Валериан Владимиров, Алексей Стахов

ОБ УНИФИКАЦИИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ РЕКУРСИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Содержание:

Индукция основывается на том, что простейшие соотношения являются одновременно и наиболее обычными
П. С. Лаплас (1749-1827), французский астроном, математик и физик

При изучении наук примеры важнее правил
И Ньютон (1642-1727), английский физик, механик, астроном и математик

Мы никогда … не станем математиками …, пока наш разум не будет способен самостоятельно решать хоть какие-нибудь проблемы
Р. Декарт (1596-1650), французский философ и математик

1. И.С. Ткаченко сделал нам подарок

В день св. Валентина все физики и лирики, влюбленные в Золотое Сечение, получили на сайте АТ от И. С. Ткаченко подарок – статью об n-ых степенях корней приведенного квадратного уравнения (где «n» – порядковый номер элемента числового ряда) [1]. Прежде всего, хотелось бы отметить большой вклад И. С. Ткаченко в развитие современной теории ЗС. В 1993 г., согласно рекомендации академика Юрия Митропольского, была опубликована статья Алексея Стахова и Ивана Ткаченко «Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи» [2]. Это – пионерная статья в важной области приложений ЗС, которая открыла новое направление в гиперболической геометрии. В дальнейшем эти идеи были развиты в статьях Алексея Стахова и Бориса Розина, опубликованных в международном журнале “Chaos, Solitons and Fractals» [3,4].

Из статьи И. С. Ткаченко [1] вытекает, что можно обобщить различные варианты сечений (золотое, серебряное, бронзовое и т.д.). Ряд Лука – это **сумма** n-ых степеней корней квадратного характеристического уравнения рекурсии Золотого Сечения $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$. А ряд Фибоначчи – это **разность** n-ых степеней корней того же характеристического уравнения ЗС (добавим: разность n-ых степеней корней, умноженная на масштабный коэффициент, равный разности корней в первой степени $x_1–x_2$).

Обобщение И.С. Ткаченко в очередной раз доказало общую математическую основу числовых рядов Фибоначчи и Люка, λ-чисел и «металлических пропорций», а также формальных соотношений между числами этих теперь уже «частных» рядов.

Иван Семёнович Ткаченко пишет сравнительно не много, но его статьи отличаются вдумчивостью и самостоятельным решением разнообразных проблем. Он берет не количеством, а новизной и глубиной разработки материала. Его девиз: «Зри в корень!» (Козьма Прутков).

Поздравим Ивана Семёновича с интересным результатом и попытаемся развить его работу. Будем рады, если и наши результаты пригодятся в дальнейшем другим исследователям и войдут в «копилку МГ».

Цели данной работы:

1. Уточнить, упростить и обобщить доказательства из [1], по-новому взглянуть на причины соотношений, полученных И.С. Ткаченко;
2. Сделать попытку унификации числовых рекуррентных рядов (унификация - от лат. unus – один - приведение чего-либо к единой системе, форме, единообразию; один из методов стандартизации) и отношений двух соседних элементов f_{n+2}/f_{n+1} в этих рядах.

2. Теорема Виета способна на чудеса

Для упрощения теоремы из [1] рассмотрим рекурсию 2-го порядка, уделив основное внимание общему виду её характеристического уравнения (с учетом теоремы Виета) и зависимости начальных условий (заданных первых двух элементов генерируемого рекурсией числового ряда) от корней характеристического уравнения.

Вспомним теорему Виета. Сумма корней x_1 и x_2 приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ равна второму коэффициенту «p» с обратным знаком, а произведение этих корней равно свободному члену «q»: $x_1+x_2=-p$; $x_1 \cdot x_2=q$.

Следовательно, характеристическое уравнение рекурсии 2-го порядка в общем виде можно представить таким образом: $x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0$, или

$$\mathbf{x^2=(x_1+x_2)\cdot x-x_1\cdot x_2}.$$

Такому характеристическому уравнению отвечает рекурсия

$$\mathbf{f_{n+2}=(x_1+x_2)\cdot f_{n+1}-(x_1\cdot x_2)\cdot f_n}.$$

Напомним также, что любая рекурсия 2-го порядка генерирует геометрическую прогрессию, если ее начальные условия f_0 и f_1 – последовательные целые степени аттрактора «x» [5].

Проще всего для доказательства этого положения применить **метод математической индукции**, что и было сделано в [5]. Доказательство было несложным, однако, как оказалось, и его можно существенно упростить (см. ниже), если применить теорему Виета. Отметим, что ниже, в новых доказательствах, под «x» будем понимать не только доминантный, больший по модулю корень характеристического уравнения, а и **любой из двух корней** характеристического уравнения. Нам придется, следовательно, пересмотреть сущность понятия «аттрактор».

Метод математической индукции при традиционном подходе трактуется так:
утверждение P(n) справедливо для всех неотрицательных «n», если:
1) справедливо P(0);
2) при условии, что верно P(k–1), верно также и P(k).

Но **для рекурсии 2-го порядка** метод математической индукции нужно слегка видоизменить. Здесь обобщенный шаг процесса индукции несколько длиннее за счет двух начальных условий. Итак, утверждение P(n) справедливо для всех неотрицательных «n», если:
1) при заданном P(0), P(1) справедливо P(2) и (только для убедительности!) P(3);
2) при условии, что верно P(k–2) и P(k–1), верно также и P(k).

С учетом сделанных замечаний, далее докажем методом математической индукции ряд теорем.

Теорема 1.

Если x_i – это один (**любой**!) из двух корней характеристического уравнения рекурсии 2-го порядка $f_{n+2}=(x_1+x_2)\cdot f_{n+1}–(x_1\cdot x_2)\cdot f_n$, а начальные элементы числового ряда (нулевой и первый) $\mathbf{f_0=x_i^0=1}$; $\mathbf{f_1=x_i^1=x_i}$ представляют собой соответственно нулевую и первую степени корня x_i, то эта рекурсия генерирует геометрическую прогрессию со знаменателем x_i, то есть $\mathbf{f_k=x_i^k}$ (показатель степени равен номеру элемента) при любом целом **k≥0**.

Доказательство Теоремы 1.

Пусть $x_i=x_1$. Проверим справедливость базы индукции. Определим третий элемент рекурсии $\mathbf{f_2}$, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=(x_1+x_2)\cdot f_{n+1}–(x_1\cdot x_2)\cdot f_n$ подставим **n=0,** $f_0=x_1^0=1$; $f_1=x_1^1=x_1$:

$f_2=(x_1+x_2)\cdot f_1–(x_1\cdot x_2)\cdot f_0=(x_1+x_2)\cdot x_1–(x_1\cdot x_2)\cdot 1=x_1^2$.

Определим для убедительности f_3, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=(x_1+x_2)\cdot f_{n+1}–(x_1\cdot x_2)\cdot f_n$ подставим **n=1**:

$f_3=(x_1+x_2)\cdot f_2–(x_1\cdot x_2)\cdot f_1=(x_1+x_2)\cdot x_1^2–(x_1\cdot x_2)\cdot x_1=x_1^3$.

Таким образом, при заданных $\mathbf{f_0=x_1^0=1; f_1=x_1^1=x_1}$ справедливо $\mathbf{f_2=x_1^2}$ **и** $\mathbf{f_3=x_1^3}$.

Теперь примем, что $f_{k-2}=x_1^{k-2}$ и $f_{k-1}=x_1^{k-1}$ и докажем, что тогда $f_k=x_1^k$:

$\mathbf{f_k}=(x_1+x_2)\cdot f_{k-1}–(x_1\cdot x_2)\cdot f_{k-2}=(x_1+x_2)\cdot x_1^{k-1}–(x_1\cdot x_2)\cdot x_1^{k-2} =\mathbf{x_1^k}$.

Следовательно, по методу индукции Теорема справедлива.

Если $x_i=x_2$, в доказательстве ничего не меняется, точно таким же образом получаем $\mathbf{f_k=x_2^k}$**.**

Пример 1. Корни характеристического уравнения $x^2=(x_1+x_2)\cdot x–x_1\cdot x_2$ рекурсии $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}–21\cdot f_n$ равны $x_1=7$; $x_2=3$. Пусть начальные условия для числового ряда данной рекурсии представляют собой последовательные целые степени **меньшего** по модулю корня x_2: $\mathbf{f_0}=x_2^0=\mathbf{1}$; $\mathbf{f_1=x_2^1=x_2=3.}$ Покажем, что тогда рекурсия генерирует геометрическую прогрессию со знаменателем x_2: $\mathbf{f_k=3^k}$ при любом целом **k≥0.**

Определим f_2, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}–21\cdot f_n$ подставим **n=0**:

$f_2=10\cdot f_1–21\cdot f_0=10\cdot 3–21\cdot 1=\mathbf{9}=x_2^2$.

Определим f_3, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}–21\cdot f_n$ подставим **n=1**:

$f_3=10\cdot f_2–21\cdot f_1=10\cdot 9–21\cdot 3=\mathbf{27}=x_2^3$.

По аналогии, при **n=2**:

$f_4=10\cdot f_3–21\cdot f_2=10\cdot 27–21\cdot 9 =\mathbf{91}=x_2^4$. И т.д.

Таким образом, рекурсия $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}–21\cdot f_n$ с корнями характеристического уравнения $x_1=7$; $x_2=3$ генерирует геометрическую прогрессию $f_k=3^k$ со знаменателем $x_2=3$ при любом целом $k≥0$, если начальные условия числового ряда рекурсии представляют собой последовательные целые степени меньшего по модулю корня x_2 ($f_0=1$; $f_1 =3$). **Меньший по модулю корень x_2 здесь играет роль полноправного аттрактора**.

Пример 2. Корни характеристического уравнения $x^2=(x_1+x_2)\cdot x–x_1\cdot x_2$ рекурсии $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}–21\cdot f_n$ те же (см. Пример 1) и равны $x_1=7$; $x_2=3$. Пусть начальные условия $\mathbf{f_0}=x_1^0=\mathbf{1}$; $\mathbf{f_1=x_1^1=x_1=7}$ для числового ряда данной рекурсии представляют собой последовательные целые степени **большего** по модулю корня (аттрактора) x_1. Покажем, что тогда рекурсия генерирует геометрическую прогрессию со знаменателем x_1: $\mathbf{f_k=7^k}$ при любом целом **k≥0.**

Определим f_2, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}–21\cdot f_n$ подставим **n=0**:

$f_2=10\cdot f_1–21\cdot f_0=10\cdot 7–21\cdot 1=\mathbf{49}=x_1^2$.

Определим f_3, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}–21\cdot f_n$ подставим **n=1**:

$f_3=10\cdot f_2–21\cdot f_1=10\cdot 49–21\cdot 7=\mathbf{343}=x_1^3$.

По аналогии, при **n=2**:

$f_4=10\cdot f_3–21\cdot f_2=10\cdot 343–21\cdot 49 =\mathbf{2401}=x_1^4$. И т.д.

Таким образом, рекурсия $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}–21\cdot f_n$ генерирует геометрическую прогрессию $f_k=7^k$ со знаменателем $x_1=7$ при любом целом $k≥0$, если начальные условия числового ряда рекурсии представляют собой последовательные целые степени большего по модулю корня x_1 ($f_0=1$; $f_1 =7$).

Теорема 2.

Если x_1 и x_2 – это корни характеристического уравнения рекурсии 2-го порядка $f_{n+2}=(x_1+x_2)\cdot f_{n+1}–(x_1\cdot x_2)\cdot f_n$, а начальные элементы числового ряда рекурсии равны $\mathbf{f_0}=x_1^0+x_2^0=1+1=\mathbf{2}$; $\mathbf{f_1}=x_1^1+x_2^1=\mathbf{x_1+x_2}$, то есть представляют собой **суммы** степеней корней x_1 и x_2, показатели которых равны между собой и равны номеру элемента, то эта рекурсия генерирует сумму двух геометрических прогрессий со знаменателями x_1 и x_2: $\mathbf{f_k=x_1^k+x_2^k}$ при любом целом $\mathbf{k\geq 0}$.

Доказательство Теоремы 2.

Определим f_2, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=(x_1+x_2)\cdot f_{n+1}–(x_1\cdot x_2)\cdot f_n$ подставим $\mathbf{n=0}$:

$\mathbf{f_2}=(x_1+x_2)\cdot f_1–(x_1\cdot x_2)\cdot f_0=(x_1+x_2)\cdot(x_1+x_2)–(x_1\cdot x_2)\cdot 2=\mathbf{x_1^2+x_2^2}$.

Определим f_3, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=(x_1+x_2)\cdot f_{n+1}–(x_1\cdot x_2)\cdot f_n$ подставим $\mathbf{n=1}$:

$\mathbf{f_3}=(x_1+x_2)\cdot(x_1^2+x_2^2)–(x_1\cdot x_2)\cdot(x_1+x_2)=\mathbf{x_1^3+x_2^3}$.

Таким образом, при заданных $f_0=2$; $f_1=x_1+x_2$ справедливо $\mathbf{f_2=x_1^2+x_2^2}$ и $\mathbf{f_3=x_1^3+x_2^3}$.

Теперь примем, что $f_{k–2}=x_1^{k–2}+x_2^{k–2}$ и $f_{k–1}=x_1^{k–1}+x_2^{k–1}$, и докажем, что $f_k=x_1^k+x_2^k$:

$\mathbf{f_k}=(x_1+x_2)\cdot f_{k–1}–(x_1\cdot x_2)\cdot f_{k–2}=(x_1+x_2)\cdot(x_1^{k–1}+x_2^{k–1})–(x_1\cdot x_2)\cdot(x_1^{k–2}+x_2^{k–2}) =\mathbf{x_1^k+x_2^k}$.

Следовательно, по методу индукции Теорема справедлива.

Пример 3. Корни характеристического уравнения $x^2=(x_1+x_2)\cdot x–x_1\cdot x_2$ рекурсии $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}–21\cdot f_n$ те же и равны $x_1=7$; $x_2=3$. Начальные условия $\mathbf{f_0}=x_1^0+x_2^0=1+1=\mathbf{2}$; $\mathbf{f_1}=x_1^1+x_2^1=\mathbf{7+3=10}$, то есть представляют собой **суммы** степеней корней x_1 и x_2, равные показатели которых равны номеру элемента. Покажем, что при любом целом $\mathbf{k\geq 0}$ рекурсия генерирует сумму двух геометрических прогрессий со знаменателями x_1 и x_2.

Определим f_2, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}–21\cdot f_n$ подставим $\mathbf{n=0}$:

$f_2=10\cdot f_1–21\cdot f_0=10\cdot 10–21\cdot 2=\mathbf{58}=x_1^2+x_2^2$.

Определим f_3, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}–21\cdot f_n$ подставим $\mathbf{n=1}$:

$f_3=10\cdot f_2–21\cdot f_1=10\cdot 58–21\cdot 10=580–210=\mathbf{370}=343+27=7^3+3^3=x_1^3+x_2^3$.

По аналогии, при $\mathbf{n=2}$:

$f_4=10\cdot f_3–21\cdot f_2=10\cdot 370–21\cdot 58=\mathbf{2482}=2401+81=7^4+3^4=x_1^4+x_2^4$.

И т.д. Таким образом, рекурсия $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}–21\cdot f_n$ генерирует сумму двух геометрических прогрессий со знаменателями x_1 и x_2: $\mathbf{f_k=7^k+3^k}$.

Следствие 1 Теоремы 2

Для k-ой степени корня x_1 справедливо равенство $x_1^k=x_1\cdot x_1^{k–1}$. Согласно Теореме 2 имеем $x_1^{k–1}=f_{k–1}–x_2^{k–1}$. Следовательно,

$$x_1^k=x_1\cdot(f_{k–1}–x_2^{k–1}).$$

Аналогично, поскольку согласно Теореме 2 имеем $x_2^{k–2}=f_{k–2}–x_1^{k–2}$, можем утверждать, что

$$x_2^k=x_2^2\cdot x_2^{k–2}=x_2^2\cdot(f_{k–2}–x_1^{k–2}).$$

Но $f_k=x_1^k+x_2^k=x_1\cdot(f_{k–1}–x_2^{k–1})+x_2^2\cdot(f_{k–2}–x_1^{k–2})$, что после простых преобразований, с учетом $f_{k–3}=x_1^{k–3}+x_2^{k–3}$, даёт:

$$\mathbf{f_k= x_1\cdot f_{k–1}+x_2^2\cdot f_{k–2}–x_1\cdot x_2^2\cdot f_{k–3}}\ .$$

Таким образом, если начальные элементы числового ряда рекурсии равны $\mathbf{f_0}=x_1^0+x_2^0=1+1=\mathbf{2}$; $\mathbf{f_1}=x_1^1+x_2^1=\mathbf{x_1+x_2}$, то такой ряд **сумм** n-ых степеней корней x_1 и x_2 подчиняется равенству $f_k=x_1\cdot f_{k–1}+x_2^2\cdot f_{k–2}–x_1\cdot x_2^2\cdot f_{k–3}$, связывающему **четыре любых последовательных элемента ряда**.

Действительно, для приведенного выше Примера 3 находим:

$\mathbf{f_3}=x_1\cdot f_2+x_2^2\cdot f_1–x_1\cdot x_2^2\cdot f_0=7\cdot 58+9\cdot 10–7\cdot 9\cdot 2=\mathbf{370}$, что соответствует истине.

Поскольку **ряд Люка** является числовым рядом **сумм** n-ых степеней корней $x_1=\Phi$ и $x_2=-\Phi^{-1}$, полученную формулу $f_k=x_1\cdot f_{k-1}+x_2^2\cdot f_{k-2}-x_1\cdot x_2^2\cdot f_{k-3}$ можно представить в виде

$$\mathbf{L_k=\Phi\cdot L_{k-1}+\Phi^{-2}\cdot L_{k-2}-\Phi^{-1}\cdot L_{k-3},}$$

где L – числа Люка в известной числовой последовательности 2; 1; 3; 4; 7; 11; 18; 29; ….

Сделаем проверку: $\mathbf{L_7}=\Phi\cdot 18+\Phi^{-2}\cdot 11-\Phi^{-1}\cdot 7=\mathbf{29}$, что также правильно.

Очевидно, таким же путем может быть получено аналогичное соотношение для ряда Фибоначчи.

Теорема 3.

Если x_1 и x_2 – это корни характеристического уравнения рекурсии 2-го порядка $f_{n+2}=(x_1+x_2)\cdot f_{n+1}-(x_1\cdot x_2)\cdot f_n$, а начальные элементы числового ряда рекурсии представляют собой **разности** степеней корней x_1 и x_2, равные показатели которых равны номеру элемента ($\mathbf{f_0}=x_1^0-x_2^0=1-1=\mathbf{0}$; $\mathbf{f_1}=x_1^1-x_2^1=\mathbf{x_1-x_2}$), то эта рекурсия генерирует разность двух геометрических прогрессий со знаменателями x_1 и x_2: $\mathbf{f_k=x_1^k-x_2^k}$ при любом целом $\mathbf{k\geq 0}$.

Доказательство Теоремы 3.

Определим f_2, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=(x_1+x_2)\cdot f_{n+1}-(x_1\cdot x_2)\cdot f_n$ подставим **n=0**:

$\mathbf{f_2}=(x_1+x_2)\cdot f_1-(x_1\cdot x_2)\cdot f_0=(x_1+x_2)\cdot(x_1-x_2)-(x_1\cdot x_2)\cdot 0=\mathbf{x_1^2-x_2^2}$.

Определим f_3, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=(x_1+x_2)\cdot f_{n+1}-(x_1\cdot x_2)\cdot f_n$ подставим **n=1**:

$\mathbf{f_3}=(x_1+x_2)\cdot(x_1^2-x_2^2)-(x_1\cdot x_2)\cdot(x_1-x_2)=\mathbf{x_1^3-x_2^3}$.

Таким образом, при заданных $f_0=0$; $f_1=x_1-x_2$ справедливо $\mathbf{f_2=x_1^2-x_2^2}$ и $\mathbf{f_3=x_1^3-x_2^3}$.

Теперь примем, что $f_{k-2}=x_1^{k-2}-x_2^{k-2}$ и $f_{k-1}=x_1^{k-1}-x_2^{k-1}$, и докажем, что $f_k=x_1^k-x_2^k$:

$\mathbf{f_k}=(x_1+x_2)\cdot f_{k-1}-(x_1\cdot x_2)\cdot f_{k-2}=(x_1+x_2)\cdot(x_1^{k-1}-x_2^{k-1})-(x_1\cdot x_2)\cdot(x_1^{k-2}-x_2^{k-2})=\mathbf{x_1^k-x_2^k}$,

что и требовалось доказать.

Пример 4. Корни характеристического уравнения $x^2=(x_1+x_2)\cdot x-x_1\cdot x_2$ рекурсии $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}-21\cdot f_n$ те же и равны $x_1=7$; $x_2=3$. Начальные условия $\mathbf{f_0}=x_1^0-x_2^0=\mathbf{0}$; $\mathbf{f_1}=x_1^1-x_2^1=\mathbf{7-3=4}$, то есть представляют собой **разности** степеней корней x_1 и x_2, равные показатели которых равны номеру элемента. Покажем, что при любом целом $\mathbf{k\geq 0}$ рекурсия генерирует разность двух геометрических прогрессий со знаменателями x_1 и x_2.

Определим f_2, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}-21\cdot f_n$ подставим **n=0**:

$f_2=10\cdot f_1-21\cdot f_0=10\cdot 4-21\cdot 0=40=49-9=7^2-3^2=\mathbf{x_1^2-x_2^2}$.

Определим f_3, для чего в уравнение рекурсии $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}-21\cdot f_n$ подставим **n=1**:

$f_3=10\cdot f_2-21\cdot f_1=10\cdot 40-21\cdot 4=316=343-27=7^3-3^3=\mathbf{x_1^3-x_2^3}$.

По аналогии, при **n=2**:

$f_4=10\cdot f_3-21\cdot f_2=10\cdot 316-21\cdot 40=2320=2401-81=7^4-3^4=\mathbf{x_1^4-x_2^4}$.

И так далее.

Таким образом, рекурсия $f_{n+2}=10\cdot f_{n+1}-21\cdot f_n$ при $\mathbf{f_0=0}$; $\mathbf{f_1=4}$ генерирует разность двух геометрических прогрессий со знаменателями x_1 и x_2: $\mathbf{f_k=7^k-3^k}$.

3. Истоки результата – в теореме Д. Бернулли

Даниилу Бернулли принадлежит доказательство следующей известной теоремы.

Обозначим λ_1 — максимальный по модулю корень уравнения

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0\ .$$

Предположим, что остальные корни уравнения строго меньше этого корня по модулю:

$$|\lambda_1|>|\lambda_j|\quad npu\ j\in\{2,3,\ldots,n\}\ .$$

Тогда линейная рекуррентная последовательность

$$x_{K+n} = -a_1 x_{K+n-1} - a_2 x_{K+n-2} - \ldots - a_n x_K$$

– **практически для любых** начальных данных $x_0, \ldots, x_{n-1}$ будет обладать свойством

$$\lim_{K\to\infty} \frac{x_K}{x_{K-1}} = \lambda_1 \ ,$$

т.е. отношение двух соседних членов последовательности будет стремиться к максимальному по модулю корню алгебраического уравнения.

Но – «**практически для любых** начальных данных» – это не означает «для любых»!

Как было показано выше в Теореме 1 и Примере 1, если начальные условия $\mathbf{f_0}=x_i^0=\mathbf{1}$; $\mathbf{f_1=x_i^1=x_i}$ представляют собой последовательные целые степени (n=0 и n=1) корня x_i, то рекурсия генерирует геометрическую прогрессию со знаменателем x_i, независимо от того, будет этот корень б*о*льшим или меньшим по модулю. Тогда отношение ЛЮБЫХ двух соседних элементов числового ряда всегда равно значению этого корня x_i. Поэтому меньший по модулю корень характеристического уравнения для краткости можно назвать «**малым аттрактором**», тогда как больший по модулю корень по-прежнему будет «**доминантным аттрактором**». В Теоремах 2 и 3 и Примерах к ним показано, что малый аттрактор может участвовать в формировании числовых рекурсивных рядов «на равных» с доминантным аттрактором.

4. Канонические рекурсивные ряды и цепные дроби

В Таблице 1 рассмотрены разностный и суммарный ряды n-ых степеней (где n – номер элемента числового ряда) корней x_1=Φ и x_2= –φ= –1/Φ характеристического уравнения $x^2=x+1$ «золотой пропорции».

Таблица 1. Разностный и суммарный ряды n-ых степеней корней x_1=Φ и x_2= –φ \ характеристического уравнения $x^2=x+1$ «золотой пропорции» (первые 6 элементов)

n	0	1	2	3	4	5	6	Название ряда
Ряд 1-го корня x_1=Φ	**$(\Phi)^0=1$**	**Φ**	**Φ^2**	**Φ^3**	**Φ^4**	**Φ^5**	**Φ^6**	**Ряд степеней Φ**
Ряд 2-го корня x_2=–φ	**$(-\varphi)^0=1$**	**–φ**	**φ^2**	**$-\varphi^3$**	**φ^4**	**$-\varphi^5$**	**φ^6**	**Ряд степеней (–φ)**
Разностный ряд	**0**	**√5**	**√5**	**2√5**	**3√5**	**5√5**	**8√5**	**√5-Фибоначчи**
Разностный приведенный ряд	**0**	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**Фибоначчи**
Суммарный ряд	**2**	**1**	**3**	**4**	**7**	**11**	**18**	**Люка**

Здесь использованы следующие обозначения: Φ≈1,618; $\varphi=\Phi^{-1}$≈0,618. Масштабный коэффициент разностного ряда (разность первых степеней корней) равен √5 (разностный ряд при n=1). Разделив все элементы разностного ряда на этот масштабный коэффициент, получаем **приведенный разностный ряд** – известный ряд Фибоначчи **0; 1**; 1; 2; 3; 5; 8; …

Приведенный разностный ряд имеет следующий общий вид:

0; 1; k1; $(x_1^3-x_2^3)/(x_1-x_2)$; $(x_1^4-x_2^4)/(x_1-x_2)$; … ; $(x_1^n-x_2^n)/(x_1-x_2)$; …

Унифицированный суммарный ряд (в Таблице 1 - ряд Люка **2; 1**; 3; 4; 7; 11; …) всегда начинается с двойки. Общий вид унифицированного суммарного ряда таков:

2; k1; $x_1^2+x_2^2$; $x_1^3+x_2^3$; $x_1^4+x_2^4$; … ; $x_1^n+x_2^n$; …

Отметим также, что именно такие, как в Таблице 1, унифицированные начальные условия для ЗС (**0; 1** и **2; 1**) известнейших числовых рядов Фибоначчи и Люка мы встречаем зачастую в литературе. Примером может служить книга С. Олсена [6, с. 53].

Теперь рассмотрим в Таблице 2 числовые ряды для «серебряной пропорции» с характеристическим уравнением $x^2=2x+1$ и его корнями $x_1=1+\surd 2$ и $x_2=1-\surd 2$.

Таблица 2. Разностный и суммарный ряды n-ых степеней корней $x_1=1+\surd 2$ и $x_2=1-\surd 2$ характеристического уравнения $x^2=2x+1$ «серебряной пропорции» (первые 6 элементов)

n	0	1	2	3	4	5	6	Название ряда
1-й корень x_1	$(1+\surd 2)^0=1$	$1+\surd 2$	$(1+\surd 2)^2$	$(1+\surd 2)^3$	$(1+\surd 2)^4$	$(1+\surd 2)^5$	$(1+\surd 2)^6$	Ряд степеней x_1
2-й корень x_2	$(1-\surd 2)^0=1$	$1-\surd 2$	$(1-\surd 2)^2$	$(1-\surd 2)^3$	$(1-\surd 2)^4$	$(1-\surd 2)^5$	$(1-\surd 2)^6$	Ряд степеней x_2
Разностный ряд	0	$2\surd 2$	$4\surd 2$	$10\surd 2$	$24\surd 2$	$58\surd 2$	$140\surd 2$	–
Разностный приведенный ряд	0	1	2	5	12	29	70	A000129
Суммарный ряд	2	2	3	14	34	82	198	A002203

Здесь **масштабный коэффициент** «серебряного» разностного ряда (разность первых степеней корней) равен $2\surd 2$ (см. разностный ряд при n=1). Разделив все элементы разностного ряда на этот масштабный коэффициент, получаем **приведенный разностный ряд** 0; 1; 2; 5; 12; 29; 70,…, известный под номером A000129.

Суммарный ряд всегда начинается с двойки (при n=0 $\mathbf{f_0=2}$). А следующим элементом $\mathbf{f_1=x_1+x_2}$ суммарного числового ряда рекурсии $f_{n+2}=(x_1+x_2)\cdot f_{n+1}-(x_1\cdot x_2)\cdot f_n$ (или, если обозначать рекурсию в общем виде $f_{n+2}=k1\cdot f_{n+1}+k2\cdot f_n$) является коэффициент $k1=x_1+x_2$. Таким образом, суммарный ряд всегда начинается с начальных условий $\mathbf{f_0=2;}$ $\mathbf{f_1=k1}$. В случае «серебряной пропорции» имеем $f_1=2$, то есть начальные условия «серебряного» ряда равны: $f_0=f_1=2$.

Отметим важный момент: в общем случае приведенный **разностный** ряд имеет следующий вид:

$$f_0=\mathbf{(x_1^0-x_2^0)=0;}\ \ f_1=\mathbf{(x_1-x_2)/(x_1-x_2)=1;}\ \ f_2=\mathbf{(x_1^2-x_2^2)/(x_1-x_2)=k1;}$$
$$f_3=\mathbf{(x_1^3-x_2^3)/(x_1-x_2);}\ \ \mathbf{\ldots;}\ \ f_n=\mathbf{(x_1^n-x_2^n)/(x_1-x_2);\ \ldots}$$

И далеко не очевидно, что начальные условия $f_0=0$ и $f_1=1$ можно применять и в случае $x_1=x_2$. Ведь если у какой-либо рекурсии корни характеристического уравнения $x^2=(x_1+x_2)\cdot x-x_1\cdot x_2$ равны между собой, то есть $\mathbf{x_1=x_2}$, второй элемент f_1 числового ряда обращается в неопределенность: $f_1=(x_1-x_2)/(x_1-x_2)=0/0$. Однако, эту неопределенность вида 0/0 нетрудно раскрыть с помощью правила Лопиталя–Бернулли. Для этого достаточно принять, что значение одного из корней равно постоянной величине, а переменное значение другого корня стремится к этой постоянной величине. Заменив в дроби $f_1=(x_1-x_2)/(x_1-x_2)$ выражения в числителе и знаменателе их производными, в пределе получаем $f_1=\lim\limits_{x_1\to x_2}\frac{1}{1}=1$ или $f_1=\lim\limits_{x_2\to x_1}\frac{-1}{-1}=1$.

Таким образом, унифицированные начальные условия $f_0=0$ и $f_1=1$ можно применять и в случае равных корней $x_1=x_2$. Покажем, что благодаря этому обстоятельству в число канонических рекурсивных рядов попадает и самый, казалось бы, простой, а в действительности – самый загадочный числовой ряд: натуральный ряд чисел.

Пусть $x_1=x_2=1$. Тогда характеристическое уравнение, согласно теореме Виета, выражается равенством $x^2=2x-1$, а рекурсия выглядит так: $f_{n+2}=2\cdot f_{n+1}-f_n$. Подставив унифицированные начальные условия $f_0=0$ и $f_1=1$ приведенного разностного ряда, получаем **натуральный ряд чисел 0; 1; 2; 3; 4; 5;** …

Натуральный ряд чисел – это приведенный ряд разностей n-ых степеней корней характеристического уравнения при $x_1=x_2=1$.

Итак, для любой рекурсии можно определить **приведенный разностный** ряд и **суммарный** ряд n-ых степеней корней характеристического уравнения. Эти ряды можно считать **каноническими** (твердо установленными, принятыми за образец) рядами. Тогда появляется возможность унифицировать начальные условия и сравнивать между собой самые разные рекуррентные числовые ряды.

Пример 5. Дана рекурсия 2-го порядка $f_{n+2}=k1\cdot f_{n+1}+k2\cdot f_n$, где k1=**3**; k2= **–4**. Требуется найти начальные условия и первые 8 членов канонических числовых рекурсивных рядов.

Начальные условия у приведенного разностного ряда стандартны и равны $\mathbf{f_0=0}$; $\mathbf{f_1=1}$. Подставляя эти значения в уравнение рекурсии $f_{n+2}=3\cdot f_{n+1}-4\cdot f_n$, получаем:
$f_2=3\cdot f_1-4\cdot f_0=3\cdot 1-4\cdot 0=\mathbf{3}$; $f_3=3\cdot f_2-4\cdot f_1=3\cdot 3-4\cdot 1=\mathbf{5}$; $f_4=3\cdot f_3-4\cdot f_2=3\cdot 5-4\cdot 3=\mathbf{3}$;
$f_5=3\cdot f_4-4\cdot f_3=3\cdot 3-4\cdot 5=\mathbf{-11}$; $f_6=3\cdot(-11)-4\cdot 3=\mathbf{-45}$; $f_7=3\cdot f_6-4\cdot f_5=3\cdot(-45)-4\cdot(-11)=\mathbf{-91}$.
Таким образом, **приведенный разностный ряд** имеет вид: 0; 1; 3; 5; 3; -11; -45; -91; …

Суммарный ряд n-ых степеней корней характеристического уравнения имеет такие начальные условия: $\mathbf{f_0=2;\ f_1=x_1+x_2=k1=3.}$ Подставляя эти значения в заданное уравнение рекурсии $f_{n+2}=3\cdot f_{n+1}-4\cdot f_n$, получаем:
$f_2=3\cdot f_1-4\cdot f_0=3\cdot 3-4\cdot 2=\mathbf{1}$; $f_3=3\cdot f_2-4\cdot f_1=3\cdot 1-4\cdot 3=\mathbf{-9}$; $f_4=3\cdot f_3-4\cdot f_2=3\cdot(-9)-4\cdot 1=\mathbf{-31}$;
$f_5=3\cdot f_4-4\cdot f_3=3\cdot(-31)-4\cdot(-9)=\mathbf{-57}$; $f_6=3\cdot(-57)-4\cdot(-31)=\mathbf{-47}$; $f_7=3\cdot(-47)-4\cdot(-57)=\mathbf{87}$.
Таким образом, **суммарный** ряд имеет вид: 2; 3; 1; -9; -31; -57; -47; 87; …

Пример 6. Дана рекурсия 2-го порядка $f_{n+2}=k1\cdot f_{n+1}+k2\cdot f_n$, где k1=**4**; k2= **–4**. Найдем первые элементы **канонических** числовых рекурсивных рядов.

Начальные условия приведенного разностного ряда: $\mathbf{f_0=0}$; $\mathbf{f_1=1}$. Подставляя эти значения в уравнение рекурсии $f_{n+2}=4\cdot f_{n+1}-4\cdot f_n$, получаем:
$f_2=4\cdot f_1-4\cdot f_0=4\cdot 1-4\cdot 0=\mathbf{4}$; $f_3=4\cdot f_2-4\cdot f_1=4\cdot 4-4\cdot 1=\mathbf{12}$; $f_4=4\cdot f_3-4\cdot f_2=4\cdot 12-4\cdot 4=\mathbf{32}$;
$f_5=4\cdot f_4-4\cdot f_3=4\cdot 32-4\cdot 12=\mathbf{80}$; $f_6=4\cdot 80-4\cdot 32=\mathbf{192}$.

Таким образом, **приведенный разностный ряд** имеет вид: 0; 1; 4; 12; 32; 80; 192; …

Суммарный ряд n-ых степеней корней характеристического уравнения имеет такие начальные условия: $\mathbf{f_0=2;\ f_1=x_1+x_2=k1=4.}$ Подставляя эти значения в заданное уравнение рекурсии $f_{n+2}=4\cdot f_{n+1}-4\cdot f_n$, получаем:
$f_2=4\cdot f_1-4\cdot f_0=4\cdot 4-4\cdot 2=\mathbf{8}$; $f_3=4\cdot f_2-4\cdot f_1=4\cdot 8-4\cdot 4=\mathbf{16}$; $f_4=4\cdot f_3-4\cdot f_2=4\cdot 16-4\cdot 8=\mathbf{32}$;
$f_5=4\cdot f_4-4\cdot f_3=4\cdot 32-4\cdot 16=\mathbf{64}$; $f_6=4\cdot 64-4\cdot 32=\mathbf{128}$; $f_7=4\cdot 128-4\cdot 64=\mathbf{256}$.
Таким образом, **суммарный** ряд здесь имеет вид геометрической прогрессии со знаменателем «2»: 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; …

Итак, рассматривая основные рекурсивные ряды как ряды приведенных разностных и суммарных n-ых степеней корней характеристического уравнения, унифицируя начальные условия этих рядов, мы приходим к канонизации числовых рекурсивных рядов.

Однако, как показано ниже, можно унифицировать и формальный подход к расчету **отношения двух соседних элементов** f_{n+2}/f_{n+1} любой числовой рекурсивной последовательности. Именно этой цели и служит Теорема 4.

Теорема 4.

Обозначим $k1=x_1+x_2$ – сумма корней; $k2=-x_1\cdot x_2$ – отрицательное значение произведения корней характеристического уравнения линейной рекурсии 2-го порядка $f_{n+2}=k1\cdot f_{n+1}+k2\cdot f_n$, где «n» – целое неотрицательное число; $\alpha=f_0/f_1$, f_0 и f_1 – заданные для рекурсии начальные условия.

Тогда отношение двух соседних членов последовательности f_{n+2}/f_{n+1} будет выражаться **конечной цепной дробью регулярной структуры**, у которой все неполные частные равны k1, все числители равны k2, конечный знаменатель всегда равен $k1+\alpha\cdot k2$, а «этажность» цепной дроби равна «n»:

$$f_{n+2}/f_{n+1}=k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1+...+\cfrac{k2}{k1+\alpha\cdot k2}}}}.$$

Доказательство Теоремы 4.

Определим отношение f_{n+2}/f_{n+1} при **n=0**. Для этого разделим левую и правую части уравнения рекурсии $f_{n+2}=k1\cdot f_{n+1}+k2\cdot f_n$ на f_{n+1}. Получим $f_{n+2}/f_{n+1}=k1+k2\cdot f_n/f_{n+1}$, что при n=0 даёт $\mathbf{f_2/f_1}=k1+k2\cdot f_0/f_1=k1+\alpha\cdot k2$. Таким образом, значению n=0 соответствует нулевая «этажность» цепной дроби, а искомое отношение равно конечному знаменателю $k1+\alpha\cdot k2$.

Определим отношение f_{n+2}/f_{n+1} при **n=1**. Для этого представим полученное выше равенство $f_{n+2}/f_{n+1}=k1+k2\cdot f_n/f_{n+1}$ в виде $f_{n+2}/f_{n+1}=k1+\dfrac{k2}{f_{n+1}/f_n}$. Подставим n=1. Заменим полученное при этом в знаменателе дроби отношение f_2/f_1 на его значение $f_2/f_1=k1+\alpha\cdot k2$: $\mathbf{f_3/f_2}=k1+\dfrac{k2}{k1+\alpha\cdot k2}$. Конечный знаменатель равен $k1+\alpha\cdot k2$. Следовательно, значению n=1 соответствует «одноэтажная» цепная дробь, алгоритм формирования которой содержит те же инварианты k1, k2 и также соответствует Теореме.

Допустим, что Теорема верна для n=k–2 (или k=n+2), и докажем, что тогда она справедлива и для n=k–1 (или k=n+1).

При **n=k–2** (или k=n+2) имеем $f_k/f_{k-1}=f_{n+2}/f_{n+1}=k1+\dfrac{k2}{f_{n+1}/f_n}$. Допускаем, что это равенство справедливо.

Подставив **n=k–1** (или k=n+1) в полученное выше равенство $f_{n+2}/f_{n+1}=k1+k2\cdot f_n/f_{n+1}$, получим $f_{k+1}/f_k=k1+k2\cdot f_{k-1}/f_k$, или $f_{k+1}/f_k=k1+\dfrac{k2}{f_k/f_{k-1}}$.

Теперь подставим справедливое равенство $f_k/f_{k-1}=k1+\dfrac{k2}{f_{n+1}/f_n}$ в знаменатель последнего соотношения $f_{k+1}/f_k=k1+\dfrac{k2}{f_k/f_{k-1}}$. Получим $f_{k+1}/f_k=k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{f_{n+1}/f_n}}$.

«Этажность» цепной дроби для f_{k+1}/f_k по сравнению со справедливым равенством для f_k/f_{k-1}, как и следовало ожидать, увеличилась на единицу, но алгоритм формирования дроби не изменился. Дробь содержит те же инварианты k1 и k2, её конечный знаменатель f_{n+1}/f_n также не изменился. Полученная цепная дробь соответствует Теореме.

Таким образом, если Теорема верна для произвольного значения n=k–2, то она верна и для следующего значения n=k–1. Следовательно, по методу индукции Теорема справедлива.

Следствие 1 Теоремы 4

Для **канонического** приведенного числового ряда **разностей** n-ых степеней корней характеристического уравнения отношение $\alpha=f_0/f_1$ равно нулю: $\alpha=0$, так как согласно Теореме 3 имеем $f_0=x_1^0-x_2^0=1-1=0$. Поэтому отношение двух соседних членов последовательности f_{n+2}/f_{n+1} выражается для такого ряда конечной цепной дробью вида $f_{n+2}/f_{n+1}=k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1+...+\cfrac{k2}{k1}}}}$.

Например, отношения двух соседних членов ряда Фибоначчи 0;1;1;2;3;5;8;…, у которого k1=k2=1 (рекурсия $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$), равны:

При n=0 $\quad f_{n+2}/f_{n+1}=f_2/f_1=k1=1$.

При n=1 $\quad f_3/f_2=k1+\frac{k2}{k1}=2$.

При n=2 $\quad f_4/f_3=k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

При n=3 $\quad f_5/f_4= k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} = 1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}=\frac{5}{3}$.

При n=4 $\quad f_6/f_5= k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1}}}} =1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{3}}=\frac{8}{5}$ и т.д.

Следствие 2 Теоремы 4

Для **канонического** числового ряда **сумм** n-ых степеней корней характеристического уравнения отношение $\alpha=f_0/f_1$ равно $\alpha=2/k1$, так как согласно Теореме 2 имеем $f_0=x_1^0+x_2^0=1+1=2$, $f_1=x_1^1+x_2^1=x_1+x_2=k1$. Поэтому отношение двух соседних членов последовательности f_{n+2}/f_{n+1} выражается для такого ряда конечной цепной дробью вида $f_{n+2}/f_{n+1}=k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1+...+\cfrac{k2}{k1+2\cfrac{k2}{k1}}}}$.

Например, отношения двух соседних членов ряда Люка 2;1;3;4;7;11;18;…, у которого k1=k2=1 (рекурсия $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$), равны:

При n=0 $\quad f_{n+2}/f_{n+1}=f_2/f_1=k1+2\frac{k2}{k1}=1+2=3$.

При n=1 $\quad f_3/f_2=k1+\cfrac{k2}{k1+2\cfrac{k2}{k1}}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

При n=2 $\quad f_4/f_3 = k1 + \cfrac{k2}{k1 + \cfrac{k2}{k1 + 2\cfrac{k2}{k1}}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3}} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$.

При n=3 $\quad f_5/f_4 = k1 + \cfrac{k2}{k1 + \cfrac{k2}{k1 + \cfrac{k2}{k1 + 2\cfrac{k2}{k1}}}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{4}} = \frac{11}{7}$ и т. д.

Нетрудно убедиться, что значения отношений f_{n+2}/f_{n+1}, рассчитанные по формуле с цепной дробью, совпадают со значениями, рассчитанными по элементам ряда Люка.

Пример 7. Дана рекурсия 2-го порядка $f_{n+2}=k1 \cdot f_{n+1}+k2 \cdot f_n$, где k1=**10**; k2= **–21**. **Единичные начальные условия не отвечают каноническому ряду**: $\mathbf{f_0=1}$; $\mathbf{f_1=1}$. Тогда:

$f_2=10 \cdot f_1-21 \cdot f_0=10 \cdot 1-21 \cdot 1= -11$, $f_2/f_1= \mathbf{-11}$.

$f_3=10 \cdot f_2-21 \cdot f_1=10 \cdot (-11)-21 \cdot 1= -110-21= -131$, $f_3/f_2 \approx \mathbf{11,91}$.

$f_4=10 \cdot f_3-21 \cdot f_2=10 \cdot (-131)-21 \cdot (-11)= -1310+231= -1079$, $f_4/f_3 \approx \mathbf{8,24}$.

$f_5=10 \cdot f_4-21 \cdot f_3=10 \cdot (-1079)-21 \cdot (-131)= -10790+2751= -8039$, $f_5/f_4 \approx \mathbf{7,45}$.

Проверим Теорему 4.

Согласно Теореме 4, в данном Примере отношение двух соседних членов последовательности f_{n+2}/f_{n+1} выражается конечной цепной дробью вида

$$f_{n+2}/f_{n+1}=k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1+...+\cfrac{k2}{k1+\alpha \cdot k2}}}},$$ где $\alpha=f_0/f_1=1$.

Применим эту дробь для расчета конкретных значений отношения f_{n+2}/f_{n+1}:

При n=0 $\quad f_{n+2}/f_{n+1}=f_2/f_1=k1+\alpha \cdot k2= k1+k2=10+1 \cdot (-21)=\mathbf{-11}$.

При n=1 $\quad f_3/f_2=k1+\dfrac{k2}{k1+k2}=10+\dfrac{-21}{-11} \approx \mathbf{11,91}$.

При n=2 $\quad f_4/f_3=k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1+k2}}=10+\dfrac{-21}{11,9} \approx \mathbf{8,24}$.

При n=3 $\quad f_5/f_4= k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1+\cfrac{k2}{k1+k2}}}=10+\dfrac{-21}{8,24} \approx \mathbf{7,45}$.

Таким образом, значения отношений f_{n+2}/f_{n+1}, рассчитанные по формуле с цепной дробью (Теорема 4), совпали со значениями, рассчитанными выше по уравнению рекурсии.

Заключение

Итак, все самые известные рекурсивные числовые ряды – это суммы или разности геометрических прогрессий, образованных корнями характеристических уравнений. Прогрессии формируются начальными условиями – первыми элементами ряда.

«Каково начало, таков и конец». Корни характеристического уравнения рекурсии 2-го порядка, участвующие в формировании начальных условий, формируют точно таким же образом каждый из последующих элементов числового ряда. Определяемая функция применена в теле своего же собственного определения – в начальных условиях – и имеет фрактальный характер.

Если в формировании ряда участвует только меньший по модулю корень, то именно он и становится аттрактором. Если участвуют оба корня, то аттрактором становится больший по модулю корень. В структуру числовых рядов Фибоначчи, Люка и других рядов вносят вклад оба корня характеристического уравнения. Ведь в основе этих рядов – сумма и разность n-ых степеней **обоих** корней. Однако меньший по модулю корень лишь тогда становится «настоящим» аттрактором, когда первые члены ряда в точности равны его целым последовательным степеням. Малейшее отклонение – и числовая последовательность переходит «на рельсы» доминантного значения аттрактора.

С учетом указанных особенностей корней характеристического уравнения рекурсии 2-го порядка, предложено меньший по модулю корень характеристического уравнения для краткости называть «**малым аттрактором**», а больший по модулю корень – «**доминантным аттрактором**». Терминология МГ окончательно сформируется не скоро, но обсуждение новых терминов следует вести постоянно, подкрепляя такие обсуждения математическими выкладками и ссылками на лингвистические правила, а не только субъективными вкусовыми ощущениями.

В данной работе методом математической индукции доказаны четыре теоремы, показывающие **фрактальную структуру** разностных и суммарных числовых рядов n-ых степеней корней характеристического уравнения.

Разностный числовой ряд равен разности двух геометрических прогрессий со знаменателями – корнями уравнения x_1 и x_2. Чтобы получить приведенный к единично-нулевым начальным условиям разностный ряд (с учетом получаемого автоматически условия $f_0=0$), следует разделить все элементы разностного ряда на значение $f_1=x_1–x_2$. Для случая ЗС приведенный к единично-нулевым начальным условиям (начинающийся с цифр 0 и 1) разностный ряд – это широко известный ряд Фибоначчи.

Приведенный разностный ряд имеет следующий общий вид:

0; 1; k1; $(x_1^3–x_2^3)/(x_1–x_2)$; $(x_1^4–x_2^4)/(x_1–x_2)$; … ; $(x_1^n–x_2^n)/(x_1–x_2)$; …

Натуральный ряд чисел – это приведенный ряд разностей n-ых степеней корней характеристического уравнения при $x_1=x_2=1$.

Общий вид унифицированного суммарного числового ряда таков:

2; k1; $x_1^2+x_2^2$; $x_1^3+x_2^3$; $x_1^4+x_2^4$; … ; $x_1^n+x_2^n$; …

Ряд Люка – это суммарный ряд с начальными условиями $f_0=2$ и $f_1=1$.

Никто не предлагает использовать только унифицированные начальные условия. Но… Повторим, что все широко известные рекурсивные числовые последовательности являются именно приведенными разностными числовыми рядами или суммарными числовыми рядами n-ых степеней корней характеристических уравнений соответствующих рекурсий. Для получения унифицированных числовых рядов не нужны дополнительные расчеты. Достаточно выбрать унифицированные начальные условия.

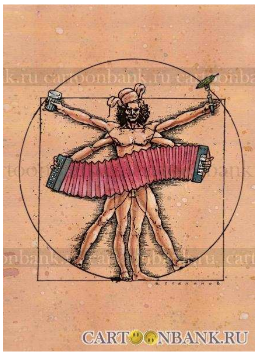
Предложено считать приведенный разностный числовой ряд и суммарный числовой ряд n-ых степеней корней характеристического уравнения **каноническими рядами**, а соответствующие им начальные условия – **каноническими начальными условиями**. Это даст возможность сравнивать между собой различные рекурсивные числовые ряды.

В работе предлагается также унифицировать и формальный подход к расчету отношения двух соседних элементов f_{n+2}/f_{n+1} любой числовой рекурсивной последовательности.

У линейной рекурсии 2-го порядка с уравнением $f_{n+2}=k1\cdot f_{n+1}+k2\cdot f_n$, где «n» – целое неотрицательное число, с заданными начальными условиями f_0 и f_1, $\alpha=f_0/f_1$, отношение двух соседних членов последовательности f_{n+2}/f_{n+1} выражается **конечной цепной дробью регулярной структуры**. У такой дроби все неполные частные равны k1, все числители равны k2, конечный знаменатель всегда равен $k1+\alpha\cdot k2$, а «этажность» цепной дроби равна «n». Для канонического приведенного числового ряда **разностей** n-ых степеней корней характеристического уравнения отношение $\alpha=f_0/f_1$ равно нулю: $\boldsymbol{\alpha=0}$. Для канонического числового ряда **сумм** n-ых степеней корней характеристического уравнения это отношение равно $\boldsymbol{\alpha=f_0/f_1=2/k1}$.

Литература:

1. И.С. Ткаченко, Теорема о n - х степенях корней приведенного квадратного уравнения // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.17312, 14.02.2012
2. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993 г.
3. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
4. Stakhov A., Rozin B. The Golden Shofar . Chaos, Solitons & Fractals 2005, **26(3);** 677-684.
5. В.Л. Владимиров, А.П. Стахов, Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения) // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-67, публ.16523, 22.05.2011
6. Scott Olsen. The golden section. Nature`s greatest secret. Walker&Company, New York, 2006.



06.03.2012