

Золотое сечение как начало полезных структур

*Чем больше пользуются колодецем,
тем больше он даёт воды*

Золотые рекурсии. В общем случае рекурсия¹ – метод определения класса объектов или способы предварительного задания одного или нескольких (обычно простых) его базовых случаев с последующим заданием на их основе правила построения определяемого класса, ссылающегося прямо или косвенно на эти базовые случаи.

Другими словами, рекурсия – способ общего определения объекта или действия через себя с использованием ранее заданных частных определений, – *самоподобие задачи*.

Из классического квадратичного тождества $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ непосредственно следуют рекурсивные представления константы золотого сечения Φ в виде бесконечного вложенного радикала и бесконечной непрерывной (цепной) дроби, которые состоят только из единиц:

$$\Phi = \sqrt{1+\Phi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}} \approx 1.618;$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = [1; 1]. \quad (1)$$

Кроме прочего, данные формы представляют собой экзотическую запись простейших итерационных процедур.

Выберем некоторое ограниченное число a , в общем случае комплексное.

Выполним многократно любую из рекурсий (n – шаг итераций):

$$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} \quad \text{или} \quad a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}.$$

По мере выполнения данных операций величина $a \rightarrow \Phi$.

Можно дать художественно-символическую образную оценку.

Бесконечно вложенный радикал напоминает русскую матрёшку.

Ну, а бесконечная дробь походит на спуск в некую числовую преисподнюю.

Там уже нет места целым и рациональным числам-образованиям, и царят сплошные радикалы, иррациональности и трансцендентности.

Параллели с цепными дробями. Посмотрим на дробь (1) несколько шире. Известно [1], что любое вещественное число x можно эффективно и единственным образом представить рациональным приближением в виде цепной (непрерывной) дроби:

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}},$$

где a_0 – целое число, все остальные элементы a_i – положительные целые (натуральные) числа, которые вычисляются рекурсивно:

$$a_0 = \lceil x \rceil, \quad x_0 = x - a_0, \quad a_n = \lceil x_{n-1}^{-1} \rceil, \quad x_n = x_{n-1}^{-1} - a_n,$$

¹ <http://ru.wikipedia.org/?oldid=26002322>.

$\lceil x \rceil$ – целая часть числа x .

Согласно теореме Кузьмина [2, с. 13] вероятность появления среди элементов a_i натурального числа k задается эффективной формулой

$$p_k = \lg_2 \left(1 + \frac{1}{k(k+2)} \right) = \lg_2 \left(\frac{k+1}{k} \frac{k+1}{k+2} \right).$$

То есть в цепных дробях совокупного множества вещественных чисел наиболее вероятным является все-таки присутствие единицы

$$p_1 = \lg_2 \frac{4}{3} \approx 0,42.$$

А уже потом следуют двойки, тройки и т.д.

Но, оказывается, есть единственно уникальное образование (1), когда все элементы a_i представляют собой единицы.

Иначе говоря, в этом случае «плотность единиц равна единице» (по Кузьмину).

Такой редчайший эпизод приводит к константе золотого сечения Φ !

Иррациональность Φ . Бесконечность цепной дроби для числа Φ характеризует его иррациональность. В геометрии это означает, что отрезки, площади, объемы золотого сечения несоизмеримы в метрике обыкновенных дробей.

Вместе с тем указанные величины могут стать соизмеримыми в иррациональной системе мер с основанием числа золотого сечения Φ .

Скорость сходимости. Математические свойства числа Φ выделяют его среди других иррациональных "сородичей".

Например, в работах российских математиков А. Хинчина [1] и Н. Воробьева [3] показано, что главная особенность золотого сечения Φ состоит в том, что среди всех иррациональных чисел оно хуже всего поддается аппроксимации рациональными дробями.

Действительно, «в отношении ошибок при приближенном вычислении иррациональных чисел с помощью подходящих дробей и их разложений в непрерывные дроби число Φ представляет собой наихудший случай» [3, с. 86] в смысле скорости сходимости.

Но сама золотая константа от этого не поблекла, а наоборот заиграла в глазах исследователей новой гранью.

Хотя с другой стороны, константа $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ содержит радикал – корень из пяти, который лучше всех поддается аппроксимации среди других ближайших радикалов

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}} = [2; 4].$$

Известны и другие быстро сходящиеся процедуры скоростного приближения к золотой константе [4] под углом зрения перехода от квадратичных форм к цепным дробям [5].

Логика рассуждений. Золотое сечение в своих разнообразных математических формах даёт нам прекрасные образцы для формирования правильных логических рассуждений.

Особенно это касается такого важного аспекта в математике, как обобщение.

В частности, бесконечной цепная форма (1) позволяет легко вскрыть логику псевдонаучного обобщения золотого сечения, которой изобилуют работы отдельных

авторов. Да ещё, к сожалению, под прикрытием гармонии.

Пусть $a_i = 1 \Rightarrow x = \Phi$ – исходная цепная дробь с одними единицами, которая приводит к числу Φ . Тогда любая другая цепная дробь, у которой одно или несколько значений a_i отличается от 1, якобы обобщает исходную дробь. Отсюда вытекает, что цепные дроби являются обобщением золотого сечения. После чего опять же логически следует противоречие на уровне полного абсурда – практически вся числовая ось в такой своей стилизации обобщает золотое сечение [6].

Из того, что неповторимое золотое сечение можно представить не менее уникальной цепной дробью, вовсе не следует, что все остальные цепные дроби его обобщают. Чтобы это понять-принять, достаточно здравого смысла.

Приведенное разъяснение хорошо соотносится также с попытками подогнать всё под одну "золотую" гребёнку и в контексте геометрического деления фиксированного отрезка множеством псевдозолотых сечений, о чём подробно изложено в работах [7, 8].

Базовые соотношения между фундаментальными константами. Гениальный индийский математик Рамануджан, который частенько обращался к константе ЗС, подошёл к поиску таких взаимосвязей с красивыми и оригинальными аналогами, используя основание натурального логарифма и число π [9].

Можно сказать, что он фактически показал связь между фундаментальными числовыми константами (Φ, e, π), которая содержит бесконечную цепную дробь и другие "включения" (Φ, e, π) [10]:

$$\sqrt{\Phi \sqrt{5}} - \Phi = \frac{e^{-2\pi/5}}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \dots}}}}; \quad \sqrt{\phi \sqrt{5}} - \phi = \frac{e^{-\pi/5}}{1 - \frac{e^{-\pi}}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 - \frac{e^{-3\pi}}{1 + \dots}}}}.$$

где $\phi = \Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ – малая константа ЗС.

Это абсолютно точные равенства, выполняющиеся со сколь угодно большим количеством значащих цифр.

Одновременно они высвечивают невозможность установления между константами (Φ, e, π) конечной аналитической формы.

Это подтверждается и другим весьма примечательным равенством, теперь уже с бесконечным суммированием [11, № 629]:

$$\frac{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2}}{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-5\pi n^2}} = \sqrt{5\sqrt{5}-10} = \sqrt{5\phi^3} = (2-\phi)\sqrt{\phi}.$$

Его сходимость потрясающая. В зависимости от числа слагаемых N точность приближения примерно равна $\delta(N) \approx 10^{-N(1,35N+3)}$ и, в частности, достигает $\delta(2) \approx 10^{-12}$, $\delta(7) \approx 10^{-87}$.

Ещё одна бесконечная сумма [11, № 606], но уже без основания натурального логарифма, имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-2)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{[\ln(\sqrt{5}+2)]^2}{12} \approx 0,2376...$$

или с представлением через константу золотого сечения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\Phi-3)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{[\ln(2\Phi+1)]^2}{12} \approx 0,2376...$$

Продолжая тему с корнем из пяти, можно напомнить и другую формулу [11, № 642].

Но она, на наш взгляд, представлена в тексте с ошибками или опечатками.

Её правильная запись имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}\right) \frac{5^{-n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{2j+1}\right) \frac{5^{-n}}{2n+1} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{5}} \approx 1,1035...$$

Вложенные радикалы. В алгебре вложенным радикалом называется радикал, содержащий другой радикал.

Золотое сечение очень красиво записывается через бесконечно вложенный радикал:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad (2)$$

Довольно любопытна цепочка преобразований к такому радикалу от чисел Фибоначчи:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1};$$

$$x = \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0;$$

$$x = \sqrt{1+x} = \sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}} \rightarrow \Phi,$$

где x – отношение двух соседних чисел Фибоначчи (большее / меньшее).

Вложенный радикал (2) создаёт подоснову образования других самобытных "радикальных" структур.

Так, весьма оригинальный вложенный радикал образуется путём преобразования бесконечной суммы для основания натурального логарифма [12]

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

в виде

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{5} (1 + \dots) \right) \right) \right),$$

Отсюда следует

$$x^{e-2} = \sqrt[2]{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x} \sqrt[5]{x} \dots$$

Известна также общая форма $x^{\frac{1}{n-1}} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{x} \dots$, которая даёт разные варианты красивых вложений, например:

$$x = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}};$$

$$\sqrt{x} = \sqrt[3]{x \sqrt[3]{x \sqrt[3]{x \dots}}};$$

$$x+1 = \sqrt{1+x \sqrt{1+(x+1) \sqrt{1+(x+2) \sqrt{1+\dots}}}};$$

и в частности,

$$3 = \sqrt{1+2 \sqrt{1+3 \sqrt{1+4 \sqrt{1+\dots}}}}.$$

В ряде случаев бесконечно вложенные радикалы тождественны некоторому целому числу.

Так, с учётом равенства $1+4k(k-1) = (2k-1)^2$ для $(n, a, b) = (2, k(k-1), 1)$ имеем:

$$k = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Например,

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}; \quad 3 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}};$$

$$4 = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots}}}; \quad 5 = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}}.$$

Константа Париса, как производная от золотого сечения. Встроенный радикал (2) можно представить в рекурсивной форме последовательных приближений

$$\Phi_n = \sqrt{1 + \Phi_{n-1}} \rightarrow \Phi$$

для натурального $n \geq 2$ и фиксированного начального значения $\Phi_1 \geq 0$.

Парис Р. доказал (1987) [13], что при выборе единичного начального значения $\Phi_1 = 1$ переменная величина Φ_n стремится к константе Φ с постоянной скоростью, а именно

$$\Phi - \Phi_n \sim \frac{2c}{(2\Phi)^n},$$

где $c = 1,0986419643\dots$ – константа Париса [14, 15].

Иначе говоря,

$$c = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi - \Phi_n)(2\Phi)^n.$$

Данная константа может быть выражена также в виде произведения [16, с. 8]:

$$c = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{2\Phi}{\Phi + \Phi_n}.$$

Другую формулу даёт аналитическое решение функционального уравнения, выражающего связь между значением функции (или функций) в одной точке с её значениями в других точках:

$$F(x) = 2\Phi F\left(\Phi - \sqrt{\Phi^2 - x}\right)$$

для $|x| < \Phi^2$ с учётом начальных условий $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$.

Отсюда вытекает равенство [16, с. 8]

$$c = \Phi \cdot F(\Phi^{-1}).$$

Четыре знака после запятой даёт неплохая аппроксимация $c \approx \ln 3 = 1,0986\dots$

Обобщение "золотого" радикала. Выше было указано на то, что константа золотого сечения не обобщается в принципе. Но вот "единичный" или состоящий из одних единиц вложенный радикал для золотого сечения можно обобщить

$$x = \sqrt[k]{a + b \sqrt[k]{a + b \sqrt[k]{a + \dots}}},$$

что приводит к алгебраическому уравнению

$$x^k = a + b \sqrt[k]{a + b \sqrt[k]{a + b \sqrt[k]{a + \dots}}} \Rightarrow x^k = bx + a.$$

Естественно, что при этом нивелируются и опускаются все золотые окраски.

В частном случае $(k, a, b) = (3, 1, 1)$ приходим к хорошо известной пластиковой константе [17]

$$P = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}} = \frac{\sqrt[3]{9 + \sqrt{69}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{69}}}{\sqrt[3]{18}} \approx 1,3247\dots$$

Величина P является вещественным корнем полиномов $x^3 - x - 1$, $x^5 - x^4 - 1$.

Кстати, это наименьшее из чисел Пизо.

Напомним, целое алгебраическое число $\alpha > 1$ называется числом Пизо [18, с. 162], если все его сопряжённые, отличные от самого α , лежат внутри круга $|z| < 1$, то есть по абсолютной величине строго меньше единицы.

Числа Пизо обладают одним удивительным свойством: их степени "почти целые" [19]. Иначе говоря, это такие числа α , для которых расстояние от α^n (n – натуральное число) до ближайшего целого числа стремится к нулю. Именно это свойство делает их удобными кандидатами в качестве иррациональных оснований систем счисления.

Множество чисел Пизо замкнуто и потому содержит наименьший элемент – положительный корень $\lambda_1 \approx 1,3247$ уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ (пластическая² константа).

Второе наименьшее число $\lambda_2 \approx 1,380$ – корень уравнения $x^4 - x^3 - 1 = 0$.

Известны все 38 чисел Пизо, не превышающих золотое сечение (Dufresnoy и Pisot 1955, см. приложение)³.

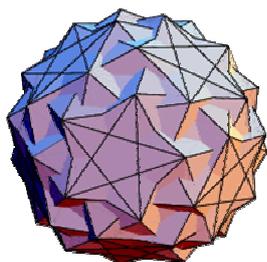
За исключением образующего полинома $x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + x - 1$, все остальные полиномы имеют вид:

$$R_{n+1}(x) = x^n \cdot \Phi_x + 1 \quad \text{или} \quad S_{n+2}(x) = x^n \cdot \Phi_x + x^2 - 1,$$

где $\Phi_x = x^2 - x - 1$ – "золотой" тринომ.

² В отличие от названия золотого сечения, слово "пластический" не имело отношения к веществу. Оно относилось исключительно к приданию трехмерной формы, как следствие кубического уравнения.

³ http://www.search.com/reference/Pisot-Vijayaraghavan_number; <http://mathworld.wolfram.com/PisotNumber.html>; http://en.wikipedia.org/wiki/Pisot%E2%80%9393Vijayaraghavan_number.



Примечательно, что в своей записи они имеют встроенный полином золотого сечения $x^2 - x - 1$.

Минимальное число Пизо (пластиковая константа P) удивительным образом взаимоувязано с золотым сечением через метрические свойства необычного тела (snub icosidodecahedron⁴).

С одной стороны, в своей геометрии оно содержит явные признаки константы ЗС, через правильную пятиугольную звезду.

$$\text{С другой стороны, радиус описанной сферы равен: } r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2P-1}{P-1}}.$$

Продолжение формирования структур. Весьма любопытно дальнейшее развитие идеи расширения вложенных радикалов, начиная с констант золотого сечения и Париса [20].

Гипотеза 1. Рассмотрим бесконечно вложенный радикал $x_n = \sqrt[k]{a + \sqrt[k]{a + \sqrt[k]{a + \sqrt[k]{a_n + \dots}}}}$ для целого $k > 1$, ненулевого $a \neq 0$ и уравнения $x^k = x + a$.

Пусть x – вещественный корень этого уравнения такой, что $x = x_n$ при $n \rightarrow \infty$.

Определим $y = \frac{a}{x} + 1$.

Тогда $(x - x_n)(ky)^n \rightarrow C_{a,k}$ для некоторой константы $C_{a,k}$.

Для квадратичного радикала $C_{1,2} = 2c$ – удвоенная константа Париса.

При $a = 2$ получаем $2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$ с константой $C_{2,2} = (\pi/2)^2$.

Для кубического радикала с его пластиковой константой P имеем $C_{1,3} = 1,8168834242447\dots$

Гипотеза 2. Последовательность констант $C_{1,k}$ при $k \rightarrow \infty$ также стремится к константе.

Экспериментально установлено, что для очень больших значений k

$$C_{1,10^6} = 1,3862943611198907\dots$$

Причём это весьма близко к величине $2 \ln 2 = 1.3862943611198906\dots$

Отсюда возникает разумное предположение, что последовательность констант $C_{1,k}$ имеет предел $\ln 4$.

Так или иначе, но оттолкнувшись от "золотого" вложенного радикала $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$, мы получаем последовательность констант $C_{1,k}$, которые, в свою очередь имеют свою асимптоту, вероятно, равную удвоенному логарифму $2 \ln 2$.

Триномы старших степеней. Речь идёт о трёхчленных полиномах. Они основаны на алгебраическом уравнении триномиального типа с наличием двух старших степеней:

$$x^p = x^{p-1} + 1. \tag{2}$$

Третья степень естественно является нулевой. Иначе можно просто сократить на x .

⁴ http://en.wikipedia.org/wiki/Snub_icosidodecadodecahedron;
<http://mathworld.wolfram.com/SnubIcosidodecadodecahedron.html>.

Положительные корни (2) иногда называют p -сечениями [21].

Примечательно, что для степеней не выше пятой $p \leq 5$ данный трином приводит к числам Пизо:

$$x^5 = x^4 + 1 \Rightarrow 1.3247179572447460260\dots$$

$$x^4 = x^3 + 1 \Rightarrow 1.3802775690976141157\dots$$

$$x^3 = x^2 + 1 \Rightarrow 1.4655712318767680267\dots$$

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow 1.6180339887498948482\dots$$

Первое из этих чисел является одновременно положительным корнем уравнения $x^3 - x - 1 = 0$, пластической константой и наименьшим числом Пизо.

Отсюда следует, что для степеней $p > 5$ трином старших степеней (2) уже не даёт числа Пизо (см. приложение).

Вследствие этого, максимальные по модулю корни тринома в этом случае, например, перестают быть подходящими кандидатами в качестве иррациональных оснований систем счисления.

Вместо заключения. Константа золотого сечения элегантно и одновременно просто представляется в виде бесконечного вложенного радикала или бесконечной непрерывной (цепной) дроби, которые состоят только из единиц.

Данное свойство просто обязано стать прародителем полезных математических структур. Что собственно и продемонстрировано в данной работе.

Одним из замечательных свойств фундаментальной константы золотого сечения Φ стало порождение другой постоянной – константы Париса.

Её значимость ещё предстоит изучить.

В частности, оттолкнувшись от "золотого" радикала $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$, через эту константу мы получаем последовательность других фиксированных чисел с асимптотой, равной удвоенному логарифму $2 \ln 2$.

Подобная, пусть отдалённая, но объективно существующая связь чисел Φ и 2, конечно же, не случайна.

На наш взгляд, она высвечивает ещё одну грань в разгадке "золотого" феномена.

Как-никак, но двойка характеризует дуальность, парность, симметрию, деление пополам и многие другие примечательные и полезные структуры в науке.

Литература:

1. Хинчин А.Я. Цепные дроби: 4-е изд. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 112 с.
2. Арнольд В.И. Цепные дроби. – М.: Центр непрерывного математического образования, 2001. – 40 с.
3. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.
4. Василенко С.Л. Златые цепи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15557, 22.09.2009. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161546.htm>.
5. Белянин В.С., Василенко С.Л. Золотоносный песок // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 03.09.2011. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=47&sm=2>.
6. Василенко С.Л. Общее и частное в систематике золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15307, 28.05.2009. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322073.htm>.

7. *Василенко С.Л.* Миф про обобщения золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.07.2011. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=32&sm=2>.
8. *Василенко С.Л.* Научная балда // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 04.09.2011. – <http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11333.html> // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.09.2011. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=48&sm=2>.
9. *Василенко С.Л.* Базовые соотношения между фундаментальными константами // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17327, 20.02.2012. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161934.htm>.
10. *Левин В.И.* Жизнь и творчество индийского математика С. Рамануджана // Сб. «Историко-математические исследования», т. 13. – М.: Физматгиз, 1960. – С. 335–378. – <http://mindspring.narod.ru/math/ega/Rama/Rama1.htm>.
11. *Ramanujan S.* Journal of the Indian Mathematical Society. – <http://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/collectedpapers/question/qJIMS.htm>.
12. *Weisstein E.W.* Nested Radical. – From MathWorld – A Wolfram Web Resource. – <http://mathworld.wolfram.com/NestedRadical.html>.
13. *Paris R.B.* An Asymptotic Approximation Connected with the Golden Number // American Mathem. Monthly. – 1987. – Vol. 94. – p. 272–278. – <http://www.maa.org/pubs/monthly.html>.
14. *Pegg E.J., Weisstein E.W.* Paris Constant. – From MathWorld – A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ParisConstant.html>.
15. *Sloane N.J.A.* Sequence A105415 in "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences". – <http://oeis.org/>.
16. *Finch S.R.* Encyclopedia of mathematics and its applications. Mathematical Constants. – 2003, Cambridge University Press. – <http://catdir.loc.gov/catdir/samples/cam034/2002074058.pdf>.
17. *Piezas T., van Lamoen F., Weisstein E.W.* Plastic Constant. – From MathWorld – A Wolfram Web Resource. – <http://mathworld.wolfram.com/PlasticConstant.html>.
18. *Касселс Д.В.С.* Введение в теорию диофантовых приближений. – М.: Изд. ин. лит, 1961. – 213 с.
19. *Егоров А.* Число Пизо // Квант. – 2005. – № 5. – С. 8–13; № 6. – С. 9–13. – <http://kvant.mccme.ru/pdf/2005-05.pdf>.
20. *Piezas T.* Golden Ratio and Nested Radicals. – 2010. – <http://sites.google.com/site/tpiezas/0014>.
21. *Василенко С.Л.* Незадачливые p -сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=50&sm=2>.

Приложение

Числа Пизо, не превышающие константу золотого сечения

№ п/п	Корень полинома – число Пизо	Стандартизированный полином	Минимальный полином
1	1,32471795724475	$x \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$R_3(x) = x^3 - x - 1$
2	1,38027756909761	$x^2 \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$x^4 - x^3 - 1$
3	1,44326879127037	$x^3 \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_5(x)$
4	1,46557123187677	$x^3 \cdot \Phi_x + 1$	$Q_3(x) = x^3 - x^2 - 1$
5	1,50159480353909	$x^4 \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_6(x)$
6	1,53415774491427	$x^4 \cdot \Phi_x + 1$	$R_5(x)$

7	1,54521564973276	$x^5 \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_7(x)$
8	1,56175206772030	$x^3(x^3 - 2x^2 + x - 1) + (x - 1)(x^2 + 1)$	$x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + x - 1$
9	1,57014731219605	$x^5 \cdot \Phi_x + 1$	$Q_5(x)$
10	1,57367896839352	$x^6 \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_8(x)$
11	1,59000537390136	$x^6 \cdot \Phi_x + 1$	$R_7(x)$
12	1,59118430566710	$x^7 \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_9(x)$
13	1,60134733378764	$x^7 \cdot \Phi_x + 1$	$Q_7(x)$
14	1,60175586169698	$x^8 \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_{10}(x)$
15	1,60798272792820	$x^8 \cdot \Phi_x + 1$	$R_9(x)$
16	1,60812838518739	$x^9 \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_{11}(x)$
17	1,61193039656412	$x^9 \cdot \Phi_x + 1$	$Q_9(x)$
18	1,61198342124649	$x^{10} \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_{12}(x)$
19	1,61430682325715	$x^{10} \cdot \Phi_x + 1$	$R_{11}(x)$
20	1,61432641493913	$x^{11} \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_{13}(x)$
21	1,61574920275521	$x^{11} \cdot \Phi_x + 1$	$Q_{11}(x)$
22	1,61575651754084	$x^{12} \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_{14}(x)$
23	1,61662968439457	$x^{12} \cdot \Phi_x + 1$	$R_{13}(x)$
24	1,61663243538791	$x^{13} \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_{15}(x)$
25	1,61716929635509	$x^{13} \cdot \Phi_x + 1$	$Q_{13}(x)$
26	1,61717033617202	$x^{14} \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_{16}(x)$
27	1,61750090543132	$x^{14} \cdot \Phi_x + 1$	$R_{15}(x)$
28	1,61750129981291	$x^{15} \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_{17}(x)$
29	1,61770506995756	$x^{15} \cdot \Phi_x + 1$	$Q_{15}(x)$
30	1,61770521988846	$x^{16} \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_{18}(x)$
31	1,61783092878897	$x^{16} \cdot \Phi_x + 1$	$R_{17}(x)$
32	1,61783098587781	$x^{17} \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_{19}(x)$
33	1,61790858176717	$x^{17} \cdot \Phi_x + 1$	$Q_{17}(x)$
34	1,61790860352781	$x^{18} \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_{20}(x)$
35	1,61795651995356	$x^{18} \cdot \Phi_x + 1$	$R_{19}(x)$
36	1,61795652825398	$x^{19} \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_{21}(x)$
37	1,61798612538525	$x^{19} \cdot \Phi_x + 1$	$Q_{19}(x)$
38	1,61798612855286	$x^{20} \cdot \Phi_x + x^2 - 1$	$S_{22}(x)$
39	1,61803398874989	Φ_x	Φ_x

$$\Phi_x = x^2 - x - 1;$$

$$R_m(x) = x^m - \sum_{k=m-2}^0 x^k \Leftrightarrow x^{m-1}\Phi_x + 1;$$

$$Q_m(x) = x^m - \sum_{k=\frac{m-1}{2}}^0 x^{2k} \Leftrightarrow x^m\Phi_x + 1;$$

$$S_m(x) = x^m - x^{m-1} - x^{m-2} + x^2 - 1 = x^{m-2}\Phi_x + x^2 - 1.$$

© Василенко, 2012 

