; Ram]; программирование – [Wrench; Graham, Knuth; Séroul; Trott]; проявления в природе, искусстве и т. д. – [Zylinski; Hoffer; Williams; Wahl; Canright; Boles and Newman; Garland and Kahn; van Zanten]; игры и развлечения – [Gardner 1961; 1969; 1979; 1994; Pappas; Pegg]. “Золотая лихорадка” получила особенно широкое распространение именно в последние десятилетия.

Помимо указанных выше примеров поиск (и обнаружение – с той или иной степенью достоверности) различных проявлений принципа золотой пропорции коснулся стольких областей, что и далеко не полное перечисление соответствующих источников только на русском достаточно красноречиво: филлотаксис [Боднар]; критические уровни в развитии биологических систем [Жирмунский и Кузьмин]; компьютеры Фибоначчи [Стахов 1974]; системная устойчивость и максимальная энтропия [Владимиров, Стахов]; структурная гармония систем [Сороко]; физиологические ритмы и эргономические параметры в деятельности человеческого организма [Коробко, Коробко]; астрономия и архитектура [Лебедев и др.]; фундаментальная психология [Лефевр]; музыкальная гамма [Очинский]; биосимметрия высших порядков и геноматрицы [Петухов 1981; 2006]; термодинамика, цикл Карно [Попков, Шипицын]; денатурация гемогената высших растений [Радюк]; диагностика и лечение некоторых форм острых заболеваний [Симонян]; структура, состав и продуктивность почвенного покрова [Степанов И.Н.]; поэзия Руставели [Церетели]; политика [Степанов А.И., гл.3]; изучение скелетов человека и животных, в том числе ископаемых [Шапоренко и Лужецкий]; физика твердого тела [Шипицын, Попков]; психология восприятия и формообразования живой природы [Шмелёв 1990]; различные аспекты теории золотого сечения [Василенко]. Особого внимания заслуживают многочисленные публикации в рамках “Международного клуба золотого сечения”, освещающие самые различные стороны многоугольного принципа золотого сечения. Список членов клуба с выходом на их личные страницы см. на сайте [Международный клуб золотого сечения](#), а деятельность самого клуба и планы на будущее подробно представлены в работе [Стахов⁴].

В работе [Шмелёв 1990, 260] содержится перечень тех “отраслей знания, где в том или ином виде золотое сечение обнаруживает свое присутствие.

1. Растительные и животные организмы.
2. Пропорции тела и органов человека.
3. Биоритмы головного мозга.
4. Компоненты генного аппарата человека и животных.
5. Строения почвенного и плодородного слоя.
6. Планетарные системы.
7. Энергетические взаимодействия на уровне элементарных частиц.
8. Аналоговые ЭВМ.
9. Темперированный звукоряд.
10. Произведения всех видов искусства, включая архитектуру.”

Несмотря на широкий охват “отраслей знания”, где по мысли автора выявлена золотая пропорция, данный список, да и любая другая попытка подобного рода, исчерпывающе полным считаться не может. Не указана в частности (возможно, в силу очевидности) чистая и прикладная математика, являющаяся поставщиком наиболее точных и надёжных сведений о принципе золотой пропорции, который проявляется здесь, мы знаем, при решении задач на экстремум, см. также [Johnson S.M.], на оптимум, в соотношениях с ФМК и МК и т.д. Не представлена, во всяком случае виде явно, обширная область психологических исследований включая работы по эстетике золотой пропорции, упомянутые в разделе 6.3. Сюда надо добавить и различные области физической реальности [Arneodo *et al.*; Wlodarski] включая мегамир и квазикристаллы, ...

Разумеется, нельзя объять необъятное, тем более, что “золотой” реестр постоянно пополняется всё новыми данными, причём неодинаковой, как обычно, степени достоинства и уровня надёжности. Что касается перспектив на будущее, о них можно судить, например, по обширному перечню “следующих «Золотых» проектов современной науки и культуры”, источником которых может стать *Математика Гармонии*, которая “является новой междисциплинарной теорией современной науки”. 1. Теория вероятностей. 2. Теория чисел. 3. Теория измерения. 4. Теория систем счисления. 5. Теория элементарных функций. 6. Теория чисел Фибоначчи. 7. Теория матриц. 8. Физика, кристаллография, астрономия. 9. Ботаника. 10. Биология. 11. Медицина. 12. Компьютеры. 13. Измерительные системы. 14. Системы связи. 15. Философия. 16. Психология. 17. Триалектика. 18. Технология структурно сложных продуктов. 19. Экономика и системный анализ. 20. Музей Гармонии и Золотого Сечения. 21. Наука о Гармонии Систем [Стахов³].

7.9. Принцип золотого сечения и ядра атомов

Наряду с рассмотренными выше областями физического мира перспективной сферой приложения принципа золотого сечения может стать и ядерная физика, в частности ядра атомов. Эта интересная тема, заслуживающая отдельного обсуждения, к которому мы сейчас приступаем; будут изложены имеющиеся результаты и собственные изыскания [Аракелян]. Известно, что в расположении химических элементов, разбитых в периодической системе Менделеева на группы и подгруппы, наблюдаются закономерности в чередовании и повторяемости свойств элементов. Анализ “чередования подгрупповых свойств” методами “качественной симметрии” даёт основание М.А.Маругаеву говорить о глубокой аналогии с общепринятым в музыке звукорядом (чистым строем), который по его теории “выражает золотое сечение”. Утверждается также, что “предлагаемая теория связывает в одну все три, поставленные современной наукой и считающимися различными проблемы: нарушенная симметрия, число 137 и золотое сечение” [Маругаев 1978; 1990]. Согласовать числовые выкладки автора с новейшими измерениями постоянной α^{-1} невозможно, но знаменательна сама попытка применения принципа золотого сечения к периодической системе элементов, как и стремление связать число ϕ с константой α^{-1} . Об обнаружении чисел Фибоначчи в периодической системе элементов Менделеева утверждается в работе [Шило, Динков].

Перейдем теперь к нуждающемуся в предварительном пояснении вопросу стабильности ядер и соотношения между числом протонов и нейтронов. Ядра атомов за исключением водорода и в какой-то мере водородоподобных атомов представляют собой довольно сложные системы, поэтому применение фундаментальных физических принципов и законов нередко наталкивается здесь на огромные трудности и оказывается малоэффективным. Кроме того природа и механизмы сил, удерживающих нуклоны в ядре, ещё недостаточно изучены. Существует целый ряд конкурирующих полуэмпирических моделей ядра, см. например гл. III в [Широков, Юдин], каждая со своими достоинствами и недостатками, но в рамках ни одной из них не удалось достичь достаточно точных и относящихся ко всему ряду химических элементов предсказаний насчёт оптимального, обеспечивающего наибольшую устойчивость числа нейтронов N или массового числа $A = N + Z$ при заданном числе протонов Z . Есть, правда, независимая от конкретных модельных допущений и считающаяся почти универсальной

полуэмпирическая формула Вейцеккера, которая устанавливает зависимость энергии связи $E_{св}$ ядра от Z и A . Она обычно записывается в виде

$$E_{св}(A, Z) = \varepsilon A - \alpha A^{2/3} - \beta Z^2 A^{-1/3} - \gamma \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + \sigma(A, Z) \quad (7.9.1)$$

где $\sigma(A, Z)$ поправочный член, а ε , α , β , γ эмпирически подобранные постоянные. Слагаемое $\sigma(A, Z)$ зависит от четности A и Z :

$$\sigma(A, Z) = \begin{cases} 33,57 A^{-3/4} \text{ МэВ} & \text{четные } A \text{ и } Z \\ 0 & \text{нечетное } A \\ -33,57 A^{-3/4} \text{ МэВ} & \text{четное } A, \text{ нечетное } Z \end{cases}$$

Для постоянных параметров применяются разные наборы значений, например по [Шапиро, 922] наилучшее согласие с экспериментом достигается при

$$\varepsilon = 14,03 \text{ МэВ}, \quad \alpha = 13,03 \text{ МэВ}, \quad \beta = 0,5835 \text{ МэВ}, \quad \gamma = 77,25 \text{ МэВ}$$

хотя есть немало других вариантов. Формула (7.9.1) даёт неплохое приближение для энергий связи устойчивых ядер, но в случаях, когда Z и/или N равно одному из магических чисел ядерной физики: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, расхождение с опытом оказывается довольно значительным, до одного процента, см. [Широков, Юдин, 42–43]. Пользуясь формулой Вейцеккера, можно найти интересующую нас связь между Z и A (или N) для стабильных ядер. Определяя максимум функции $E(Z)$, то есть приравнявая к нулю производную $\partial E(Z)/\partial Z$, придём к формуле

$$Z = \frac{A}{1,98 + 0,015 A^{2/3}} \quad (7.9.2)$$

которой обычно и пользуются при расчётах. Для испытания на точность формулы (7.9.2) возьмём ядра элементов, расположенные в разных частях периодической таблицы; удобства ради лучше брать элементы, имеющие единственный нестабильный изотоп, поскольку приводимые в периодической таблице атомные массы этих элементов очень близки к целочисленным значениям их массовых чисел A , что значительно упрощает сравнение. При $A = 9$ (бериллий) получим $Z = 4,4$ вместо 4; при $A = 27$ (алюминий) $Z = 12,77$, что довольно близко к истинному значению 13; при $A = 133$ (цезий) $Z = 56,098$ – на единицу больше порядкового номера цезия, наконец при $A = 232$ (торий) $Z = 91,11$ вместо 90. Следовательно, формула (7.9.2), не учитывающая некоторые тонкие эффекты квантовомеханического характера, хорошо аппроксимирует одни ядра и значительно хуже другие, особенно с большими порядковыми номерами Z .

Таким образом, решая вопрос оптимального – обеспечивающего наибольшую стабильность по отношению к распаду – числа нейтронов при заданном значении Z , нельзя опереться ни на “высокую теорию” ни на ядерные модели ни на полуэмпирическую формулу. Первая обычно успешно применяется к системам с крайне ограниченным либо с очень большим числом элементов, а поскольку ядра тяжелых элементов не относятся ни к тем ни к другим, теория здесь мало эффективна. Что касается формулы Вейцеккера, то мы имели возможность убедиться, что в области больших Z она работает неважно и содержит слишком много подгоночных, к тому же далеко не однозначно определяемых параметров. Но есть другая, бесхитростная и вполне надёжная основа. Это опытные данные для отношений N/Z и $A/Z = 1 + N/Z$, которые могут сослужить нам добрую службу. К настоящему времени обнаружены в природе или получены опытным путём первые 118 элементов периодической системы (последние шесть элементов официально пока не признаны и не названы), причём последние несколько элементов синтезированы недавно в Дубне [Oganessian *et al.* 2000–2003; Heavy Elements – Element 114] с участием Ливерморской лаборатории при получении 114-го и 116-го элементов [Patin *et al.*]. Кстати, поступившие в 1999 г. из Беркли известия о получении 116-го и 118-го элементов оказались ложными, после чего разразился небывалый скандал с обвинениями в фальсификации данных и проч., см. [Лесков]. На имеющиеся сто восемнадцать элементов приходится несколько тысяч стабильных и нестабильных изотопов, поэтому для каждого Z естественно брать среднее взвешенное значение N , или атомную массу (атомный вес) $\bar{A} = Z + \bar{N}$, усредненные по всем изотопам, другими словами табличные значения \bar{A} тех элементов, для которых они известны, см. [Pure Appl. Chem.; Winter M.]. Однако и здесь есть свои трудности, связанные с отсутствием стабильных изотопов, или хотя бы изотопов с большим, исчисляемым годами временем жизни τ у многих элементов, особенно с большими номерами Z . Стабильных изотопов нет уже у полученных искусственным путём технеция ($Z = 43$) и прометия ($Z = 61$), а все элементы с $Z > 82$ радиоактивны. Только у трёх тяжелых радиоактивных элементов – тория ($Z = 90$), протактиния ($Z = 91$) и урана ($Z = 92$) определены их атомные массы; во всех остальных случаях в таблицах приводятся массовые числа наиболее долгоживущих (среди обнаруженных, а не принципиально возможных) изотопов данного химического элемента. Учитывая это обстоятельство, следует опираться лишь на относительно надёжные данные. Откладывая по оси абсцисс значения Z , а по оси

ординат соответствующие значения \bar{N}/Z и соединяя точки прямыми, получим график с характерными для ядерной физики всплесками.



Рис. 7.9.1

Зависимость \bar{N}/Z от Z

С изменением Z от 2 до 92 кривая, неравномерно возрастая, меняется в пределах от 1 до 1,59 и приближается к прямой $\bar{N}/Z = \phi$. Точно такую же форму имеет график функции $\bar{A}/Z = 1 + \bar{N}/Z$, достигающий значения 2,59 при $Z = 92$. Данные в эмпирически относительно малоизученной области от $Z = 93$ до $Z = 118$, особенно для последних элементов, слишком неполны и неточны, чтобы можно было на них опереться. Может быть поэтому ход кривой в этом интервале, её неожиданное “падение” не согласуется с наблюдаемой для остального интервала тенденцией приближаться к прямой $y = \phi$. В любом случае возникают серьёзные сомнения в обоснованности предположения, что кривая $\bar{N}(Z)$ с ростом Z стремится к числу ϕ , а кривая $\bar{A}(Z)$ к ϕ^2 . Единственное, о чем можно с уверенностью утверждать на основе имеющихся данных, это опережающий рост числа нейтронов по сравнению с протонами, а значит увеличение в целом, хоть и весьма неравномерное, отношения \bar{N}/Z по мере увеличения Z . Качественная природа данного явления находит разумное объяснение в ядерной физике, но точный количественный анализ на глубоком теоретическом уровне провести не удаётся. Ряд из сотни членов сам по себе не настолько велик, а число 1,59 и $\phi \approx 1,62$ не настолько близки друг к другу, чтобы делать однозначное заключение с далеко идущими выводами.

Если однако прибегнуть к экстраполяции, опирающейся на предсказания теории, принцип золотого сечения, похоже, подтверждается и приобретает конкретное содержание. В последние десятилетия интенсивно обсуждалась возможность существования “острова стабильности” в районе $Z_{\text{ст}} = 114$, см. например [Поликанов]. Теоретические расчёты, проведенные несколькими исследовательскими группами, неизменно давали число 114 как одно из магических чисел физики ядра, при наличии которых нейтронные оболочки ядер целиком заполнены, вследствие чего барьер деления таких ядер выше чем у соседних и они обладают повышенной устойчивостью [Münzenberg *et al.*; Перельгин, Стеценко; Ghiorso *et al.*]. В свете того, что радиоактивный распад ядра и связанная с золотым сечением логарифмическая спираль описываются дифференциальными уравнениями первой степени типа $z' = az$, точнее

$$dy/dx = -y, \quad dr/d\theta = kr$$

данное совпадение хоть и не находит исчерпывающего объяснения, но не выглядит случайным. Время жизни 114-го элемента относительно спонтанного деления согласно имеющимся, экспериментально частично подтверждённым оценкам очень велико для трансурановых элементов, тем более с таким большим атомным номером. Что касается количества нейтронов $N_{\text{ст}}$ элемента с $Z_{\text{ст}} = 114$, то и оно выражается магическим числом 184, следовательно это ядро дважды магическое; кстати говоря, формально это химический аналог свинца, отсюда необычная для столь тяжелого элемента устойчивость. Но если умножить 114 на ϕ , ближайшим к полученному результату целым числом окажется как раз число 184! Таким образом, отношения $N_{\text{ст}}/Z_{\text{ст}} = 184/114$ и $A_{\text{ст}}/Z_{\text{ст}} = 298/114$ равны ϕ и ϕ^2 с точностью, которая вообще достижима для данного $Z_{\text{ст}}$:

$$N_{\text{ст}} = R(\phi Z_{\text{ст}}) = 184 \tag{7.9.3}$$

$$A_{\text{ст}} = R(\phi N_{\text{ст}}) = R(\phi^2 Z_{\text{ст}}) = 298 \tag{7.9.4}$$

Если сумму $A = N + Z$ геометрически представить отрезком меняющейся в зависимости от Z длины и с переменной точкой $x = N/Z$, производящей сечение этого отрезка, то с увеличением Z сечение всё ближе к золотому, а при $Z_{\text{ст}} = 114$ с относительным отклонением $\sigma \approx 0,0025$ становится золотым.

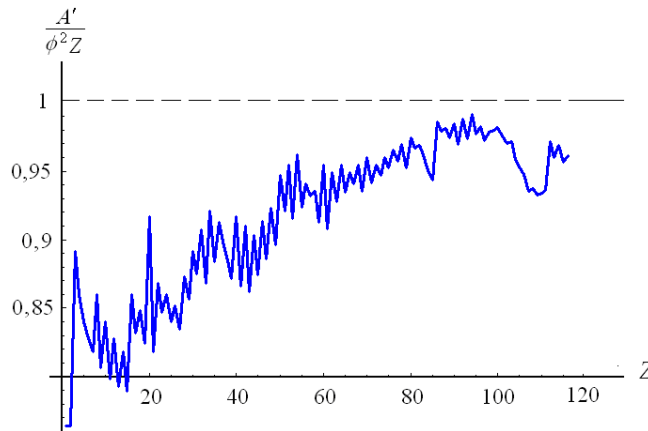


Рис. 7.9.2

График зависимости функции $A'/\phi^2 Z$ от Z

Вместо взвешенного среднего \bar{A} возьмём теперь величину A' – массовое число самого тяжелого среди всех стабильных изотопов данного элемента; в случае отсутствия таковых условимся понимать под A' массовое число изотопа, имеющего наибольший период полураспада, – см. например таблицу изотопов в [Широков, Юдин, 695–709]. Из рисунка 7.9.2 видно, что экстраполяция по средней линии пиков и впадин кривой $\frac{A'}{\phi^2 Z}(Z)$ (если только исключить последний, крайне пока ненадёжный участок кривой) приводит к значению $Z_{\text{ст}} = 114$, для которого значение ординаты очень близко к единице.

Степень отклоненности A' от золотой пропорции удобно оценить для данного Z и в целых числах. Округляя $\phi^2 Z$ до ближайшего целого числа функцией $R(x)$ и соединяя прямыми соответствующие целочисленные значения $R(\phi^2 Z) - A'$, получим в общем сходную с параболой кривую, пересекающую с теми же, что выше, оговорками ось абсцисс во всё той же магической точке $Z_{\text{ст}} = 114$.

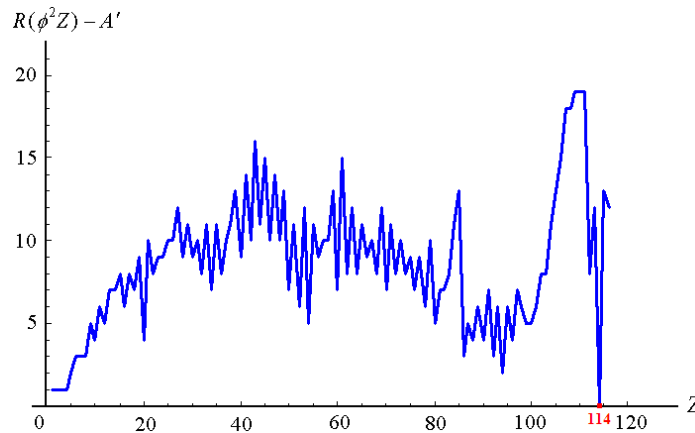


Рис. 7.9.3

График зависимости функции $R(\phi^2 Z) - A'$ от Z

Пики и впадины, не говоря уж о малоизученной области больших значений Z , конечно, “путают карты” и лишь реальное обнаружение сверхстабильного элемента с $Z = 114$ и $A = 298$ наряду с намного более полным знанием изотопов тех элементов, для которых $Z > 100$, поможет расставить точки над и в данном вопросе. На основе предположений о существовании пика “острова стабильности” и роли константы ϕ в периодической системе химических элементов, а также приведённых выше кривых можно допустить, что рано или поздно будут обнаружены тяжелые изотопы сверхтяжелых элементов и ход кривой на последнем участке станет куда более

плавным. Если с учётом этого провести аналитическую аппроксимацию последней экспериментальной кривой по средним точкам, то придём к уравнению

$$y = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2Z_0} = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x}{2Z_0} \right), \quad 1 \leq x \leq Z_0 \quad (7.9.5)$$

где Z_0 обозначает точку $x = 114$, в которой функция $y = \overline{\phi^2 Z - A'}$ обращается в нуль. Это уравнение параболы, ограниченной точкой $x = 1$ и “золотой” точкой $x = 114$, в которой по предположению $R(\bar{N}/Z - \phi) = 0$.

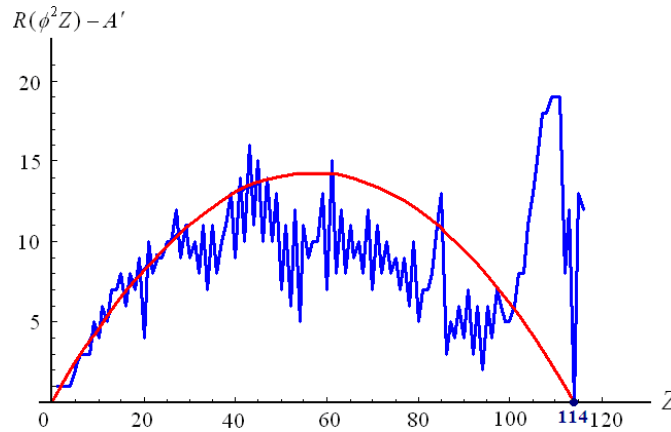


Рис. 7.9.4

Аппроксимация функции $R(\phi^2 Z) - A'$ посредством параболы

Парабола – кривая весьма распространенного вида движения в природе, по параболической траектории движется например снаряд, выпущенный из орудия, по параболе падает тело, имеющее отличную от нуля горизонтальную составляющую начальной скорости. Параболическая траектория вообще характерна для движения тел под действием гравитационной и электрической сил, меняющихся, как известно, по закону обратных квадратов. Если уравнение (7.9.5) найдет когда-нибудь более серьёзное эмпирическое подтверждение, можно будет говорить о “параболическом законе стабильности” ядер химических элементов, означаемом, что в первом приближении отклонение отношения N/Z для наиболее стабильных изотопов от золотой пропорции описывается уравнением параболы типа

$$y = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{aZ_0}$$

с фундаментальной константой 2 в качестве множителя a .

Гипотетическое уравнение (7.9.5), как и все четыре приведённых выше графика, особенно последние два, подводят к заключению, что при экспериментальном подтверждении существования “острова стабильности” с вершиной в точке $Z = 114$ и $A = 298$, принцип золотой пропорции распространится на силы, удерживающие нуклоны в ядре, в качестве условия, отвечающего наиболее устойчивым состояниям. Остаётся неясным, есть ли число ϕ некое предельное соотношение для всего ряда химических элементов или же особая “точка стабильности”, ограничивающая более стабильные элементы от менее стабильных. Между тем не имеющий пока утвержденного названия и обозначаемый как Uuq 114-ый элемент экспериментально получен наряду с 116-ым в Дубне в конце 1998 года [Оганесян]. К настоящему времени (середина 2011 г.) получены изотопы элемента Uuq с атомными номерами 285–289, далекими ещё от Uuq²⁹⁸, синтез которого связан с большими трудностями. При этом, по мере приближения к пику $A = 298$ период полураспада увеличивается с 0,13 с до 2,6 с и есть неподтвержденные пока данные о синтезе изомера Uuq²⁸⁹ с $T_{1/2} = 66$ с [Ununquadium]. В любом случае открытие теоретически предсказанного ещё несколько десятилетия назад “острова стабильности” следует считать состоявшимся фактом. Весь вопрос теперь в том, есть ли на этом чудном острове замечательная “золотая” вершина ${}_{114}\text{Uub}^{298}$ (впрочем, не исключен по некоторым расчётам вариант элемента ${}_{108}\text{Hs}^{283}$ – аналога осмия, также с золотым отношением $283/108 \approx \phi^2$) с периодом полураспада порядка 10 минут, если не больше? Ответ на этот вопрос, возможно, будет получен уже в недалеком будущем.

Исходя из сказанного, можно сделать общий вывод, что во многих случаях оптимальная согласованность частей целого, максимальная уравновешенность, устойчивость, стабильность системы реализуется в принципе золотой пропорции и выражается числом ϕ и его гомологами. За новыми подтверждениями перейдем в область чистой математики и её приложений.

7.10. Принцип золотого сечения в математике

Число ϕ часто встречается при решении задач, связанных с применением экстремальных методов нахождения оптимальных решений. Изложение этих вопросов технически довольно сложно, поэтому ограничимся краткими комментариями и сравнительно простыми примерами. С помощью чисел Фибоначчи доказывается [Матиясевич 1971; 1993] неразрешимость десятой проблемы Гильберта [Гильберт, 39], поставленной как задача нахождения общего метода, позволяющего по любой системе диофантовых уравнений с целочисленными коэффициентами распознать, имеет ли она целочисленное решение. “Метод Фибоначчи” и “метод золотого сечения” применяются при решении определённого типа экстремальных задач [Уайльд], имеющих многочисленные приложения в разных областях науки и техники. Числа Фибоначчи появляются в математической теории поиска, например при проведении специальных математических тестов [Альсведе, Вегенер, 144–150], или при нахождении наиболее экономичной скорости автомобиля, соответствующей минимальному расходу горючего [Воробьев, 115–116], в теории программирования [Кнут], теории вероятностей и так далее.

Уникальные свойства числа ϕ , удивительный мир чисел Фибоначчи отражены в задачах на сообразительность и смекалку, в математических курьёзах, играх и т.п. [Auluck; Gardner 1956; O’Beirne; Deininger; Ball and Coxeter; Guy 1990; Knott^{2,3}]. Вот типичная задача этого рода, решением которой является число Фибоначчи F_n . Надо перейти через ручей по уложенным один за другим в два параллельных ряда n камням, делая каждый шаг на один камень прямо вперёд либо вперёд в сторону. Сколькими способами можно пересечь ручей? Это очень простая задача, но в пёстрой куче математических головоломок можно отыскать и неординарные вещи, требующие достаточно серьёзной исследовательской работы. В качестве примера остановимся на хорошо изученной в теории игр китайской игре цзяньшинцзы [Кордемский, 212–214, 522–523]. Двое играющих поочередно берут камни из двух кучек. Если не трогать одну кучку, то из другой можно брать любое количество камней и даже всю кучку целиком, если же камни берутся сразу из двух кучек, то только по равному количеству из каждой. Таковы правила игры, а выигрывает тот, кому удаётся взять последний камень. Выигрыш в этой игре, где камни можно заменить целыми числами, требует знания чисел золотого сечения и теории ряда Фибоначчи. Математический анализ игры показал, что существуют такие комбинации для количества камней в кучках, когда проигрыш для начинающего неизбежен, если только его противник придерживается правильной стратегии. В принципе достаточно подсчитать количество камней в кучках, чтобы не приступая к самой игре выявить потенциального победителя. Эти комбинации определяются с помощью чисел ϕ и ϕ^2 . Из формул

$$a_n = n\phi, \quad b_n = n\phi^2$$

придавая n значения 1, 2, 3, ... и отбрасывая в числах a_n и b_n их дробные части, получим множество $\{a_n, b_n\}$ камней в кучках:

$$(1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), (8, 13), (9, 15), (11, 18), \dots$$

с которым начинающий игру теоретически проиграет. Во всех остальных случаях выигрыш на его стороне.

Среди бесконечного множества решений трансцендентного уравнения

$$\cos x = \operatorname{tg} x \tag{7.10.1}$$

возьмём наименьший положительный корень $x_1 = 0,66623\ 94334\dots$, которому геометрически соответствует точка пересечения кривой косинуса с кривой главной ветви $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ тангенса. Ни в самом уравнении ни в его решении ничто, казалось бы, на золотое число не указывает, но в действительности иначе, как видно уже из простого соотношения [Raphael]

$$(\operatorname{tg} x_1)^2 = \phi^{-1}$$

Более того, приведя это уравнение к виду

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \tag{7.10.2}$$

легко заметить, что перед нами уравнение типа (5.2.1'), имеющее положительный корень $\sin x_1 = \phi^{-1}$, а отсюда сразу получается и значение корня

$$x_1 = \arcsin \phi^{-1} = 0,66623\dots$$

и значение для тангенса.

Особый интерес для нас представляет выделенный с самого начала в качестве одного из основных вопросов связи между золотой пропорцией и ФМК. Эта связь обычно осуществляется посредством материнских функций экспоненты и логарифма или их комбинаций, в частности с помощью тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Известна выражаемая через арктангенс интересная формула связи между величинами обратными числам F_n [Lehmer 1936; 1938; Trigg; Fib. Quart. 1972]. Подставляя в формулу

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \quad (7.10.3)$$

которую нетрудно получить из известной формулы для суммы двух тангенсов, значения $x = 1/2$, $y = 1/3$ и учитывая, что $\operatorname{tg} 1 = \pi/4$, придём к открытому ещё Эйлером в 1738 г. соотношению

$$\pi/4 = \operatorname{arctg} 1/2 + \operatorname{arctg} 1/3 \quad (7.10.4)$$

Используя теперь правило $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ и формулу (5.9.34'''), получим, что для четных значений $n = 2k$

$$\frac{1}{F_{n+1}} + \frac{1}{F_{n+2}} = \frac{F_{n+1} + F_{n+2}}{F_{n+1}F_{n+2} - 1} = \frac{F_{n+3}}{F_n F_{n+3}} = \frac{1}{F_n}$$

Следовательно, с учётом (7.10.3) имеем такую формулу для арктангенсов обратных значений чисел Фибоначчи:

$$\operatorname{arctg}(1/F_{2k}) = \operatorname{arctg}(1/F_{2k+1}) + \operatorname{arctg}(1/F_{2k+2}) \quad (7.10.5)$$

Это даёт возможность заменить выражение $\operatorname{arctg} 1/3$ на сумму $\operatorname{arctg} 1/5 + \operatorname{arctg} 1/8$, затем $\operatorname{arctg} 1/8$ на сумму $\operatorname{arctg} 1/13 + \operatorname{arctg} 1/21$ и т. д. В итоге

$$\pi/4 = \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) \quad (7.10.6)$$

или в общем случае

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2k}}\right) = \sum_{n=k}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) \quad (7.10.7)$$

Для нечетных значений $n = 2k + 1$ вместо формулы (7.10.7) имеем формулу

$$\operatorname{arctg}(1/F_{2k+1}) = \operatorname{arctg}(1/L_{2k}) + \operatorname{arctg}(1/L_{2k+2}) \quad (7.10.8)$$

с числами Люка вместо чисел Фибоначчи в правой части. Добавим без доказательства ещё несколько формул от себя, интересных тем, что в двух случаях бесконечное суммирование арктангенсов обратных числам F_n приводит к константе π , а в двух аналогичных случаях – к константе ϕ :

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2k-1}}\right) \quad \operatorname{arctg} \phi^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2k-1} + F_{2k+1}}\right) \quad (7.10.9)$$

$$\frac{3\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2k-1}}\right) \quad \operatorname{arctg} \phi = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2k-1} + F_{2k+1}}\right)$$

Кроме того любое положительное число F_k , $k \geq 1$ может быть получено по формуле [Ram]

$$F_k = \sum_{m=1}^k i^{m-1} (1-2i)^{k-m} \binom{2k-m}{m-1} \quad (7.10.10)$$

дважды содержащей ФМК i в выражении под знаком суммирования от единицы до k .

Заслуживает внимания связь между золотым числом и константой $W(1)$, одной из восьми ФМК по теории ЛМФ. Эта связь может быть установлена из сравнения внешне несходных квадратного уравнения (5.2.1) для ϕ и трансцендентного уравнения (2.7.6) для функции Ламберта $W(z)$. Уравнение (5.2.1) с корнями $x_1 = \phi$ и $x_2 = -\phi^{-1} = f(\phi)$ может быть записано в форме

$$x_1 x_2 = \phi \cdot f(\phi) = -1 \quad (7.10.11)$$

то есть в виде произведения константы на функцию от константы, равного -1 . А уравнение Ламберта $W(z) \cdot e^{W(z)} = z$ для значения $z = 1$ имеет такую же форму, только вместо функции f здесь экспонента, вместо константы ϕ константа $W(1)$ и вместо знака минус при единице плюс:

$$W(1) \cdot e^{W(1)} = 1 \quad (7.10.12)$$

Не случайно поэтому константу $W(1)$ относят к разряду чисел “типа золотого сечения” [Lambert W-function].

Одной из наиболее известных аналитических связей чисел Фибоначчи является их соотносённость с биномиальными коэффициентами, с треугольником Паскаля.

Таблица 7.10
Связь между биномиальными коэффициентами и числами Фибоначчи

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1
1	.	1	1
2	.	.	1	2	1
3	.	.	.	1	3	3	1
4	1	4	6	4	1
5	1	5	10	10	5	1	.	.
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21
8	1	8	28	56	70
9	1	9	36	84
10	1	10	45
11	1	11
12	1
Σ	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Сумма коэффициентов в разложении в сумму выражения

$$(a + b)^n, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

равна 2^n для любого $n = 1, 2, \dots$, что вполне тривиально: поскольку формула бинома Ньютона справедлива для любых a и b , она верна и для $a = b = 1$, откуда сразу следует данное утверждение. Но какое это имеет отношение к числам Фибоначчи? Всё дело в том, как располагать биномиальные коэффициенты. Расположив их построчно-диагональным способом, имеем картину, показанную в таблице, в последней строке которой даны суммы по отдельным столбцам, образующие ряд Фибоначчи. Доказательство этого свойства треугольника Паскаля можно найти например в работе [Успенский], а более сложный случай аналитической связи между числами Фибоначчи и биномиальными коэффициентами будет рассмотрен в контексте обобщённой теории золотого сечения.

Один из важнейших способов представления числовой или функциональной последовательности $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ это производящая функция (генератриса), то есть сходящаяся по крайней мере для одного значения $x \neq 0$ функция

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_n x^n + \dots$$

Производящая функция последовательности $\{F_n\}$ достаточно проста:

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \dots$$

(ср. формулу 5.6.11 для чисел Трибоначчи). Функция

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

имеет разрывы в точках $x_1 = -\phi$ и $x_2 = \phi^{-1}$, получаемых как корни уравнения $1 - x - x^2 = 0$; это хорошо знакомое нам уравнение (5.2.3). Таким образом, производящая функция для последовательности чисел $\{F_n\}$ действительно связана и с константой ϕ , а сходится она в интервале $|x| < \phi^{-1}$.

Следующий пример относится к нахождению особых точек функции $y = e^{\sin x}$, заданной в интервале $(-\pi, \pi)$. К числу немногих величин, играющих особую роль при характеристике поведения функции в заданной области, относятся точки перегиба, где вторая производная y'' меняет знак на противоположный. Точек перегиба у данной функции две:

$$y_1 = \arcsin \phi^{-1}, \quad y_2 = e^{\phi^{-1}}$$

Появление ϕ выглядит здесь довольно неожиданным, если иметь в виду традиционное определение золотого сечения и рассмотренные способы (квадратное уравнение, бесконечная непрерывная дробь, ряд Фибоначчи) получения числа ϕ , в которых связь между ним и экспонентой непосредственно не усматривается. Приведённый пример, как и в логарифмическая спираль, содержит прямое указание на такую связь. О том же говорят три диковинные формулы из коллекции Рамануджана [Hardy, 8; Watson; Ramanathan], см. также [Левин, 15], в следующем виде:

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \frac{e^{-8\pi}}{1 + \dots}}}}} = (\sqrt{2 + \phi} - \phi)e^{2\pi/5} \quad (7.10.13)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-8\pi\sqrt{5}}}{1 + \dots}}}}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{(\phi-1)^{5/2} 5^{3/4} - 1}} - \phi \right) e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}} \quad (7.10.14)$$

$$4 \int_0^{\infty} \frac{x e^{-x\sqrt{5}}}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{1}{2} [\zeta(2, \phi/2) - \zeta(2, \phi/2 + 1/2)] \quad (7.10.15)$$

где $\zeta(a, z)$ дзета-функция Гурвица. Такое мог придумать кроме разве Эйлера и Гаусса только Рамануджан с его необыкновенной математической интуицией и *константным видением числового множества*. Познакомившись с этими формулами, Харди писал: “Они поставили меня полностью в тупик; я никогда не видел ничего подобного... Они должны быть верными, так как если бы они были неверны, то ни у кого не хватило бы воображения их изобрести” [Левин, 16]. Формулы эти действительно верны и в них обращает на себя внимание наличие пятерки и особенно числа $\sqrt{5} \equiv 2\phi - 1$. Оно фигурирует и в соотношении для бесконечного ряда [Andrews et al., 58]

$$\frac{2 \ln \phi}{\sqrt{5}} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14} \right) + \dots$$

с любопытным чередованием знаков и опущенными членами типа $1/5k$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Обсуждение роли числа 5, а также 10 в золотом сечении – это всё, что нам осталось сделать перед тем как перейти к последовательному изложению новой теории как приложения теории ЛМФ.

7.11. Плотное заполнение и плитки Пенроуза. Квазикристаллы

Проблема плотного, без пробелов и наложений, заполнения пространства различными геометрическими телами, в особенности правильными многогранниками, относится к разряду сложных, не всегда разрешимых и практически важных вопросов математической теории. В простейшем случае заполнения двумерной плоскости одинаковыми правильными многоугольниками задача имеет решение для квадратов, равносторонних треугольников и шестиугольников, а для остальных n -угольников, включая золотой пятиугольник, она неразрешима. При более общей постановке вопроса – плотное заполнение плоскости *различными* правильными многоугольниками – фигуры золотой пропорции выходят на первый план. Выяснено (Р. Пенроуз), что любую часть плоскости можно целиком заполнить ромбами двух типов: $2\pi/5 = 72^\circ$, $3\pi/5 = 108^\circ$ и “алмазом” с углами $\pi/5 = 36^\circ$, $4\pi/5 = 144^\circ$ [Penrose; Grunbaum and Shephard].

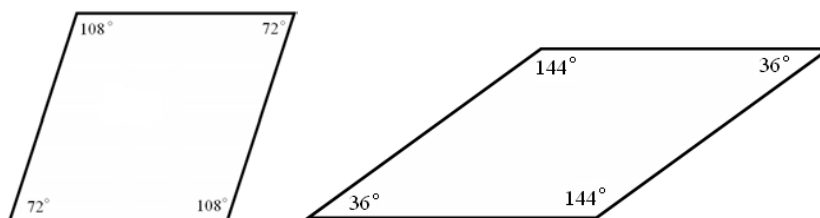


Рис. 7.11.1

Ромбы с углами 36°, 144° и 72°, 108°

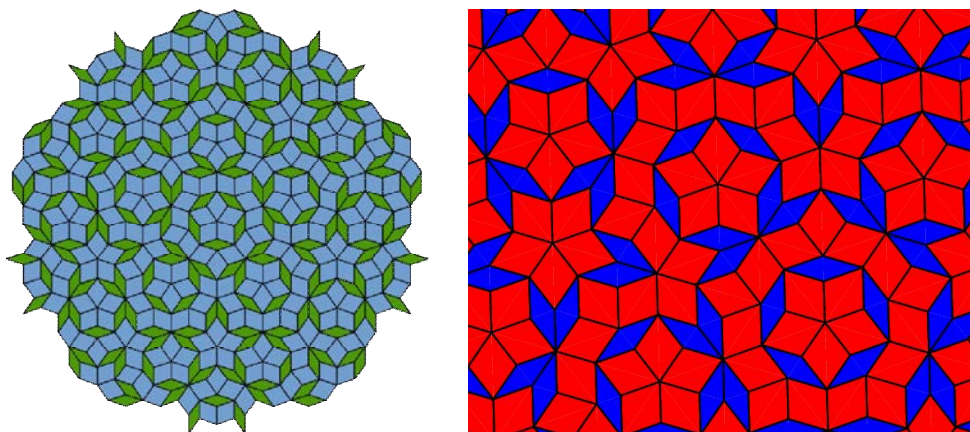


Рис. 7.11.2

Заполнение (P3) плоскости двумя ромбами

Каждый из двух ромбов может быть составлен из показанных на рисунке 6.5.1 золотых треугольников, а все числа типа $n \cdot \pi/5$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) посредством тригонометрических функций связаны, скоро увидим, с константой ϕ , следовательно предложенный Пенроузом способ прямо соотносится с золотым числом. Кроме того, для достаточно большого участка плоскости, заполненного “толстыми” и “тонкими” ромбами их отношение приближается к числу ϕ .

А плотная упаковка трёхмерного пространства осуществляется соответствующими ромбоэдрами [Shechtman *et al.*]. Такая структура относится к твердым телам, которые называются квазикристаллами; в отличие от обычных кристаллов они не образуют кристаллической решетки с периодической повторяемостью структуры трёхмерного расположения атомов. Вместе с тем структура Пенроуза квазипериодична, другими словами на достаточно больших расстояниях повторяются сколь угодно большие её участки. Но главное здесь то, что ромбы или ромбоэдры образуют узор, в котором “можно найти сколь угодно большие фрагменты с симметрией 5-го порядка”, этот “узор обладает симметрией подобия – структура, получаемая удалением определённого набора атомов, отличается от исходной изменением масштаба в $\tau = (\sqrt{5}+1)/2$ ”; кроме того “атомы расположены в определённых плоскостях (в двумерном случае – на линиях), причём расстояние между плоскостями (линиями) может принимать 2 значения, которые чередуются в определённом порядке (связанном с числовым рядом Фибоначчи), отношение этих значений равно τ ” [Левитов].

Однако существующие квазикристаллы, например Al_6Mn , имеют хоть и ромбовидную и тоже “золотую” с симметрией 5-го порядка структуру, но, похоже, несколько иную, см. [Knott⁴]. Грани двух шестигранных ромбоэдров, образующих структуру реально встречающихся в природе квазикристаллов, представляют собой упомянутые в 5.2 “золотые” ромбы, для которых отношение большой диагонали к малой равно ϕ (ср. рис. 5.2.2). В таком ромбе

$$\text{острый угол равен } 2 \arctg \phi^{-1} = 1,10714\ 87177\dots \approx 63,43495^\circ$$

$$\text{тупой угол равен } 2 \arctg \phi = 2,03444\ 39357\dots \approx 116,56506^\circ$$

В зависимости от того, вершина острого или тупого угла (кстати равного двухгранному углу додекаэдра, см. раздел 7.3) образует вершину шестиугольника, возможны два “золотых” ромбоэдра, *вытянутый* вдоль оси и *сплюснутый* (ср. рис. 5.2.3). Чередованием именно двух таких ромбоэдров заполняется любая достаточно большая в масштабах атомного мира часть пространства встречающихся в природе квазикристаллов.

Помимо двух ромбов плоскость может быть замощена без зазоров и перекрываний “воздушными змеями” (kites) и “дротиками” (darts), то есть *плитками Пенроуза* P2, получаемыми показанным на рисунке способом из ромба с углами 72° и 108° .

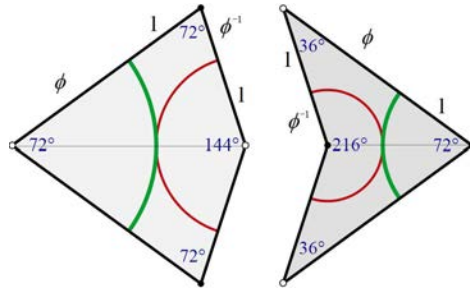


Рис. 7.11.3

Плитки Пенроуза, получаемые из ромба с углами 72° и 108°

Обе плитки явно золотые и нетрудно заметить, что в обоих случаях длины отрезков, выделенные с помощью дуг окружностей, образуют геометрическую прогрессия $\phi^{-1}, 1, \phi, \phi^2 = 1 + \phi$ со знаменателем равным ϕ . С увеличением же площади мозаики отношение змей к дротикам приближается к числу ϕ , которая вообще является константой мозаик Пенроуза и не только.

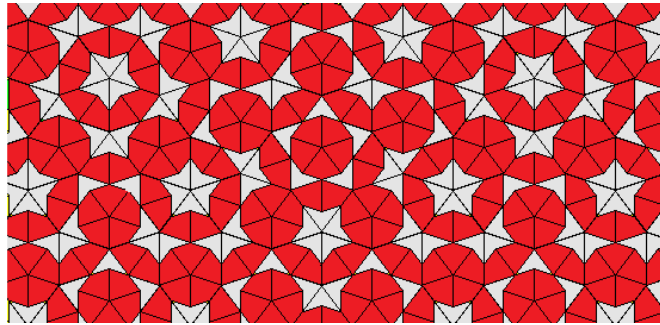


Рис. 7.11.4

Заполнение (P2) плоскости двумя плитками Пенроуза

Перейдём теперь к пятиугольникам, которые в отличие от трёх-, четырёх- и шестиугольников заполняют плоскость с пробелами. А последние, понятно, могут быть разными в зависимости от способа укладки “паркета”. Ещё в 1619 г. Иоганн Кеплер в своем трактате *Harmonices Mundi* (“Учение о гармонии мира”) попытался заполнить эти пробелы пятиконечными звёздами и десятиугольниками [Kepler]. Однако полностью избежать наложений, как видно из рисунка, не удалось.

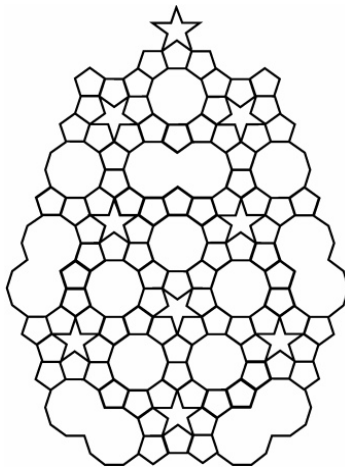


Рис. 7.11.5

Плотное заполнение по Кеплеру

Вдохновленный идеями и построениями Кеплера, а также Дюрера, см. [Luck], Р. Пенроуз в своей первой укладке (P1) получил математическую мозаику, содержащую наряду с пятиугольником следующие три геометрические фигуры: хорошо знакомый нам ромб – с углами 36° и 144° , пятиконечная звезда и неполная звезда, названная Пенроузом *лодкой* (boat) [Penrose tiling]. Это поистине “золотая” мозаика, поскольку все перечисленные здесь фигуры непосредственно связаны с золотым сечением.

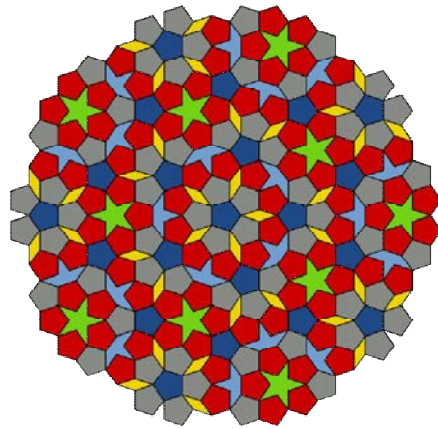


Рис. 7.11.6

Заполнение (P1) плоскости пятиугольником и тремя другими золотыми фигурами

Но самое пожалуй бесхитрое заполнение плоскости пятиугольниками осуществляется выстраиванием их в симметричные ряды с зазорами, заполняемыми тонкими ромбами.

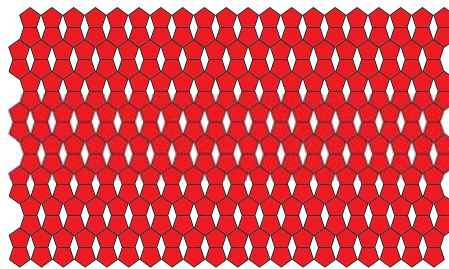


Рис. 7.11.7

Простейшее золотое заполнение плоскости пятиугольником и ромбом

Несколько более сложный вариант заполнения теми же фигурами известен со времён Альбрехта Дюрера. Следуя указаниям содержащимся в одной из его поздних работ [Dürer], можно получить хорошо известную сегодня математическую мозаику составленную из образно говоря *золотого* пятиугольника и *алмазного* ромба, который впрочем также золотой, поскольку образован двумя золотыми треугольниками.

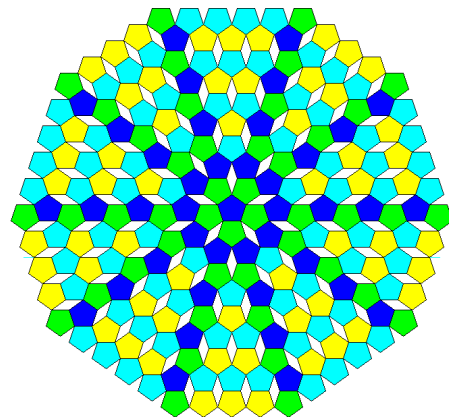


Рис. 7.11.8

Заполнение плоскости пятиугольниками и ромбами

В заключение, прощаясь с увлекательной темой плотного заполнения пространства геометрическими фигурами, остаётся только отметить, что во всех вышеупомянутых случаях имеет место пентагональная симметрия. Обнаружение осевой симметрии пятого порядка в квазикристаллах, рассматриваемых обычно как промежуточное состояние между аморфными телами и периодическими кристаллами, можно считать реализацией принципа золотого сечения в прежде казалось бы недоступной для него области физики твёрдого тела.

7.12. Числа 5 и 10 в золотом сечении

Обсуждение начнем с формулы для чисел Фибоначчи, в которой фигурируют числа 5 и 10. Известно, что для любых n и $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ имеет место формула

$$F_n = F_k F_{n-k-1} + F_{k+1} F_{n-k} \quad (7.12.1)$$

устанавливающая связь между произвольно взятыми F_n и F_k . В частном случае $k = 9$

$$F_n = 34 F_{n-10} + 55 F_{n-9} \quad (7.12.1')$$

Отсюда после несложных преобразований, см. [Knott¹], получаем любопытную формулу

$$F_n - F_{n-5} = 10 F_{n-5} + F_{n-10} \quad (7.12.2)$$

характерную наличием в ней чисел 5 и 10.

С участием числа 5 легко провести очень простой тест на принадлежность к множеству $\{F_n\}$ заданного положительного или отрицательного целого числа k [Gessel]. Оказывается, числами Фибоначчи являются те и только те числа, для которых одно из выражений $5k^2 \pm 4$ является полным квадратом. Придавая k значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ непосредственно убеждаемся, что полный квадрат получается лишь для чисел F_k , причём для чётных k следует брать знак плюс, а для нечётных – знак минус. В геометрической интерпретации при чётных номерах $n = 2m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеем прямоугольный треугольник со сторонами $2, \sqrt{5} F_{2m}$ и целочисленной гипотенузой L_{2m} , а при нечётных номерах $n = 2m + 1$ прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами $2, L_{2m+1}$ и гипотенузой $\sqrt{5} F_{2m+1}$. Для нахождения значений L_{2m} и L_{2m+1} , заставим переменную m в формулах

$$L_{2m} = \sqrt{5k^2 + 4} \quad \text{и} \quad L_{2m+1} = \sqrt{5k^2 - 4}$$

пробежать указанным образом значения $F_0, \pm F_1, \dots$. Получаемая при этом последовательность

$$\begin{aligned} L_0(F_0) = 2 & \quad L_1(\pm F_1) = 1 & \quad L_2(\pm F_2) = 3 & \quad L_3(\pm F_3) = 4 & \quad L_4(\pm F_4) = 7 \\ L_5(\pm F_5) = 11 & \quad L_6(\pm F_6) = 18 & \quad L_7(\pm F_7) = 29 & \quad L_8(\pm F_8) = 47 & \quad L_9(\pm F_9) = 76 \dots \end{aligned}$$

– не что иное как ряд Люка. Следовательно, имеем не только тест по выявлению чисел F_n , но и формулы связи между числами Фибоначчи и Люка:

$$L_{2m}^2 = 5F_{2m}^2 + 4, \quad L_{2m+1}^2 = 5F_{2m+1}^2 - 4, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.12.3)$$

Продолжая рассмотрение, напомним ещё раз, что каждая из шести тригонометрических функций представляет собой сочетание экспоненты $e^{\pm x}$ с числом 2 и мнимой единицей i (например $\csc x = \frac{2i}{e^{ix} - e^{-ix}}$);

гиперболические функции выражаются через $e^{\pm x}$ и 2. Если же говорить об интегральном синусе, косинусе и т.д., то к обычным операциям равенства, сложения и вычитания, умножения и деления добавляется выражаемая через кванторы операция предельного перехода \lim . Во всех этих случаях, по сути простейших сочетаниях различных форм экспоненты, имеет место преобразование типа $e-i-2$ либо типа $e-2$. Здесь нет пока спутника [проточисел](#) $e, i, 2$ – константы π , но если, допустим, преобразование “синус” производится над *половиной* или *третью* π , это приводит к знакомым тождествам. Зная и применяя шаг за шагом формулы двойного и половинного аргумента функций, их суммы и разности, можно найти синусы, косинусы, тангенсы, ... для аргументов

$$\frac{1}{2^n} \pi, \quad \frac{1}{2^n} \frac{\pi}{3}, \quad \pi \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \right), \quad 2^n \frac{\pi}{2}, \quad 2^n \frac{\pi}{3}$$

и так далее для любого n . Всё это хорошо известно уже из школьного курса, однако усложним вопрос: что получится, если произвести $e-i-2$ -преобразование числа π , разделенного не на две или три, а на пять (или десять) частей? Ответ таков: в этом случае мы приходим к числу ϕ . В дальнейшем удобнее брать не $\sin x$ и $\cos x$, а

$$2 \sin x \equiv \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i} \quad \text{и} \quad 2 \cos x \equiv e^{ix} + e^{-ix}$$

то есть преобразования типа e^{-i} , а не e^{-i-2} . Заставим переменную пробегать значения $n \cdot \pi/10$ ($n = 1, 2, \dots$) кратные $\pi/10$. Вследствие периодичности синуса и косинуса, точнее экспоненты, достаточно ограничиться десятью значениями аргумента: $\pi/10, 2\pi/10, \dots, 10\pi/10$. Продолжение этой последовательности уже не даст новых значений для синуса и косинуса – с точностью до знака всё будет повторяться снова и снова.

Таблица 7.12.1

Функции $2\sin(n \cdot \pi/10)$, $2\cos(n \cdot \pi/10)$ и число ϕ

n	$n \frac{\pi}{10}$	$\frac{e^{\frac{\pi}{10}ni} - e^{-\frac{\pi}{10}ni}}{i}$	$e^{\frac{\pi}{10}ni} + e^{-\frac{\pi}{10}ni}$
1	$\frac{\pi}{10}$	ϕ^{-1}	$\sqrt{2+\phi}$
2	$2\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$	$\phi^{-1}\sqrt{2+\phi} = \sqrt{3-\phi}$	ϕ
3	$3\frac{\pi}{10}$	ϕ	$\phi^{-1}\sqrt{2+\phi} = \sqrt{3-\phi}$
4	$4\frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$	$\sqrt{2+\phi}$	ϕ^{-1}
5	$5\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$	2	0
6	$6\frac{\pi}{10} = \frac{3\pi}{5}$	$\sqrt{2+\phi}$	$-\phi^{-1}$
7	$7\frac{\pi}{10}$	ϕ	$-\phi^{-1}\sqrt{2+\phi} = -\sqrt{3-\phi}$
8	$8\frac{\pi}{10} = \frac{4\pi}{5}$	$\phi^{-1}\sqrt{2+\phi} = \sqrt{3-\phi}$	$-\phi$
9	$9\frac{\pi}{10}$	ϕ^{-1}	$-\sqrt{2+\phi}$
10	π	0	-2

Необходимость доказательства этих соотношений отпадает, если учесть, что в геометрии формула $a = 2R \sin \frac{\pi}{n}$ выражает зависимость между длиной a стороны правильного n -угольника и радиусом R описанной окружности. Если принять R равным 1, то в геометрическом истолковании первая и вторая строки третьего столбца это длины сторон правильных десяти- и пятиугольников, вписанных в единичную окружность (ср. треугольники золотого сечения в 6.5). Остальные значения находим по правилам для синуса и косинуса с привлечением простейших арифметических свойств числа ϕ . Таким образом, преобразование чисел $n \cdot \pi/10$, где n пробегает значения $\pm 1, \pm 2, \dots$, приводит к расположенным в интервале от -2 до 0 и от 0 до 2 числам

$$\pm \phi^{-1}, \pm \phi^{-1} \sqrt{2+\phi}, \phi, \pm \sqrt{2+\phi}$$

Соответствующие соотношения для $\frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{5} n$ и $\frac{1}{2} \csc \frac{\pi}{10} n$ имеют особенно простой вид для секанса, который при значениях переменной $n = 1, 2, \dots, 10$ принимает лишь значения $\pm \phi, \pm \phi^{-1}, \pm 1/2$.

Таблица 7.12.2

Функции $1/2\sec(n\cdot\pi/5)$, $1/2\csc(n\cdot\pi/10)$ и число ϕ

n	$\frac{1}{e^{\frac{\pi}{5}in} + e^{\frac{\pi}{5}in}}$	$\frac{i}{e^{\frac{\pi}{10}in} - e^{\frac{\pi}{10}in}}$
1	ϕ^{-1}	ϕ
2	ϕ	$\sqrt{\frac{\phi+2}{5}}$
3	$-\phi$	ϕ^{-1}
4	$-\phi^{-1}$	$\phi^{-1}\sqrt{\frac{\phi+2}{5}}$
5	$-1/2$	$1/2$
6	$-\phi^{-1}$	$\phi^{-1}\sqrt{\frac{\phi+2}{5}}$
7	$-\phi$	ϕ^{-1}
8	ϕ	$\sqrt{\frac{\phi+2}{5}}$
9	ϕ^{-1}	ϕ
10	$1/2$	∞

Не менее значимы соотношения типа $f(i \ln \phi)$ и $f(i \ln \phi/i)$ для любой из тригонометрических функций и логарифма, содержащие константу i в явном виде.

Таблица 7.12.3

Значения тригонометрических функции $f(i \ln \phi)$ и $f(i \ln \phi/i)$

Функция $f(x)$	$x = i \ln \phi$	$x = i \ln \phi/i$
$\sin x$	$i/2$	$\phi - 1/2$
$\cos x$	$\phi - 1/2$	$-i/2$
$\operatorname{tg} x$	$1/(2\phi - 1)i = 1/\sqrt{5} i$	$\sqrt{5} i$
$\operatorname{ctg} x$	$-\sqrt{5} i$	$-i/(2\phi - 1) = -i/\sqrt{5}$
$\sec x$	$2/(2\phi - 1) = 2/\sqrt{5}$	$2i$
$\csc x$	$-2i$	$2/(2\phi - 1) = 2/\sqrt{5}$

С помощью функций $\cos \frac{\pi}{5}n$ и $\sin \frac{\pi}{10}n$ целиком в тригонометрической форме, не содержащей к тому же константы ϕ , может быть представлена и формула Бине для значений $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ [Stern]:

$$F_n = \frac{2^{n+2}}{5} \left(\cos^n \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} + \cos^n \frac{3\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{9\pi}{5} \right) \quad (7.12.4)$$

Иррациональное число ϕ оказывается связанным с числами различных алгебраических типов: трансцендентными e и π , мнимой единицей i , целыми 2, 5, 10, с нулём, а также с натуральным рядом и отрицательными целыми числами. Заслуживает внимания появление в одной формуле π , ϕ и 10 или 5. Древняя и средневековая математика знала все эти числа, но глубокую зависимость между ними – без появившихся значительно позже, в XVIII веке констант e , i – она не в состоянии была установить, хотя на уровне геометрических образов указанная зависимость была найдена в правильных десяти- и пятиугольниках. Принадлежность 10 и 5 к немногочисленному

семейству чисел, выделенных относительно золотого сечения, тот факт, что они оказались в одной связке с фундаментальными математическими константами перекликается с особой ролью десятки в истории математики.

Так, пифагорейцы считали, что десятка “есть нечто совершенное и охватывает всю природу чисел”, говорили о десяти попарно расположенных началах существующего, давали клятву священной декадой, рассматриваемой как сумма $1 + 2 + 3 + 4$, связывали десятку с числом планет Солнечной системы и тому подобное. Кое-какие подробности находим у Аристотеля: “И всё, что они могли в числах и гармониях показать согласующимся с состояниями и частями неба и со всё́м мироустроением, они сводили вместе и приводили в согласие друг с другом; и если у них где-то получался тот или иной пробел, то они стремились восполнить его, чтобы всё учение было связным. Я имею в виду, например, что так как десятка, как им представлялось, есть нечто совершенное и охватывает всю природу чисел, то и движущихся небесных тел, по их утверждению, десять, а так как видно только девять, то десятым они объявляют «противоземлю»” [Аристотель 1976, 986a]. Последнее утверждение Стагирит решительно критикует и высмеивает: “Сверх того они постулируют ещё одну Землю, противоположную нашей, – «Антиземлю», как они её называют, не ища теорий и объяснений, сообразных с наблюдаемыми фактами, а притягивая за уши наблюдаемые факты и пытаясь их подогнать под какие-то свои теории и воззрения” [Аристотель 1981, 293a]. Далее, относительно десяти пифагорейских начал Аристотель говорит следующее: “Другие пифагорейцы утверждают, что имеется десять начал, расположенных попарно: предел и беспредельное, нечетное и четное, единое и множество, правое и левое, мужское и женское, покоящееся и движущееся, прямое и кривое, свет и тьма, хорошее и дурное, квадратное и продолговатое” [Аристотель 1976, 986a]. Пифагорейская магия десятки явно проступает, например, в рассказе Платона о легендарной Атлантиде, описываемой как идеальное во всех отношениях государство. Используются и другие числовые характеристики, но десятка и её степени встречаются значительно чаще, особенно если речь заходит о больших количествах: десять царей, правящих десятью частями, на которые поделил остров Посейдон; участки величиной десять на десять стадиев, предоставленные “мужам, пригодным к войне”, десять тысяч колесниц царского войска; сто нереид на дельфинах, украшающих храм Посейдона; большой канал длиной в десять тысяч стадиев, прорытый по периметру острова и тем самым определяющий его размеры; малые каналы в сто фунтов глубиной и сто футов шириной – последние “отстояли друг от друга на сто стадиев” [Платон 1971, 114a, 119a, 116e, 118d, 115d].

Разумеется, не только у греков, но и у египтян, у применявших пятеричную систему китайцев, у индусов и других народов древнего мира именно число 10 было положено в основу системы счисления, которая наряду с двоичной системой повсеместно используется и в наши дни. Надо сказать, что возникновение десятичной системы, в общем-то не имеющей формальных преимуществ перед другими системами счисления, обычно объясняют удобством счёта на пальцах. Впрочем, применялись системы и с отличными от 10 основаниями: 3, 5, 12, 20, 40, 60 [Башмакова, Юшкевич; Выгодский]. Графика представления числа ϕ естественно меняется при переходе от одной системы счисления к другой; в пятеричной (позиционной), например, системе счисления ϕ выражается с помощью пяти знаков 0, 1, 2, 3, 4 в виде бесконечной пятеричной дроби 1,302113423041..., а допустим в двенадцатеричной системе, где последним знаком является заменяемое символом b 11, золотое число равно $1,74bb6772802\dots$. Как бы то ни было, выделенность по отношению к ϕ чисел 2, 5, 10, возможно, ставит их на привилегированное по сравнению с другими место при выборе системы счисления для представления числа ϕ .

Литература

- Альсведе Р., Вегенер И. *Задачи поиска*. М.: Мир, 1982
- Аракелян Г.Б. *Фундаментальная теория ЛМФ*. Ереван, 2007
- *От логических атомов к физическим законам*. Ереван: “Лусабац”, 2007
 - *Пик “острова стабильности” и принцип золотого сечения* <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161801.htm>
- Аристотель. *Метафизика*. В кн.: Аристотель. Соч. в четырёх томах, т. 1. М.: Мысль, 1976, с. 63–367
- Башмакова И.Г., Юшкевич А.П. *Происхождение систем счисления*. В кн.: Энциклопедия элементарной математики. Книга I. Арифметика. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951, с. 11–74
- Боднар О.Я. *Геометрия филлотаксиса*. Доклады АН Украины, 1992, №9, с. 9–14
- Бутусов К.П. *“Золотое сечение” в солнечной системе*. В кн.: Проблемы исследования Вселенной. Труды ВАГО, вып. 7. М.; Л., 1973, с. 475–500
- Василенко С.Л. <http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm> (Список опубликованных работ)
- Вейль Г. *Симметрия*. М.: Наука, 1968
- Владимиров В.Л., Стахов А.П. *Энтропия золотого сечения (раскрыта ещё одна тайна золотого сечения)* <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321199.htm>

- Волков С. А.** *Принципы и методы, обеспечивающие гармонию при создании и реконструкции архитектурных сооружений и ансамблей* <http://www.interlibrary.narod.ru>
- Воробьев Н. Н.** *Числа Фибоначчи*. М.: Наука, 1978
- Гика М.** *Эстетика пропорций в природе и искусстве*. М.: Изд. Акад. архитектуры, 1936
- Гильберт Д.** *Математические проблемы*. В кн.: Проблемы Гильберта. М.: Мир, 1969, с. 11–64
- Гончаров Н. Ф., Макаров В. А. и Морозов В. С.** *Карта ИДСЗ и точные координаты узлов* http://www.lachugin.ru/science/idsz1_15.htm
- Жирмунский А. В., Кузьмин В. И.** *Критические уровни в процессах развития биологических систем*. М.: Наука, 1982
- Жуковский П. В.** *Ботаника*. М.: Высшая школа, 1964 <http://maths.dur.ac.uk/~dma0rcj/PED/fib.pdf>
- Кааба и “золотое сечение”*. YouTube <http://www.youtube.com/watch?v=W97j7NxL5pM&feature=related>
- Каскады из правильных многогранников* www.geometry2006.narod.ru/Lessons/10-11/27b.ppt
- Кеплер И.** *О шестигольных снежинках*. М.: Наука, 1982
- Клейн Ф.** *Лекции о развитии математики в XIX столетии*, т. I. М.: Наука, 1989
- Кнут Д.** *Сортировка и поиск*. В кн.: Искусство программирования для ЭВМ. В семи томах, т. 3. М.: Мир, 1978
- Конюс Г. Э.** *Метротектоническое исследование музыкальной формы*. М., 1933
- Кордемский Б. А.** *Математическая смекалка*. М.: Наука, 1965
- Коробко В. И., Коробко Г. Н.** *Основы структурной гармонии природных и искусственных систем*. Ставрополь, 1995
- Лакатос И.** *Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы*. М.: Наука, 1967
- Лебедев Ю. С., Рабинович В. И., Положай Е. Д.** и др. *Архитектурная бионика*. М.: Стройиздат, 1990
- Левин В. И.** *Рамануджан – математический гений Индии*. М.: Знание, 1968
- Левитов Л. С.** *Квазикристаллы*. В кн.: Физическая энциклопедия, т. 2. М.: Сов. энцикл., 1988, с. 255–256
- Ле Корбюзье.** *Архитектура XX века*. М.: Прогресс, 1970
– *Модуль*. М.: Стройиздат, 1976
- Лесков С.** *Рулетка Менделеева. В США раскрыта крупнейшая сознательная научная фальсификация*. Известия, Наука. Фальсификации, 2002 <http://www.inauka.ru/false/article22103.html>
- Лефевр В. А.** *Формула человека (Контуры фундаментальной психологии)*. М.: Прогресс, 1991
- Лосев А. Ф.** *Музыка как предмет логики*. В кн.: А. Ф. Лосев. Из ранних произведений. М.: Правда, 1990, с. 356–368
- Лука Пачоли*. Традиция. Русская энциклопедия http://www.traditio.ru/index.php/Пачоли_Лука
- Марутаев М. А.** *О гармонии как закономерности*. В кн.: Принцип симметрии. М.: Наука, 1978, с. 363–395
– *Гармония как закономерность природы*. В кн.: И. Ш. Шевелев, М. А. Марутаев, И. П. Шмелёв. Золотое сечение. Три взгляда на природу гармонии. М.: Стройиздат, 1990, с. 131–233
- Матиясевич Ю. В.** Известия АН СССР. Серия Математика, 1971, т. 35, № 1, с. 3.
– *Десятая проблема Гильберта*. М.: Наука, 1993
- Мекка*. Википедия <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D0%BA%D0%BA%D0%B0>
- Мельхиседек Д.** *Древняя тайна Цветка Жизни*, тт. 1 и 2 <http://depositfiles.com/ru/files/y15p0imw1>
- Оганесян Ю. Ц.** *Новая область ядерной стабильности*. Вестник Российской акад. наук, 2001, т. 71, № 7, с. 590–599
- Очинский В. В.** *Система музыкальных звуков как функция отношений золотой пропорции*. В кн.: Циклические процессы в природе и обществе, вып. 3, 1994, с. 161–167
- Перельгин В. П., Стеценко С. Г.** *Письма ЖЭТФ*, 1980, т. 32, с. 622
- Петухов С. В.** *Биомеханика, бионика и симметрия*. М.: Наука, 1981
– *Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение*. – В сб. «Метафизика. Век XXI» (ред. Ю. С. Владимиров). М.: Бином, 2006, с. 216–250
- Пилецкий А.** *Всемер наших предков*. Архитектура, 1977, № 26 (405), с. 6
- Платон.** *Тимей*. В кн.: Платон. Соч. в трёх томах, т. 3, ч. 1. М.: Мысль, 1971, с. 455–541
– *Критий*. Там же, с. 543–560
– *Федон*. Там же, с. 13–94
- Поликанов С. М.** *Необычные ядра и атомы*. М.: Наука, 1977
- Попков В. В., Шипицын Е. В.** *Золотое сечение в цикле Карно*. УФН, 2000, т. 170, № 11, с. 1253–1256
- Радюкевич А. В.** *Красивая сказка о “золотом сечении”* <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320016.htm>
- Радюк М. С.** *Золотая пропорция в структуре хлоропластов высших растений*. Известия АН СССР: Биол., 1987, № 5, с. 774–777

- Розенов Э.К.** *Динамика музыки и речи*. М.: Искусство, 1927
- Сабанеев Л.** *Этюды Шопена в освещении закона золотого сечения*. Искусство, 1925, № 2, с. 133–145
- Симонян К.С.** *Перитонит*. М.: Медицина, 1971
- Сороко Э.М.** *Структурная гармония систем*. Минск: Наука и техника, 1984
- Стахов А.П.** *Избыточные двоичные позиционные системы счисления*. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974
- *Перспективы применения систем счисления с иррациональными основаниями в технике аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразования*. Измерения, контроль, автоматизация, 1981, №6 (40), с. 3
 - *Коды золотой пропорции*. М.: Радио и связь, 1984
 - *Музей Гармонии и Золотого Сечения* http://www.goldenmuseum.com/index_rus.html
 - ¹ *Как устроены живые организмы* http://www.goldenmuseum.com/0603Organisms_rus.html
 - ² *Гипотеза Прокла: новый взгляд на “Начала» Евклида и Математика Гармонии* <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/2026-sth.pdf>
 - ³ *Гармония Мироздания и Золотое Сечение: древнейшая научная парадигма и её роль в современной науке, математике и образовании, Часть 2* <http://www.obretenie.info/txt/stahov/harmoni2.htm>
 - ⁴ *О деятельности Международного Клуба Золотого Сечения: реализованные проекты и перспективы* <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321198.htm>
 - ⁵ *Нужны ли современной науке р-числа Фибоначчи и р-коды Фибоначчи?* <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321123.htm>
- Степанов А.И.** *Число и культура: Рациональное бессознательное в языке, литературе, науке, современной политике, философии, истории*. М.: Языки славянской культуры, 2004
- Степанов И.Н.** *Формы в мире почв*. М.: Наука, 1986
- Тимердинг Г.Е.** *Золотое сечение*. Петроград: Научн. изд., 1924
- Уайльд Д.-Дж.** *Методы поиска экстремума*. М.: Наука, 1967
- Успенский В.А.** *Треугольник Паскаля* (Популярные лекции по математике, вып. 43). М.: Наука, 1966
- Церетели Г.В.** *Метр и ритм в поэзии Густавели и вопросы сравнительной версификации*. В кн.: Контекст-1973: Литературно-теоретические исследования. М.: Наука, 1974, с. 114–137
- Шапиро И.С.** *Ядро атомное*. В кн.: Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энцикл., 1983, с. 922–92
- Шапоренко П.Ф., Лужецкий В.А.** *Гармоническая соразмерность частей тела человека и принцип обобщённого золотого сечения*. Морфология, 1992, т. 103, №11–12, с. 122–130
- Шило Н.А., Динков А.В.** *Фенотипическая система атомов в развитие идей Д.И.Менделеева* <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321073.htm>
- Шипицын Е.В., Попков В.В.** *Двойственность и золотое сечение в теории фракталов и хаоса*. Вестник Междунар. инст. А. Богданова, 2001, №2 (6) с. 5–27
- Широков Ю.М., Юдин Н.П.** *Ядерная физика*. М.: Наука, 1980
- Шмелёв И.П.** *Третья сигнальная система*. В кн.: И.Ш.Шевелев, М.А.Марутаев, И.П.Шмелёв. Золотое сечение. Три взгляда на природу гармонии. М: Стройиздат, 1990, с. 235–341
- *Феномен Древнего Египта*. Минск: Университетское, РИЦ Лотаць, 1993 <http://depositfiles.com/files/2gfhsql1>
- Эйзенштейн С.М.** *Сергей Эйзенштейн о “золотом сечении”* (Отрывок из книги «Неравнодушная природа») <http://vzms.org/zolotoesechenie/Eisensnein.htm>
- ЭНА <http://e-na.ru/forum/45-490-1>
- Ю.Ф.В. (Вишпер Ю.Ф.).** *Золотое сечение как основной морфологический закон в природе и искусстве (открытие профессора Цейзинга)*. М., 1876
- Adler I., Varabe D., and Jean R. V.** *A History of the Study of Phyllotaxis*. Annals of Botany, **80**(3), 231–244 (1997)
- Andrews G.E., Askey R., and Roy R.** *Special Functions*. In: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **71** Cambridge: Camb. Univ. Press, 1999
- Arakelian H.** *LMP Fundamental Theory*. Yerevan: Sarvard, 2010
- Arneodo A., Argoul F., Vacry E., Muzy J. F., and Tabard M.** *Golden Mean Arithmetic in the Fractal Branching of Diffusion-Limited Aggregates*. Phys. Rev. Lett. **68**(23), 3456 (1992)
- Auluck F. C.** *On Some New Types of Partitions Associated with Generalized Ferrers Graphs*. Proc. of the Cambridge Philos. Soc. **47** (examples 45 and 46), 679–686 (1951)
- Ball W. W. R. and Coxeter H. S. M.** *Mathematical Recreations and Essays*. New York: Dover, 1987
- Barlow J.L. and Bareiss E.H.** *On Roundoff Error Distributions in Floating Point and Logarithmic Arithmetic*. Computing **34**, 325–347 (1985)
- Basin S.L.** *The Fibonacci Sequence Appears in Nature*. The Fib. Quart. **1**(1), 53–56 (1963)

- Benford F.** *The Law of Anomalous Numbers*. Proc. Amer. Phil. Soc. **78**, 551–572 (1938)
- Bergman G. A.** *A Number System with an Irrational Base*. Math. Magazine **31**, 98 (1957)
- Black Stone**. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Black_Stone
- Boles M. and Newman R.** *Universal Patterns: The Golden Relationship: Art, Mathematics and Nature*. Bradford, Massachusetts: Pythagorean Press, 1990
- Bondarenko B. A.** *Generalized Pascal Triangles and Pyramids: Their Fractals, Graphs, and Applications*. Santa Clara: Fibonacci Association, 1993
- Boulger W.** *Pythagoras Meets Fibonacci*. Mathematics Teacher **82**(4), 277–282 (1989)
- Boyle J.** *An Application of the Fourier Series to the Most Significant Digit Problem*. Amer. Math. Monthly **101**, 879 (1994)
- Braun S. R.** *Botany with a Twist*. Science, 1986 May, p. 63–64
- Brooks R.** *GoDNA: The Geometry of DNA* <http://www.brooksdesign-cg.com/Code/Html/godna2.htm>
- Brousseau A.** *On the Trail of the California Pine*. The Fib. Quart. **6**(1), 69–76 (1968)
<http://www.brooksdesign-cg.com/Code/Html/godna2.htm>
- Buseck P. R., Tsipursky S. J., Hettich R.** *Fullerenes from the Geological Environment*. Science **257** (5067), 215–217 (1992)
- Canright D.** *Fibonacci Gamelan Rhythms*. Just International Network, **6**(4), 4 (1990)
- Church A. H.** *The Relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws*. London: Williams and Norgate, 1904
– *On the Interpretation of Phenomena of Phyllotaxis*. Riverside, New York: Hafner, 1968
- Colman S.** *Nature's Harmonic Unity: A Treatise on Its Relation to Proportional Form*. Putnam's, 1912 (reprinted in 1971 in New York: Benjamin Blom, Inc.)
- Conway J. H. and Guy R. K.** *Phyllotaxis*. The Book of Numbers. New York: Springer-Verlag, 1995, p. 113–125
– *Fibonacci Numbers*. Ibid. 1996, p. 111–113
- Coldea R. et al.** *Quantum Criticality in an Ising Chain: Experimental Evidence for Emergent E_8 Symmetry*. Science 8 January, **327**(5962), 177–180 (2010)
- Cook T. A.** *The Curves of Life*. London, 1914 (reprinted in 1959 in New York: Dover)
- Coxeter H. S. M.** *The Golden Section, Phyllotaxis, and Wythoff's Game*. Scripta Mathematica **19**, 135–143 (1953)
– *Introduction to Geometry*. New York: Wiley, 1961
– *The Golden Section and Phyllotaxis*, Ch. 11. In: *Introduction to Geometry*. New York: Wiley, 1969
– *The Role of Intermediate Convergents in Tait's Explanation for Phyllotaxis*. Journ. Algebra **10**, 167–175 (1972)
- Coxeter H. S. M. and Greitzer S. L.** *Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., p. 41 (1967)
- Davis T. A.** *Fibonacci Numbers for Palm Foliar Spirals*. Acta Botanica Neerlandica **19**, 236–243 (1970)
– *Why Fibonacci Sequence for Palm Leaf Spirals?* The Fib. Quart. **9**, 237–244 (1971)
- Deininger R. A.** *Fibonacci Numbers and Water Pollution Control*. The Fib. Quart. **10**(3), 299–300, 302 (1972)
- Devaney R.** *The Mandelbrot Set and the Farey Tree, and the Fibonacci Sequence*. Amer. Math. Monthly **106**, 289–302 (1999)
- Dixon R.** *Mathographics*. New York: Dover, 1991
- Dodecahedron**. Wikipedia <http://en.wikipedia.org/wiki/Dodecahedron>
- Douady S. and Couder Y.** *Phyllotaxis as a Self-Organised Growth Process*. In: *Growth Patterns in Physical Sciences and Biology*. New York: Plenum Press, p. 341–352 (1993)
- Duckworth G. E.** *Structural Patterns and Proportions in Virgil's Aeneid: A Study in Mathematical Composition*. Univ. of Michigan Press, 1962
- Dumé Belle.** *Is the Universe a Dodecahedron?* 2003 <http://physicsweb.org/articles/1/7/10/5/1>
- Dunlap R. A.** *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. World Scientific, New Jersey, 1997
- Dürer A.** *The Painter's Manual*. Translated by W. L. Strauss. Abaris Books Inc., New York, 1977
- E_8 (mathematics). Wikipedia [http://en.wikipedia.org/wiki/E8_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/E8_(mathematics))
- Earth in Dodecahedron Crystal* <http://pen-dragon.deviantart.com/art/Earth-in-Dodecahedron-Crystal-165858147>
- El Naschie M. S.** *Young's double-slit experiment, Heisenberg, Uncertainty principle and correlation in Cantorian space-time*. – In *Quantum Mechanics, Diffusion and Chaotic Fractals*, ed. by M. S. El Naschie, O. Rossler and I. Prigogine, pp. 93–99. Elsevier, Oxford (1995)
– *A review of E infinity theory and the mass spectrum of high energy particle physics*. Chaos, Solitons and Fractals **19**, 209–236 (2004)
– *The two-slit experiment as the foundation of E-infinity of high energy physics*. Chaos, Solitons & Fractals **27**, 509–514 (2005)
- Fleehinger B. J.** *On the Probability that a Random Integer Has Initial Digit A*. Amer. Math. Monthly **73**, 1056–1061 (1966)
- Flower of life*. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Flower_of_Life
- Fullerene*. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Fullerene#cite_note-13

Fundamental Physical Constants—Extensive Listing <http://physics.nist.gov/constants>

Gardner M. *Mathematics, Magic and Mystery*. New York: Dover, 1956

- *Phi: The Golden Ratio*. Ch. 8. In: [The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions, A New Selection](#). New York: Simon and Schuster, p. 89–103 (1961)
- *Mathematical Games: The Multiple Fascinations of the Fibonacci Sequence*. Sci. Amer., Mar, p. 116–120 (1969)
- *Mathematical Circus: More Puzzles, Games, Paradoxes and Other Mathematical Entertainments*. Sci. Amer., New York: Knopf, p. 242–245 (1979)
- *Notes on a Fringe-Watcher: The Cult of the Golden Ratio*. Skeptical Inquirer **18**, 243–247 (1994)

Garland T.H. *Fascinating Fibonacci: Mystery and Magic in Numbers*. Palo Alto (Calif.): Dale Seymours Publications, 1987

Garland T.H. and Kahn C.V. *Math and Music*. Dale Seymour, 1995

Gessel I. *Problem H-187: n Is A Fibonacci Number if and Only if $5n^2 + 4$ or $5n^2 - 4$ Is A Square*. The Fib. Quart. **10**, 417 (1972)

Ghiorso A. et al. Phys. Rev. Lett. **22**, 1317 (1969)

Gill V. *Stars reveal carbon “spaceballs”* <http://www.bbc.co.uk/news/science-environment-10730280>

Graham R.A. *Property of Fibonacci Numbers*. The Fib. Quart. **2**, 1–10 (1964)

Graham R.L., Knuth D.E., and Patashnik O. *Fibonacci Numbers*. §6.6 in *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, p. 290–301 (1994)

Grünbaum B. and Shephard G.C. *Tilings and Patterns*. New York: W. H. Freeman & Co., 1987

Grzedzielski J. *Energetyczno-geometryczny kod przygody*. Warszawa, 1986

Guy R.K. *The Second Strong Law of Small Numbers*. The Math. Magazine **63** (examples 3, 45, 46), p. 3–21 (1990)

- *Fibonacci Numbers of Various Shapes*. §D26 in *Unsolved Problems in Number Theory*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, p. 194–195 (1994)

Halton J.H. *On a General Fibonacci Identity*. The Fib. Quart. **3**, 31–43 (1965)

Hardy G.H. *Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work*, 3rd ed. New York: Chelsea, 1999

Haylock D. *The Golden Section in Beethoven’s Fifth*. Mathem. Teaching, **4**, 56–57 (1978)

Harris J.N. *Spira Solaris. Arcbytas Mirabilis*. Art IVd2b. The Three-fold Number <http://www.spirasolaris.ca/sbb4d2b.html>

Heavy Elements – Element 114. Discovery of Element 114 and the Island of Stability. Nuclear science, 2004

<http://www.cms.llnl.gov/e114/e114.html>

Herz-Fischler R. *A Mathematical History of the Golden Number*. New York: Dover, 1998

Hill T.P. *Base-Invariance Implies Benford’s Law*. Proc. Amer. Math. Soc. **123**, 887–895 (1995)

- *A Statistical Derivation of the Significant-Digit Law*. Stat. Sci. **10**, 354–363 (1996)
- *The First Digit Phenomenon*. Amer. Sci. **86**, 358–363 (1998) <http://www.math.gatech.edu/~hill/publications/cv.dir/1st-dig.pdf>

Hilton P., Holton D., and Pedersen J. *Mathematical Reflections: in a Room with Many Mirrors, Ch. 3*. New York: Springer-Verlag, p. 61–85, 1998

Hilton P. and Pedersen J. *Fibonacci and Lucas Numbers in Teaching and Research*. Journ. Math. Informatique **3**, 36–57 (1991–1992)

- *A Note on a Geometrical Property of Fibonacci Numbers*. The Fib. Quart. **32**, 386–388 (1994)

Hoang V.D. *A Class of Arithmetic Burst-Error-Correcting Codes for the Fibonacci Computer*. PhD Dissertation, University Maryland, Dec 1979

Hoffer W. *A Magic Ratio Occurs Throughout Art and Nature*. Smithsonian, p. 110–120, Dec (1975)

Hoggatt V.E.Jr. *Number Theory: The Fibonacci Sequence*. In: 1977 Yearbook of Science and the Future, Encyclopaedia Britannica, p. 178–191 (1977)

Hoggatt V.E.Jr., Cox N., and Bicknell M. *A Primer for the Fibonacci Numbers: Part XII*. The Fib. Quart. **11**, 317–331 (1973)

Horadam A.F. *Eight Hundred Years Young*. Australian Math. Teacher **31**(4), 123–134 (1975)

Howat R. *Debussy in Proportion*. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1983

- *Architecture as Drama in Late Schubert*. In: *Schubert Studies*, ed. B. Newbould. London: Scolar Press, p. 168–192 (1998)

Hunter J.A.H. and Madachy J.S. *Mathematical Diversions*, Ch. 2. Princeton: Van Nostrand, 1963

Icosahedron. Wikipedia <http://en.wikipedia.org/wiki/Icosahedron>

Implosion Group’s website about Dan Winter- Sacred Geometry & Coherent Emotion, & HeartTuner + BlissTuner

<http://www.goldenmean.info/>

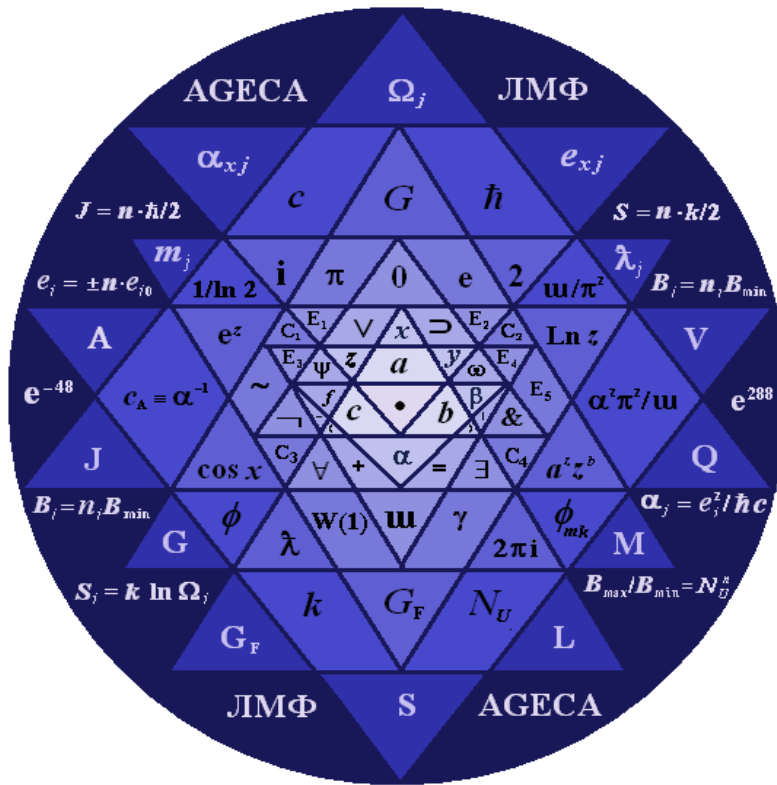
Jean R.V. *Growth Matrices in Phyllotaxis*. Mathematical Biosciences **32**, 165–176 (1976)

- *Mathematical Approach to Pattern and Form in Plant Growth*. New York: John Wiley, 1984
- *The Use of Continued Fractions in Botany*. UMAP Module 571, Modules and Monographs in Undergraduate Mathematics and Its Applications Project (1986)
- *On the Origins of Spiral Symmetry in Plants*. In: *Spiral Symmetry*. New York: World Scientific, p. 323–351 (1992)

- *Phyllotaxis: A Systematic Study in Plant Morphogenesis*. New York: Camb. Univ. Press, 1994
- Jean R.V. and Johnson M.** *An Adventure into Applied Mathematics with Fibonacci Numbers*. School Science and Mathematics **89**(6), 487–98 (1989)
- Johnson R.C.** *Matrix Methods for Fibonacci and Related Sequences*, 2004 <http://maths.dur.ac.uk/~dma0rcj/PED/fib.pdf>
- Johnson S.M.** *Best Exploration for Maximum Is Fibonaccian*. Report P-856. RAND Corporation, Santa Monica, 1956
- Kanada Y.** *Sample Digits for Decimal Digits of Pi*, Jan 18 (2003) http://www.super-computing.org/pi-decimal_current.html
- Kautz W.H.** *Fibonacci Codes for Synchronization Control*. IEE Trans. Inform. Theory **11**(8), 284 (1965)
- Kepler J.** *The Harmony of the World*. Translated by E.J. Aiton, A.M. Duncan, J.V. Field. Memoirs of the American Philosophical Society **209**, Philadelphia (1997)
- Knott R.** *Fibonacci Numbers and the Golden Section* <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>
- *The Mathematical Magic of the Fibonacci Numbers*. Ibid.¹ <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibmaths.html>
- *Easier Fibonacci puzzles*. Ibid.² <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibpuzzles.html>
- *Harder Fibonacci Puzzles*. Ibid.³ <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibpuzzles2.html>
- *Some Solid (Three-Dimensional) Geometrical Facts about the Golden Section*. Ibid.⁴ <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/phi3DGeom.html>
- Kroto H. W., Heath J. R., O'Brien S. C., Curl R. F. and Smalley R. E.** *C60:Buckminsterfullerene*. Nature **318**, 162–163 (1985)
- Lambert W Function*. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function
- Land F.** *The Language of Mathematics*. New York: Doubleday, 1963
- Larson P.** *The Golden Section in the Earliest Notated Western Music*. The Fib. Quart. **16**(6), 513–515 (1978)
- Lehmer D.H.** *Problem 3801*. Amer. Math. Month., **43**(9), 580 (1936)
- *On Arcotangent Relations for Pi*. Am. Math. Month. **45**, 657–664 (1938)
- Le Lionnais F.** *Les nombres remarquables*. Paris: Hermann, 1983, p. 40
- Lendvai E.** *Béla Bartók: an Analysis of his Music*. London: Kahn & Averill, 1971
- Leppik E.E.** *Phyllotaxis, Anthotaxis and Semataxis*. Acta Biotheoretica **14**, 1–28 (1961)
- Ley E.** *On the Peculiar Distribution of the U.S. Stock Indices Digits*. Amer. Stat. **50**, 311–313 (1996)
- Ligomenides P. and Newcomb R.** *Complement Representations in the Fibonacci Computer*. In: Proc. of the 5th Symposium on Computer Arithmetic, Ann Arbor, Michigan, May 1981
- Linn C.F.** *The Golden Mean: Mathematics and the Fine Arts*. Garden City, New York: Doubleday, 1974
- List of fractals by Hausdorff dimension*. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension
- Livio M.** *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number*. New York: Broadway Books, 2002
- Lowman E.L.** *An Example of Fibonacci Numbers to Generate Rhythmic Values in Modern Music*. The Fib. Quart. **9**(4), 423–426, 436 (1971)
- *Some Striking Proportions in the Music of Béla Bartók*. The Fib. Quart. **9**(5), 527–528, 536–537 (1971a)
- Luck R.** *Dürer-Kepler-Penrose: the development of pentagonal tilings*. Materials Science and Engineering **294** (6) 263–267, (2000)
- Luminet J.-P. et al.** Nature **425**, 593 (2003)
- Luminet J.-P., Weeks J., Riazuelo A., Lehoucq R., and Uzan J.-P.** *Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background* http://arxiv.org/PS_cache/astro-ph/pdf/0310/0310253v1.pdf
- Madden C.B.** *Fib and Phi in music: the golden proportion in musical form* <http://books.google.com/books?id=JhnERQLm4IUC&dq=rectangles+approximate+golden-spiral>
- Marek-Crnjac L.** *From Arthur Cayley via Felix Klein, Sophus Lie, Wilhelm Killing, Elie Cartan, Emmy Noether and superstrings to Cantorian space-time*. Prof. Mohammed El Naschie's Work <http://www.msel-naschie.com/work-related.cfm>
- Markowsky G.** *Misconceptions About the Golden Ratio*. The College Math. Journ., January **23**, 2–19 (1992)
- MathematiciansPictures.com* http://mathematicianspictures.com/phi_golden_ratio_golden_mean/phi_golden_ratio_golden_mean.htm
- Mauldin R.D.** *On the Hausdorff dimension of graphs and random recursive objects*. – In: Dimensions and Entropies in Chaotic Systems, ed. G. Mayer-Kress. Springer-Verlag, Berlin, 28–33 (1986)
- Mauldin R.D. and Williams S.C.** *Random recursive constructions: asymptotic geometric and topological properties*. Trans. Am. Math. Soc. **295**, 325–326 (1986)
- May M.** *Did Mozart Use the Golden Mean?* Amer. Scientist, Mar/Apr (1996)
- Metatron's Cube* <http://dcsymbols.com/cube/page2.htm>
- Miller R.** *DaVinci Code III: The Creator Within* http://www.heartoftheinitiate.com/articles_davincicreator01.htm

- Monteiro P. and Newcomb R.** *Minimal and Maximal Fibonacci Representations: Boolean Generation*. The Fib. Quart. **14**(1), 9 (1976)
- Muir H.** *Tantalising Evidence Hints Universe Is Finite*. Special Report from New Scientist Print Edition. The World's No 1 Science and Technology News Service, 2003
- Münzenberg G.** et al. Z. Phys. A: Atoms and Nuclei **317**, 235 (1984)
- Music and the Fibonacci Series* <http://goldennumber.net/music.htm>
- Newcomb S.** *Note on the Frequency of the Use of Digits in Natural Numbers*. Amer. Journ. Math. **4**, 39–40 (1881)
- Newcomb R.** *Fibonacci Numbers as a Computer Base*. In: Conf. Proc. of the 2nd Interamerican Conference on Systems and Informatics, Mexico City, Nov 1974
- Nigrini M.** *A Taxpayer Compliance Application of Benford's Law*. Journ. Amer. Tax. Assoc., **18**, 72–91 (1996)
- Norden H.** *Proportions in Music*. The Fib. Quart. **2**(3), 219–222 (1964)
- O'Beirne T.H.** *Puzzles and Paradoxes*. New York: Dover Press, 1965, ch. 8
- Oganesian Yu. Ts.** et al. Phys. Rev. **C62**, 041604(R) (2000)
- Phys. Rev. **C63**, 011301(R) (2001)
 - Eur. Phys. Journ. **A15**, 201 (2002)
 - JINR Communication E7-2003-178 (2003)
- Ogilvy C.S.** *Excursions in Geometry*. New York: Dover, 1990, p. 122–134
- Ogilvy C.S. and Anderson J.T.** *Fibonacci Numbers*, Ch. 11. In: Excursions in Number Theory. New York: Dover, p. 133–144 (1988)
- Pappas T.** *Fibonacci Sequence, Pascal's Triangle, the Fibonacci Sequence & Binomial Formula, The Fibonacci Trick, The Fibonacci Sequence & Nature*. In: The Joy of Mathematics. San Carlos, CA: Wide World Publ./Tetra, p. 28–29, 40–41, 51, 106, 222–225 (1989)
- Patin J.B., Moody K.J., Stoyer M.A., Wild J.F., Shaughnessy D.A., Stoyer N.J.** *Confirmed results of the $^{248}\text{Cm}(^{48}\text{Ca}, 4n)^{292}116$ experiment, LLNL report (2003)*. Retrieved 2008-03-03 <https://e-reports-ext.llnl.gov/pdf/302186.pdf>
- Pegg E.Jr.** *Math Games: Sequence Pictures*, 2003 http://maa.org/editorial/mathgames/mathgames_12_08_03.html
- Penrose R.** *Role of aesthetics in pure and applied research*. Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications **10**: 266ff (1974)
- U.S. Patent 4133152 “Set of tiles for covering a surface”, patent issued Jan 9 (1979)
- Penrose tiling*. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling
- Perez J.-C.** *Chaos DNA and Neuro-computers: a golden link/The hidden language of genes, global language and order in the human genome*. Speculations in Science and Technology **14**(4) (1991)
- *Codon populations in single-stranded whole human genome DNA are fractal and fine-tuned by the Golden Ratio 1.618*. Interdisciplinary Sciences: Computational Life Science **2** (3), 228–240. (2010)
 - Jean-Claude Perez http://creationwiki.org/Jean-claude_Perez
- Periodic Table*. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Periodic_table
- Phi and the Solar System*. GoldenNumber.net <http://goldennumber.net/solarsys.htm>
- Pitjeva E.V.** *Estimations of Masses of the Largest Asteroids and the Main Asteroid Belt From Ranging to Planets, Mars Orbiters and Landers*. Solar System Research, **39**, 176 (2005)
- Platonic solid*. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid
- Platonischer Körper*. Wikipedia http://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_K%C3%B6rper
- Proclus.** *A commentary on the first book of Euclid's Elements*. Translated by G.R.Morrow. Princeton Univ Press, Princeton, 1970
- Prusinkiewicz P. and Lindenmayer A.** *The Algorithmic Beauty of Plants*. New York: Springer-Verlag, 1996
- Pure Appl. Chem.* **73**, 667–683 (2001)
- Putz J.F.** *The Golden Section and the Piano Sonatas of Mozart*. Mathematics Magazine **68**(4), 275–282 (1995)
- Raimi R.A.** *The Peculiar Distribution of First Digits*. Sci. Amer. **221**, 109–119 (1969)
- *The First Digit Phenomenon*. Amer. Math. Monthly **83**, 521–538 (1976)
- Ram R.** *Fibonacci Numbers Formulae* <http://users.tellurian.net/hsejar/maths/fibonacci/>
- Ramanathan K.G.** *On Ramanujan's Continued Fraction*. Acta. Arith. **43**, 209–226, 1984
- Raphael L.** *Some Results in Trigonometry*. The Fib. Quart. **8**, 371, 392 (1970)
- Read H.** *Education through Art*, 3rd ed. New York: Pantheon Books, 1956
- Reid C.** *Julia: A Life in Mathematics*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1997
- Reiter C.** *Fast Fibonacci Numbers*. Mathematica Journ. **2**, 58–60 (1992)
- Richards F.J.** *Phyllotaxis: Its Quantitative Expression and Relation to Growth in the Apex*. Phil. Trans. **B235**, 509–564 (1951)

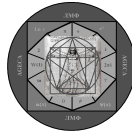
- Roukema B.F., Bulinski Z., Szaniewska A., Gaudin N.E.** *The optimal phase of the generalised Poincare dodecahedral space hypothesis implied by the spatial cross-correlation function of the WMAP sky maps.* *Astronomy and Astrophysics* **486**(1), 55–72 (2008) [arXiv:0801.0006v1](https://arxiv.org/abs/0801.0006v1) [astro-ph]
- Schatte P.** *On Mantissa Distributions in Computing and Benford's Law.* *Journ. Inform. Process. Cybernet.* **24**, 443–455 (1988)
- Shechtman D., Blech I., Gratias D., and Cahn J.W.** *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and no Translational Symmetry.* *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1951 (1984)
- Schroeder M.** *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise.* New York: W.H. Freeman, 1991
- Séroul R.** *The Fibonacci Numbers.* §2.13 in [Programming for Mathematicians](#). Berlin: Springer-Verlag, p. 21–22 (2000)
- Siegele U.** *Bachs Theologischer Formbegriff und das Duett F-Dur.* Neuhausen-Stuttgart, 1978
- Stakhov A.P.** *Computer Arithmetic Based on Fibonacci Numbers and Golden Section: New Information and Arithmetic Computer Foundations.* Toronto: SKILLSET Training, 1997 <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/3979>
- Stankovic R.S., Stankovic M., Astola J.T., and Egizarian K.** *Fibonacci Decision Diagram.* Tampere International Center for Signal Processing, 2000
- Steinhaus H.** *Mathematical Snapshots.* New York: Oxford Univ. Press, 1983
- Stern F.** *Fibonacci in Trigonometric Form, Problem B-374.* *The Fib. Quart.* **17**, 93 (1979)
- Stevens P.S.** *Patterns in Nature.* London: Peregrine, 1977
- Stewart I.** *Daisy, Daisy, Give Me Your Answer, Do.* *Sci. Amer.*, Jan 1995
– *Mathematical Recreations: Fibonacci Forgeries.* *Sci. Amer.*, May 1995a.
- Sutton C.** *Sunflower Spirals Obey Laws of Mathematics.* *New Scientist*, p. 16, 18 Apr (1992)
- The Fibonacci Quarterly. Problem B-218.* **10**, 335–336 (1972)
- The Unknown Leonardo.* Ladislav Reti, ed., Abradale Press, Harry Abrams, Inc., Publishers, New York, 1990
- Thompson d'Arcy W.** *On the Growth and Form.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952 (reprinted in 1992 in New York: Dover)
- Trigg C.W.** *Geometric Proof of a Result of Lehmer's.* *The Fib. Quart.* **11**, 539–540 (1973)
- Trott M.** *The Mathematica Guide Book for Programming.* New York: Springer-Verlag, p. 175 (2004)
- Ununquadium.* Wikipedia <http://en.wikipedia.org/wiki/Ununquadium>
- van Zanten A.J.** *The Golden Ratio in the Arts of Painting, Building, and Mathematics.* *Nieuw Arch. Wisk.* **17**, 229–245 (1999)
- Varnadore J.** *Pascal's Triangle and Fibonacci Numbers.* *Mathematics Teacher* **84**(4) (1991)
- Virus.* Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Virus#cite_note-69
- Vogel H.** *A Better Way to Construct the Sunflower Head.* *Math. Biosci.* **44**, 179–189 (1979)
- Wahl M.** *A Mathematical Mystery Tour: Higher-Thinking Math Tasks.* Tucson, AZ: Zephyr Press, 1988
- Walser R.** *Der Goldene Schnitt.* Stuttgart: Teubner, 1993
- Washington L.C.** *Benford's Law for Fibonacci and Lucas Numbers.* *The Fib. Quart.* **19**(2), 175–177 (1981)
- Watson G. N.** *Theorems Stated by Ramanujan (IX): Two Continued Fractions.* *Journ. London Math. Soc.* **4**, 231–237 (1929)
- Wells D.** *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers.* Middlesex (Eng.): Penguin Books, p. 36–49, 61–67 (1986)
– *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry.* London: Penguin, p. 87–88 (1991)
- Williams R.** *The Golden Proportion.* §2–7 in *The Geometrical Foundation of Natural Structure: A Source Book of Design.* New York: Dover, p. 52–53 (1979)
- Winter M.** *WebElements™ Professional edition* <http://www.webelements.com/>
- Wlodarski J.** *The Golden Ratio and the Fibonacci Numbers in the World of Atoms.* *The Fib. Quart.* **1**(4), 61–63 (1963)
- Wrench J.W.** *Review of B.H.Hannon and W.L.Morris. Tables of Arithmetical Functions Related to the Fibonacci Numbers.* *Math. Comput.* **23**, 459–460 (1969)
- Yamagishi M.E.B., and Shimabukuro A.I.** *Nucleotide Frequencies in Human Genome and Fibonacci Numbers.* In: *Bulletin of Mathematical Biology* **70**(3), 643–653 (2007)
- Young R.M.** *Excursions in Calculus: An Interplay of the Continuous and the Discrete.* *Dolciani Math. Expositions* N 13, Math. Association of America, Ch. 3 (1992)
- Your Dictionary.com.* <http://images.yourdictionary.com/DNA>
- Zeckendorf E.** *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas.* *Bulletin Soc. Roy. Sci. Liège* **41**, 179–182 (1972)
– *A Generalized Fibonacci Numeration.* *The Fib. Quart.* **10**, 365–372 (1972a)
- Zylinski E.** *Numbers of Fibonacci in Biological Statistics.* In: *Atti dei Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 1928.* Roma: Accademia dei lincei. **4**, 153–156 (1928)



Символ теории ЛМФ:
шри янтра со вписанными в неё основными элементами теории

Введение

Глава 1. Логика и формальная математика



Глава 6. ⇐

Принцип золотого сечения
в природе и искусстве

⇒ **Глава 8.**

Обобщённая теория золотого
сечения



Персональный сайт

E-mail: hrantara@gmail.com