

## ОБОБЩЁННАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗОЛОТЫХ СЕЧЕНИЙ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ЕЙ ХАРАКТЕРНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ ДЛИН, ПЛОЩАДЕЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Данная статья является вводной статьёй по теории системной гармонии в математических и физических объектах, развиваемой автором статьи (см., напр., [1-15]). Под системной гармонией понимается совокупность соотношений для данного объекта, выражающихся, как правило, красиво и изящно через фундаментальные математические и физические константы, в том числе через константы золотого сечения.

Вместе с тем до последнего времени и в течении многих веков существовала единственная геометрическая интерпретация золотого сечения, как деления отрезка длиной  $a+b$  на 2 части  $a, b$ , связанные соотношением:  $(a+b)/b = b/a$  при  $b > a$  или  $(a+b)/a = a/b$  при  $b < a$ . В случае  $a+b=1$  больший из отрезков равняется  $\phi = (-1 + \sqrt{5})/2 \approx 0,618$ , а меньший  $1-\phi = (3 - \sqrt{5})/2 = \phi^2$ .

Так как всё новые соотношения, равные константам золотого сечения  $\phi$  или  $\phi = 1/\phi = 1+\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$  постоянно находились в неживой и живой природе, установилось мнение, что константы  $\phi, \phi$  являются некими критериями гармонии и красоты, хотя их смысл оставался неясным.

Фактически впервые в [1,2,3] автором данной статьи было показано, что за феноменологическими константами золотого сечения  $\phi, \phi$  скрываются экстремумы некоторых функций (в частности, потенциалов или различных функций средних значений). Так, было установлено, что для гравитационных полей однородных сферических объектов (планет) ускорения свободного падения  $g$  оказываются равными в симметричных точках, отстоящих по

радиусу от поверхности планеты (внутри планеты и вне её) на расстояниях  $d_1 = d_2 = R \cdot \phi$  (где  $R$  – радиус планеты). При этом сумма потенциалов (и, следовательно, их среднее арифметическое) для симметричных относительно поверхности планеты точек имеет минимум именно при этих расстояниях.

Связь соотношений гармонии, выражающихся через константы  $\phi, \varphi$  с экстремумными различными функциями была найдена автором статьи и для геометрическо-физических объектов – кругового бильярда и оптического резонатора в работе [4].

В данной работе проводится подробное изложение результатов работы [5], в которой автором статьи была введена обобщённая геометрическая модель золотого сечения. При этом золотое сечение обобщается от указанного выше частного случая деления отрезка прямой линии до отношения переменных отрезков ломаной линии, одни концы которых закреплены, а другие движутся по окружности. Кроме того, показывается, что характерным отрезкам и фигурам, определяемым этой ломаной линией, соответствуют экстремумы длин, площадей или их производных.

Итак, определим вначале окружность золотой пропорции (см. рис 1). Пусть

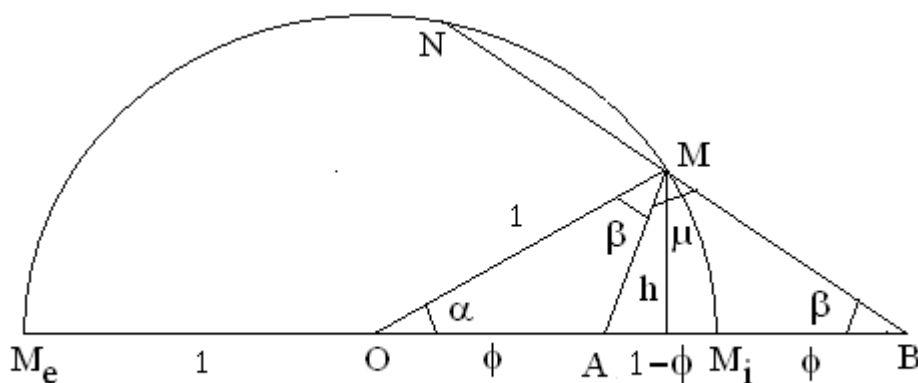


Рис. 1

даны две точки на плоскости  $A(0,0)$  и  $B(b,0)$ . Геометрическим местом точек  $M(x,y)$ , отношение расстояний от которых до точек  $A, B$  величина постоянная  $k = MB/MA = \text{const}$ , есть, как нетрудно показать, окружность с центром в точке  $O(-b/(k^2 - 1), 0)$  и радиусом  $OM = R = kb/(k^2 - 1)$ .

Действительно, поскольку  $MA^2 = x^2 + y^2$ ,  $MB^2 = (x - b)^2 + y^2$  и мы полагаем, что  $MB^2 = k^2 \cdot MA^2$ , то после несложных преобразований получим:

$$x^2 + y^2 + 2bx(k^2 - 1) = b^2 / (k^2 - 1) \quad (1)$$

Выделим далее в правой части (1) полный квадрат:

$$[x + b / (k^2 - 1)]^2 + y^2 = [kb / (k^2 - 1)]^2 \quad (2)$$

Соотношение же (2) есть уравнение окружности с радиусом  $R = kb / (k^2 - 1)$  и центром в точке  $(-b / (k^2 - 1), 0)$ .  $MA = MB$  при  $k = 1$ , при этом  $R = \infty$  и вблизи точек  $A, B$  окружность соответствует прямой линии, проходящей через середину отрезка  $AB$  перпендикулярно ему. Центр же окружности находится на прямой  $AB$  на бесконечном расстоянии от середины отрезка  $AB$ . При уменьшении  $k$  и прохождении значения  $k = 1$  центр окружности скачкообразно перемещается слева из  $-\infty$  вправо в  $+\infty$ !

Полагая  $AB = b = 1$ ,  $R = 1$ , получим, что  $k = \varphi = \phi + 1$ , а расстояние от центра окружности до точек  $A, B$  по модулю равны:  $OA = \phi$ ,  $OB = 1 + \phi = \varphi$ .

Обозначив  $\angle AOM = \alpha$ ,  $\angle ABM = \angle AMO = \beta$ ,  $\angle AMB = \mu$ , получим:

$$AM = \sqrt{2 - \phi \cdot (2 \cos \alpha + 1)}, \quad BM = \sqrt{3 - 2 \cdot (1 + \phi) \cdot \cos \alpha + \phi} \quad (3)$$

$$BM / AM = BM \cdot BN = \varphi, \quad \sin \beta = \sin \alpha / BM, \quad \sin \mu = \sin \alpha / (AM \cdot BM) \quad (4)$$

Таким образом, полученное геометрическое место точек  $M$  на плоскости – окружность радиуса  $R = 1$  позволяет обобщить понятие золотого сечения, как отношение отрезков переменной ломаной линии  $AMB$ . Причём, при движении точки  $M$  по окружности получается целый ряд характерных частных случаев золотых сечений, напр., по изменяющемуся углу  $\alpha$ .

I, II.  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \pi$ . При  $\alpha = 0$  точка  $M$  совпадает с точкой  $M_1$ , и мы получаем классическое, описанное в начале статьи, внутреннее (internal) деление отрезка  $AB = 1$  точкой  $M_1$  в отношении золотой пропорции.

При  $\alpha = \pi$  точка  $M$  совпадает с точкой  $M_e$ , и мы получаем внешнее (external) деление отрезка  $AB$  в отношении золотой пропорции:  $M_eB / M_eA = (2 + \phi) / (1 + \phi) = M_eA / AB = (1 + \phi) / 1$ .

Общим экстремумом для  $\alpha = 0, \pi$  является равный нулю минимум расстояния  $h = 1 \cdot \sin \alpha$  от точки  $M$  до прямой  $AB$ . При этом минимальны и равны нулю площади треугольников  $\triangle AMB$ ,  $\triangle OMA$ ,  $\triangle OMB$ .

Кроме того, при  $\alpha = 0$  ( $\pi$ ) становятся минимальными (максимальными) и длины отрезков  $AM$  и  $BM$ :  $AM_{\min} = 1 - \phi = \phi^2$ ,  $BM_{\min} = \phi$ ;  $AM_{\max} = 1 + \phi$ ,  $BM_{\max} = 2 + \phi$ . Минимальны (максимальны) и суммы, и разности этих отрезков

III.  $\alpha = \pi / 2$ . Этому случаю соответствует равный 1 максимум расстояния  $h = 1 \cdot \sin \alpha$  точки  $M$  от прямой  $AB$ . При этом становятся максимальными и площади треугольников  $\triangle AMB$ ,  $\triangle OMA$ ,  $\triangle OMB$ .

Далее, при  $\alpha = \pi / 2$  прямоугольные треугольники  $MOA$  и  $MOB$  подобны,  $MA = \sqrt{2 - \phi}$ ,  $MB = \sqrt{3 + \phi}$ ,  $\angle AMO = \angle OBM = \beta = \arctg \phi \approx 31,717^\circ$ ,  $\angle OAM = \angle OMB = \beta + \mu = \pi / 2 - \beta \approx 58,283^\circ$ ,  $\mu = \arctg \varphi - \arctg \phi \approx 26,565^\circ$ . При этом учтено, что  $\arctg \varphi + \arctg \phi = \pi / 2$ .

IV.  $\alpha = \arctg(1/2) = \arctg \varphi - \arctg \phi$ . В этом случае  $AM \perp BM$ ,  $\mu = \pi / 2$ ,  $AM = \sqrt{(2 - \phi) / 5}$ ,  $BM = \sqrt{(3 + \phi) / 5}$ ,  $\cos \alpha = 2 / \sqrt{5} = (\phi^2 + \varphi) / (\phi + \varphi)$ ,  $\sin \alpha = 1 / \sqrt{5} = 1 / (\phi + \varphi)$ ,  $\sin \beta = 1 / \sqrt{2 - \phi}$ . Данному случаю золотого сечения соответствуют максимум функции  $\sin \mu$  и минимум радиуса окружности, описанной около  $\triangle AMB$ ,  $2R_{AMB \min} = 1 = AB$ .

V.  $\alpha = \arccos \phi = \arcsin \sqrt{\phi}$ . В этом случае  $AM = \sqrt{\phi}$ ,  $BM = \sqrt{\varphi}$ ,  $\mu = \alpha \approx 51,827^\circ$ ,  $\beta = \arcsin \phi = \pi / 2 - \alpha \approx 38,172^\circ$ ,  $\beta + \mu = \pi / 2$ , точки  $M$  и  $N$  совмещаются и мы получаем 3 подобных прямоугольных треугольника:  $\triangle AMB$ ,  $\triangle AMO$ ,  $\triangle OMB$ . При этом  $AM \perp AB$ ,  $OM \perp BM$  и  $\cos \beta = \tg \beta = \sqrt{\phi}$ !

Этому случаю соответствуют: 1) максимумы производных (!) от  $AM(\alpha)$ ,  $BM(\alpha)$  и от их суммы  $d[AM(\alpha) + BM(\alpha)]/d\alpha_{\max} = \varphi$  (!) при  $\alpha = \arccos \varphi$ ;  
 2) минимум радиуса окружности, описанной около  $\triangle OMB$ :  $2R_{OMB\min} = \varphi = OB$ ; 2) равный нулю минимум площади сегмента, образованного хордой  $MN$ .

YI.  $\alpha = \pi/5$ . В этом случае  $BM = OM = 1$ ,  $AM = AO = M_1M = M_1B = \varphi$ ,  $\beta = \alpha$ ,  $\angle AMM_1 = 2\alpha$ ,  $\mu = 3\alpha$  и мы получаем 2 пары равных равнобедренных треугольников:  $\triangle OAM = \triangle BM_1M$ ,  $\triangle OM_1M = \triangle BAM$  и равнобедренный  $\triangle AMM_1$ , в виде «золотого» треугольника Евклида с углами при основании равными  $72^\circ$ .

Данному  $\alpha = 36^\circ$  соответствует равный нулю минимум разности среднего арифметического и среднего геометрического сторон  $AM$  и  $M_1M$   $\triangle AMM_1$ : минимум  $(AM + M_1M)/2 - \sqrt{AM \cdot M_1M} = 0$  при  $AM = M_1M$ . При этом в зависимостях этих средних от  $\alpha$  по отдельности была обнаружена «тонкая структура» в виде находящихся вблизи  $\alpha = \pi/5$  минимума и максимума.

YII.  $\alpha = \pi/3$ . В этом случае  $AM = \sqrt{2} \cdot \varphi$ ,  $BM = \sqrt{2}$ ,  $\triangle OMM_1$  равносторонний и, как и в пункте YI,  $\alpha = \pi/3$  соответствует равный нулю минимум разности среднего арифметического и среднего геометрического сторон  $OM$ (или  $OM_1$ ) = 1 и  $MM_1 = 2 \sin(\alpha/2)$ . Так как эти средние равны лишь при  $OM$ (или  $OM_1$ ) =  $MM_1$ , получаем, что минимум имеет место именно при  $\alpha = \pi/3$ .

Поскольку  $\triangle MOM_1$  всегда равнобедренный, можно воспользоваться и следующими неравенствами, выполняющимися для любого треугольника со сторонами  $a, b, c$ , лежащими напротив углов  $A, B, C$ :

$$\pi/3 \leq (aA + bB + cC) / (a + b + c) < \pi/2 \quad (5)$$

Дробь в (5) минимальна и равна  $\pi/3$  для равностороннего треугольника.

Можно использовать и другую серию неравенств, выполняющихся для любого треугольника с полупериметром  $p$ , площадью  $S$  и радиусами вписанной  $r$  и описанной  $R$  окружностей:

$$r \leq \sqrt{\sqrt{3} \cdot S / 3} \leq \sqrt{3}p / 9 \leq R / 2 \quad (6)$$

В неравенствах (6) знак равенства (т.е. минимум) также достигается для равностороннего треугольника.

УШ.  $\alpha = 2\pi/5$ . В этом случае  $AM = OM = 1$ ,  $BM = \varphi$ ,  $\beta = \pi/5$  и мы вновь, как и при  $\alpha = \pi/5$ , получаем «золотой» треугольник Евклида с аналогичным экстремумом: минимумом  $(AM + OM) / 2\sqrt{AM \cdot OM} - 1$  при  $AM = OM = 1$ .

В качестве неожиданного приложения полученных результатов отметим, что треугольник, близкий к треугольнику Евклида, был найден нами в [6] в расположении фундаментальных физических констант в пространстве размерностей, определяемом показателями степени массы, длины, времени у этих констант.

В заключение укажем, что для данной геометрической модели обобщённых золотых сечений автором статьи была найдена соответствующая физическая модель золотых сечений в виде эквипотенциальных окружностей для двух длинных параллельных противоположно-заряженных тел [7]. При этом было обнаружено много новых соотношений гармонии, получаемых уже из физических закономерностей, напр., при нахождении криволинейных интегралов 1-го рода от модуля электростатического поля вдоль эквипотенциальных линий.

Эквипотенциальные же линии двух длинных параллельных одноимённо-заряженных тел – овалы Кассини и их частный случай лемниската Бернулли явились основой для построения физической модели обобщённых золотых произведений [8].

Эквипотенциальные линии в виде эллипсов и ортогональные им силовые линии поля в виде софокусных гипербол, создаваемые тонким равномерно-

заряженным стержнем, были использованы в [9] для построения электростатической модели обобщённых золотых сумм и разностей. Отметим, что фокусы указанных эллипсов и гипербол находятся при этом на концах заряженного стержня.

Наконец, по аналогии с введённой обобщённой геометрической моделью золотых сечений автором статьи была построена модель обобщённых средних значений для любых двух функций [10]. При этом, как выяснилось, соотношениям гармонии для различных математических и физических объектов соответствуют экстремумы некоторых обобщённых средних для двух характерных для данного объекта функций [2,3,5,11].

Другой геометрической моделью обобщённых золотых сечений являются строфоида и её обобщения [13,14], позволяющие описывать геометрию энергия-импульс-масса диаграмм распада элементарных частиц. При этом, в частности, автором статьи была обнаружена новая нетривиальная закономерность для двухчастичных распадов элементарных частиц: кратность  $\pi$ ,  $\phi$  отношения интегралов от обратных функций: от импульса по массе и от массы по импульсу.

### *Литература*

1. *Шелаев А.Н.* Бистабильность масштабов математического маятника и золотые сечения (коды да Винчи) для гравитационных полей. Актуальные проблемы современной науки, 2008, № 4, - С.82-88.

2. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для внутренних и внешних гравитационных полей однородных тел и экстремумы функций средних значений для потенциалов и ускорений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 2, С.115-118.

3. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии в прямом и обратном циклах Карно и экстремумы функций средних значений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, №1, С.115-117.

4. *Шелаев А.Н.* Инварианты, экстремумы и соотношения гармонии в круговых бильярдах и оптических резонаторах. Актуальные проблемы современной науки, 2010, № 5, - С.61-63.

5. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии и экстремумы длин площадей и их производных в обобщённой модели золотого сечения. Актуальные проблемы современной науки, 2010, № 6, С.162-164.

6. *Шелаев А.Н., Тальдрик А.Ф.* Матрица размерностей фундаментальных физических констант. Актуальные проблемы современной науки, 2008, № 5, - С.150-156.

7. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для электростатической модели обобщённых золотых сечений – длинных параллельных противоположно-заряженных тел. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 3, С.131-134.

8. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для обобщённых золотых произведений – длинных параллельных одноимённо-заряженных тел. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 4, С.95-98.

9. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для электростатической модели золотых сумм и разностей – тонкого прямолинейного равномерно-заряженного тела. Актуальные проблемы современной науки. 2011, № 5, С.116-120.

10. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии в обобщённой геометрической модели золотых сечений и функций средних значений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 2, С.118-120.

11. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии и экстремумы функций средних значений для перехода сверхпроводник-проводник в магнитном поле. Актуальные проблемы современной науки, 2012, № 3.

12. *Шелаев А.Н.* Строфоида и её обобщения как кривые, описывающие энергия-импульс-масса диаграммы процессов распада элементарных частиц. Актуальные проблемы современной науки, 2010, № 3, С.102-106.

13. *Шелаев А.Н.* Нетривиальная закономерность для распада элементарных



частиц – кратность  $\pi$ ,  $\phi$  отношения интегралов от импульса и от массы.

Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 2, С.170-171.

14. *Шелаев А.Н.* Гармонические и квазигармонические соотношения для функций, описывающих излучение Планка. Актуальные проблемы современной науки, 2012, № 1, С.76-79.

15. *Шелаев А.Н.* К возможности существования двух компонент в излучении Планка, Актуальные проблемы современной науки, 2012, № 2, С.115-119.

### **Сведения об авторе**

Шелаев Анатолий Николаевич – доктор физ.-мат. наук, профессор

Место работы – НИИ ядерной физики МГУ им. М.В. Ломоносова

Автор и соавтор более 200 научных работ

Лауреат научной премии им. акад. Р.В.Хохлова

Основные направления исследований – нелинейная динамика, в том числе динамика генерации вращающихся кольцевых лазеров; невзаимные оптические эффекты и методы управления лазерным излучением и конкурентным взаимодействием встречных световых волн в усиливающих и нелинейных средах; системная гармония и методы исследования нестандартных математических и физических задач