

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ И НОВЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Метод золотого сплайна

В.Г.Соловьев

АННОТАЦИЯ

Автором предлагается оригинальный метод вычисления коэффициентов при аппроксимации кубическими сплайнами функции одной переменной, заданной в виде сетки значений с равномерным или неравномерным шагом. Отличительной особенностью метода является то, что коэффициенты аппроксимирующего сплайна на любом отрезке сетки представлены в виде математически точных выражений, каждое из которых отображается конечным рядом, сопряженным с константами, являющимися определенными функциями Золотого Сечения.

Полученные зависимости позволяют при поиске коэффициентов сплайнов не только исключить общепринятую трудоемкую процедуру составления и решения системы линейных алгебраических уравнений, но и производить независимые вычисления коэффициентов сплайнов отдельно для любого отрезка. Представленные формулы просты и удобны с точки зрения вычислительной математики. Реализующий их алгоритм практически неограничен количеством точек при минимальных затратах времени на вычисления.

1.Введение. Математическая теория аппроксимации кривых сплайн-функциями получила развитие за последние 25-30 лет. За это время создана теоретическая база и разработано достаточно обширное программное обеспечение [1,2] для практического применения сплайнов в различных областях науки и техники [3]. В настоящее время методы сплайн-аппроксимации получили особую актуальность с развитием современной компьютерной техники особенно при обработке фото и видео изображений.

Целью сплайн-метода является упрощение алгоритма вычислений при аппроксимации плоских кривых кубическими сплайнами за счет исключения из алгоритма операций по составлению и решению систем линейных уравнений, что, в конечном счете, приводит к повышению скорости вычислений.

Действительно, вычисления коэффициентов сплайнов практически осуществимо только с использованием компьютеров, т.к. приходится производить операции по решению громоздких систем уравнений, число которых может достигать нескольких десятков, сотен, а зачастую тысяч и более, в зависимости от количества аппроксимирующих узлов. Применение метода приобретает особую значимость при обработке методами фотограмметрии плоских изображений трехмерных моделей различных ракурсов одного объекта, т.к. для получения реальной трехмерной картины модели приходится обрабатывать массивы данных, полученные по измерениям координат огромного количества опорных точек. Как будет показано ниже, требуемый эффект достигается путем определения двухмерных массивов (матриц), содержащих строго заданные константы для вычисления коэффициентов сплайнов. Причем указанные константы зависят только от количества и положения узлов заданной кривой, а их определение основано на свойствах Золотого Сечения .

2. Теоретическое обоснование сплайн-метода.

Наиболее широкое распространение получили методы аппроксимации кубическими сплайнами [4,5], использование которых вытекает из теории упругости, согласно которой упругая недеформированная линейка, закрепленная в узловых точках, имеет отличные от нуля производные только третьего и низших порядков.

Пусть имеем ряд точек, последовательно расположенных на заданной кривой в узлах $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, с соответствующими значениями $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Если общее число точек равно N , то общее число отрезков равно $N - 1$. Тогда $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ есть номер сплайна.

Уравнение третьей степени для отрезка или сплайна с номером i имеет вид

$$y_i(x) = d_i + a_i \cdot (x - x_{i-1}) + b_i \cdot (x - x_{i-1})^2 + c_i \cdot (x - x_{i-1})^3 \quad (1)$$

где a_i, b_i, c_i - искомые коэффициенты сплайнов, определяемые из дополнительных условий.

Значения сплайн-функции на концах соответствующего i -ого отрезка имеет вид

$$y_i(x_{i-1}) = d_i \quad (2)$$

$$y_i(x_i) = d_i + a_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + b_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 + c_i \cdot (x_i - x_{i-1})^3 \quad (3)$$

Откуда для каждого i -ого отрезка получаем первое основное уравнение

$$a_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + b_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 + c_i \cdot (x_i - x_{i-1})^3 = f_i \quad (4)$$

где f_i - разность ординат на концах i -ого отрезка определяется как

$$f_i = y_i(x_i) - y_i(x_{i-1}) \quad (5)$$

Число уравнений вида (4) равно числу отрезков ($N - 1$).
Первая производная для сплайн-функции имеет вид

$$y'_i(x) = a_i + 2 \cdot b_i \cdot (x - x_{i-1}) + 3 \cdot c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 \quad (6)$$

Откуда первые производные для сплайн-функции в сопряженных узловых точках определяются зависимостями

$$y'_i(x_i) = a_i + 2 \cdot b_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + 3 \cdot c_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 \quad (7)$$

$$y'_{i+1}(x_i) = a_{i+1} \quad (8)$$

Исходя из главного условия "сшивания" соседних сплайнов - непрерывности и равенства первых производных в узлах - имеем

$$y'_i(x_i) = y'_{i+1}(x_i) \quad (9)$$

Откуда для каждого i -ого узла (за исключением первого и последнего) получаем второе основное уравнение

$$a_i + 2 \cdot b_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + 3 \cdot c_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 = a_{i+1} \quad (10)$$

Вторая производная для сплайн-функции имеет вид

$$y''_i(x) = 2 \cdot b_i + 6 \cdot c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (11)$$

Откуда вторые производные для сплайн-функции в сопряженных узловых точках определяются зависимостями

$$y''_i(x_i) = 2 \cdot b_i + 6 \cdot c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (12)$$

$$y''_{i+1}(x_i) = 2 \cdot b_{i+1} \quad (13)$$

Также, исходя из главного условия "сшивания" соседних сплайнов - непрерывности и равенства вторых производных в узлах – имеем

$$y''_i(x_i) = y''_{i+1}(x_i) \quad (14)$$

Откуда для каждого i -ого узла получаем третье основное уравнение

$$b_i + 3 \cdot c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = b_{i+1} \quad (15)$$

При параметрическом представлении уравнения кривой для равномерной или неравномерной сетки с главным параметром - номер точки

$$x_i - x_{i-1} = 1 \quad (16)$$

Тогда уравнения (4), (10) и (15) образуют основную систему

$$\left. \begin{aligned} a_i + b_i + c_i &= f_i \\ a_i + 2 \cdot b_i + 3 \cdot c_i &= a_{i+1} \\ b_i + 3 \cdot c_i &= b_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для решения системы уравнений (17) необходимо и достаточно задать граничные условия на концах x_0, x_n , т.е. принять в качестве известных параметров соответствующие им значения a_0, a_n . В общем случае указанные условия зависят от конкретной задачи. Например, используют, так называемые, условие свободных концов, условие нагруженных концов, условие периодичности и т.д. Несложно получить формулы граничных условий для указанных выше коэффициентов, исходя из того, что три первые и три последние узловые точки кривой лежат на кривых третьего порядка с производными в узлах x_0, x_n первого порядка. Тогда

$$\mathbf{a}_0 = (-3 \cdot f_1 + 4 \cdot f_2 - f_3)/2 \quad (18)$$

$$\mathbf{a}_n = (f_{n-3} - 4 \cdot f_{n-2} + 3 \cdot f_{n-1})/2 \quad (19)$$

В результате имеем общий матричный вид системы линейных уравнений со столбцом неизвестных коэффициентов сплайнов и столбцом свободных членов

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 3 \\ \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ \vdots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ \dots \\ a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 - a_0 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ \\ -a_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_n \\ \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Число U уравнений системы (20) равно числу неизвестных и определяется соотношением

$$U = 3 \cdot N - 4 \quad (21)$$

Именно на решении подобных систем уравнений и построены алгоритмы определения параметров сплайн-функций [6]. Причем для решения обычно используется метод Гаусса [7] или метод прогонки [8], а также другие методы решения систем линейных уравнений с диагональными матрицами, в том числе и метод обратных матриц [9].

3. Необычный ряд Золотого Сечения.

Для того, чтобы применить сплайн-метод для аппроксимации заданной кривой, необходимо построить и решить систему уравнений вида (20). Если количество точек-узлов кривой исчисляется сотнями или тысячами или, что вполне реально, десятками тысяч и даже более, легко себе представить сложность этой нелегкой задачи даже с применением современных компьютеров.

Выход из сложившейся ситуации достаточно парадоксален: при решении задачи сплайн-метода отказаться от построения системы уравнений. Оказывается, что с использованием свойств Золотого Сечения можно найти точное решение системы уравнений и, следовательно, для каждого искомого коэффициента для любого отрезка прямой заранее найти общие точные формулы, работающие независимо (!) от количества узловых точек.

Сначала определим необходимые для решения свойства Золотого Сечения. Как известно [10], Золотое Сечение представлено каноническим уравнением вида

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (22)$$

положительным корнем которого является известное Золотое число

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618032 \dots \quad (23)$$

Золотое Сечение неразрывно связано с рядом Фибоначчи **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...** каждый член которого равен сумме двух предыдущих рекурсивной функцией

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (24)$$

Тогда любой член последовательности Фибоначчи определяется известной зависимостью Бине [11]

$$F_n = \frac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (24)$$

Уравнение Золотого сечения можно представить обобщенной формулой [12]

$$x^2 - p \cdot x - 1 = 0 \quad (25)$$

решения которого при целых **p** дают определения, так называемых, металлических сечений: золотого при **p = 1**, серебряного **p = 2**, бронзового при **p = 3**, медного при **p = 4** и т.д. Встречаются и другие определения свойств Золотого Сечения [13]. В частности, отталкиваясь от определения золотого сечения через цепную дробь, серебряными называют любые цепные дроби, в которых знаменатели постоянны:

$$p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \dots}}}} \quad (26)$$

Оказывается, что для решения системы уравнений (20) необходимо и достаточно решить Золотое уравнение (25), положив (!) в нем

$$p = \sqrt{12} \quad (27)$$

В виде цепной дроби один из корней уравнения (25) будет выглядеть так

$$x = \sqrt{12} + \frac{1}{\sqrt{12} + \frac{1}{\sqrt{12} + \frac{1}{\sqrt{12} + \frac{1}{\sqrt{12} + \dots}}}} \quad (28)$$

Обобщая формулу Бине (24), можно доказать, что

$$L_n = \frac{\left(\frac{4+\sqrt{12}}{2}\right)^n - \left(\frac{4-\sqrt{12}}{2}\right)^n}{\sqrt{12}} = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \quad (29)$$

и получить ряд в виде следующей последовательности чисел:

$$1, 4, 15, 209, 780, 2911, 10864 \dots \quad (30)$$

в котором каждый последующий член равен учетверенному предыдущему за вычетом предшествующего предыдущему, т.е. рекурсивно

$$L_n = 4 \cdot L_{n-1} - L_{n-2} \quad (31)$$

В пределе $n \rightarrow \infty$ отношение последующего члена ряда (31) к предыдущему равно

$$q = 2 + \sqrt{3} \quad (32)$$

при этом

$$Q = q^{-1} = 2 - \sqrt{3} \quad (33)$$

Необычность ряда (30) состоит в том, как будет показано ниже, он содержит значения, которые неразрывно связаны с вычислениями коэффициентов сплайнов.

4. Формулы для определения коэффициентов сплайна.

Решение системы уравнений (20) есть суть ряда Золотого сечения с корнем из числа 12.

Математически точные формулы для вычисления коэффициентов кубического сплайна имеют следующий вид

$$b_1 = 3 \cdot \left(1 - \frac{L_{n-1}}{L_n}\right) + 3 \cdot \sum_{i=3}^n \{(-1)^i \cdot \left(\frac{L_{n-i+2}-L_{n-i+1}}{L_n}\right) \cdot f_i\} + \left(2 \cdot \frac{L_{n-1}}{L_n} - 1\right) \cdot a_0 + (-1)^{n-1} \cdot \frac{L_3}{4 \cdot L_n} \cdot a_n \quad (34)$$

$$c_1 = -\left(2 - 3 \cdot \frac{L_{n-1}}{L_n}\right) + 3 \cdot \sum_{i=3}^n \{(-1)^{i+1} \cdot \left(\frac{L_{n-i+2}-L_{n-i+1}}{L_n}\right) \cdot f_i\} + \left(1 - \frac{L_{n-1}}{L_n}\right) \cdot a_0 + (-1)^n \cdot \frac{L_3}{4 \cdot L_n} \cdot a_n \quad (35)$$

$$a_k = 3 \cdot \frac{L_{n-k+1}}{L_n} \cdot \sum_{i=2}^k \{(-1)^{i+k} \cdot (L_i - L_{i-1}) \cdot f_i\} + 3 \cdot \frac{L_k}{L_n} \cdot \sum_{i=k+1}^n \{(-1)^{i+k+1} \cdot (L_{n-i+2} - L_{n-i+1}) \cdot f_i\} + (-1)^k \left(\frac{L_{n-k+1}}{L_n}\right) \cdot a_0 + (-1)^{k+n} \cdot \frac{L_k}{L_n} \cdot a_n \quad (36)$$

$$b_k = 3 \cdot \frac{L_{n-k+2}-2 \cdot L_{n-k+1}}{L_n} \cdot \sum_{i=2}^k \{(-1)^{-i+k+1} \cdot (L_i - L_{i-1}) \cdot f_i\} + 3 \cdot \frac{L_{k+1}-2 \cdot L_k}{L_n} \cdot \sum_{i=k+1}^n \{(-1)^{-i+k+1} \cdot (L_{n-i+2} - L_{n-i+1}) \cdot f_i\} + (-1)^{k-1} \cdot \left(\frac{L_{n-k+2}-2 \cdot L_{n-k+1}}{L_n}\right) \cdot a_0 + (-1)^{n-k} \cdot \frac{L_{k+1}-2 \cdot L_k}{L_n} \cdot a_n \quad (37)$$

$$c_k = 3 \cdot \frac{L_{n-k+1}-2 \cdot L_{n-k}}{L_n} \cdot \sum_{i=2}^k \{(-1)^{k+i} \cdot (L_i - L_{i-1}) \cdot f_i\} + 3 \cdot \left(\frac{L_{k+1}-L_k}{L_n}\right) \cdot \sum_{i=k+2}^n \{(-1)^{k+i} \cdot (L_{n-i+2} - L_{n-i+1}) \cdot f_i\} + (-1)^k \cdot \left(\frac{L_{n-k+1}-L_{n-k}}{L_n}\right) \cdot a_0 + (-1)^{n+k+1} \cdot \frac{L_{k+1}-L_k}{L_n} \cdot a_n + 3 \cdot \left(\frac{L_{k+1}-L_k}{L_n} \cdot \left(\frac{L_{n-i+1}-L_{n-i}}{L_n} - 1\right) \cdot f_{k+1}\right) \quad (38)$$

Таким образом, вычислив значения a_i , b_i , c_i по представленным выше формулам (34-38), можно определить любые значения сплайн-функции по формуле (1), задавшись значением x . Главной особенностью применения формул для вычисления коэффициентов является то, что для определения значения функции в заданной точке необходимо и достаточно вычислить соответствующие коэффициенты только в рамках заданного отрезка, не вычисляя все остальные, как в известных методах, при этом, естественно, в расчетах участвуют координаты всех точек сплайна.

Несмотря на то, что значения L_n ряда (30) являются быстро возрастающими величинами при большом количестве узлов, что вызывает определенные неудобства с точки зрения вычислительной математики, в формулах (34) -(38) явно прослеживаются

только дробные соотношения, включающие значения L_n ряда (30), не превышающие единицы.

Так, в формулах (34-38) имеются дроби вида L_{n-1}/L_n , которые для достаточно больших n стремятся к значению из формулы (33). Соответственно, можно записать соотношения для общего вида

$$L_{n-k}/L_n = Q^k, \quad k=1, 2, 3, \dots, n \quad (39)$$

Так же в формулах (34-38) имеются дроби вида $L_i \cdot L_{n-i}/L_n$, в которых в числителе дроби перемножаются члены, симметрично расположенные относительно середины ряда, а в знаменателе дроби - крайний правый член ряда. Интересная особенность ряда (30) состоит в том, что при большом количестве узловых точек, указанное соотношение в срединной части ряда является постоянным (!) и стремится к значению $1/\sqrt{12}$, а на краях, когда $i = 1$, соответствует $Q = 2 - \sqrt{3}$.

При вычислениях на ПЭВМ для такого рода представления дроби целесообразно применить формулу

$$L_i \cdot L_{n-i}/L_n = \sum_{i=1}^k Q^{2 \cdot i - 1} \quad (40)$$

где $k = n/2$ для четного n и $k = \frac{n-1}{2}$ для нечетного n .

Формулы (39) и (40) можно рассматривать в качестве прикладных для удобства вычислений.

5. Пример использования метода золотого сплайна.

Для подтверждения рассмотренной выше математической теории аппроксимации функции кубическими сплайнами, рассмотрим следующий пример.

Пусть имеется **таблица 1**, включающая некоторую гладкую функцию из 10 точек, заданных координатами X и Y:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-9.000	-7.000	-5.000	-3.000	-1.000	1.000	3.000	5.000	7.000	9.000
Y	4.500	5.608	6.877	8.100	8.890	8.890	8.100	6.877	5.608	4.500

Вычислим столбец свободных членов матрицы (20) и начальных условий (18) и (19) и также запишем в **таблицу 2**:

Формула	-a ₀	a _n	dY ₂ - a ₀	dY ₃	dY ₄	dY ₅	dY ₆	dY ₇	dY ₈	dY ₉	dY ₁₀
Значение	-1.027	-1.027	0.081	1.270	1.223	0.791	0.000	-0.791	-1.223	-1.270	-1.108

Применяя метод сплайн аппроксимации, вычислим значение функции в одной единственной точке. Например, для заданной функции это точка максимума при $X = 0$. Для этого необходимо и достаточно вычислить коэффициенты a_5, b_5, c_5 с учетом приведенной выше таблицы и формул (36), (37) и (38), не вычисляя других коэффициентов, а именно:

$$a_5 = -0.015 \cdot 0.081 + 0.046 \cdot 1.270 - 0.170 \cdot 1.223 + 0.634 \cdot 0.791 + 0.634 \cdot 0 - 0.170 \cdot (-0.790) + 0.046 \cdot (-1.223) - 0.012 \cdot (-1.270) + 0.004 \cdot (-1.108) + 0.010 \cdot 1.027 - 0.001 \cdot (-1.027) = \mathbf{0.432}$$

$$b_5 = -0.027 \cdot 0.081 - 0.080 \cdot 1.270 + 0.295 \cdot 1.223 - 1.098 \cdot 0.791 + 1.098 \cdot 0 - 0.294 \cdot (-0.790) + 0.079 \cdot (-1.223) - 0.022 \cdot (-1.270) + 0.007 \cdot (-1.108) - 0.018 \cdot 1.027 - 0.002 \cdot (-1.027) = \mathbf{-0.432}$$

$$c_5 = -0.011 \cdot 0.081 + 0.034 \cdot 1.270 - 0.125 \cdot 1.223 + 0.464 \cdot 0.791 - 0.732 \cdot 0 + 0.464 \cdot (-0.790) - 0.125 \cdot (-1.223) + 0.034 \cdot (-1.270) - 0.011 \cdot (-1.108) + 0.008 \cdot 1.027 + 0.004 \cdot (-1.027) = \mathbf{0.000}$$

Подставим найденные коэффициенты в формулу сплайна (1) и получим численное значение функции в точке $X = 0$

$$y(0) = 8.890 + 0.432 \cdot 0.5 - 0.432 \cdot 0.5^2 + 0.000 \cdot 0.5^3 = \mathbf{8.999}$$

Для простоты в вычисления вставлялись округленные значения до трех знаков после запятой. Таблица 1 отображает численные значения при $a = 9$ для одной из замечательных функций [14] - Локона Анъези, которая представлена известным уравнением

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

Очевидно, что при $a = 9$ и $X = 0 \rightarrow y = 9$

Результат сплайн-аппроксимации с заданной точностью совпал с теоретической кривой. Примечательно то, что для вычисления значений какой-либо другой функции на 5-ом отрезке достаточно в числовые формулы подставить данные изменений ординат по аналогии с данными таблицы 2.

6. Основные выводы.

1. Разработан метод сплайн-аппроксимации, позволяющий вычислять коэффициенты сплайн-функций без составления и решения громоздких систем линейных уравнений.

2. Полученные формулы позволяют производить вычисление любого из коэффициентов сплайна для любого отрезка независимо от других.

3. Значительно упрощен алгоритм вычислений, что позволяет существенно повысить скорость и точность расчетов на ЭВМ при одновременном упрощении программного кода в том числе и при его отладке, что имеет определяющее значение при решении оперативных задач

4. Полученные результаты позволяют обобщить целый класс задач, связанный с аппроксимацией кривых кубическими сплайнами, т.к. при решении поставленной задачи используются матрицы заранее вычисленных коэффициентов.

5. Метод сплайн-аппроксимации неразрывно связан с Золотым Сечением, что доказывает гармоничность метода и определяет его природную сущность.

6.Список литературы

- 1.Гребенников А.И. Алгоритмы и программы аппроксимации функций одной или нескольких переменных сплайнами и приложения. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1987.
2. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ. - Томск: МП "РАСКО", 1991.
- 3.Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам : Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1985.
- 4.Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980.
- 5.Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороспелов В.А. Сплайны в инженерной геометрии. -М.: Машиностроение, 1985.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.
8. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1987.
9. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, — М.: Вильямс, 2006
- 10.Фернандо Корбалан. Золотое сечение. Де Агостини. 2013.
- 11.Материалы из Википедии.
http://ru.wikipedia.org/wiki/Числа_Фибоначчи#.D0.A4.D0.BE.D1.80.D0.BC.D1.83.D0.BB.D0.B0_.D0.91.D0.B8.D0.BD.D0.B5
12. А.П. Стахов Металлические Пропорции – новые математические константы Природы. Академия Тринитаризма. <http://trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321079.htm>
- 13.Материалы из Википедии. http://ru.wikipedia.org/wiki/Серебряное_сечение
14. Корн Г., Корн Т. — Справочник по математике для научных работников и инженеров.2.6-1.