

СООТНОШЕНИЯ ГАРМОНИИ И ЗОЛОТЫЕ СЕЧЕНИЯ КАК АТТРАКТОРЫ В БЕСКОНЕЧНЫХ САМОПОДОБНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКО - ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

На примере плоских и объёмных самоподобных геометрическо-физических структур, образованных бесконечными наборами постоянных омических сопротивлений, показано, что реализующиеся в них золотые сечения и иные нетривиальные соотношения гармонии не зависят от числа элементов в структуре и от величины сопротивлений в бесконечно удалённых элементах. При этом на примере цепных дробей продемонстрировано существование функций, значения которых равны константам золотого сечения $\phi \approx 0,618$ или $\Phi \approx 1,618$ в некоторых областях значений аргументов функций. В то же время показано, что иррациональность констант золотого сечения может налагать запрет на точную реализацию золотых сечений, хотя при этом возможны сколь угодно близкие рациональные соотношения гармонии.

Вопрос о нахождении физического смысла в соотношениях гармонии, под которыми понимаются соотношения, выражающиеся, как правило, компактно и изящно через алгебраические иррациональные константы золотого сечения $\phi = (-1 + \sqrt{5})/2$, $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$, $\Phi = \phi^{-1} = \phi + 1$ или через фундаментальные трансцендентные константы π , e и т. д., естественно, должен решаться отдельно в каждом конкретном случае. При этом часто бывает так, что проще найти соотношение гармонии, чем понять его суть и выяснить, что является причиной появления найденного соотношения.

Согласно концепции автора данной статьи, неоднократно подтверждённой ранее в предыдущих работах (см., напр. [1-3]), важнейшим критерием неслучайности появления соотношений гармонии является наличие экстремума у характерных для данной задачи функций (напр., потенциалов, обобщённых

функций средних значений) при значениях параметров задачи, при которых реализуется ланное соотношение гармонии.

В данной статье рассматривается специфика соотношений гармонии и устанавливается их нетривиальный физический смысл для бесконечных периодических геометрическо-физических структур, образованных различными комбинациями постоянных омических сопротивлений

Рассмотрение указанных структур, весьма удобных для теоретического моделирования и анализа, проводится в несколько этапов:

1. Вначале выбирается одна из бесконечных геометрических структур, между узлами которой помещаются сопротивления. Причём такие модельные структуры могут быть весьма разнообразными: как плоскими 2-х мерными, так и объёмными 3-х мерными, как неограниченными, так и «схлопывающимися».

2. Затем эта бесконечная структура приводится к конечной эквивалентной структуре, пользуясь: а) правилами суммирования последовательных и параллельных сопротивлений, б) соединением или, наоборот, разъединением узлов, имеющих одинаковые потенциалы, в) подключением к различным узлам структуры дополнительных источников тока разной полярности, компенсирующим токи в определённых областях структуры.. При этом используется важное физическое обстоятельство, состоящее в том, что суммарное сопротивление бесконечной структуры оказывается отличным от нуля, что связано с тем, что токи через достаточно удалённые от источника тока сопротивления практически равны нулю. И поэтому, что также очень важно для упрощения структуры, добавление ещё одного звена сопротивлений на бесконечности или в начале цепи не меняет результирующего сопротивления всей бесконечной структуры.

3. Далее детально анализируются структуры, общее (суммарное) сопротивление которых либо непосредственно выражается через константы ϕ , Φ , либо через их простые комбинации. При этом используется то, что любое целое число можно точно выразить через эти константы. Особенно красиво

выражаются через ϕ , Φ наиболее часто встречающиеся в соотношениях гармонии первые простые числа, $2 = \phi^2 + \Phi^1 = \phi\Phi + \Phi\phi$, $3 = \phi^2 + \Phi^2$, $5 = (\phi + \Phi)^2$, $7 = \phi^4 + \Phi^4$.

Первой найденной структурой, у которой её суммарное сопротивление $r_{\Sigma AB}$ оказалось пропорциональным константе $\Phi = \phi^{-1}$, показана на рис.1 а):

$$r_{\Sigma AB} = r_1 / 2 + \sqrt{(r_1 / 2)^2 + r_1 \cdot r_2} \quad , \quad r_{\Sigma AB} = r \cdot \Phi \quad \text{при} \quad r_1 = r_2 = r \quad (1)$$

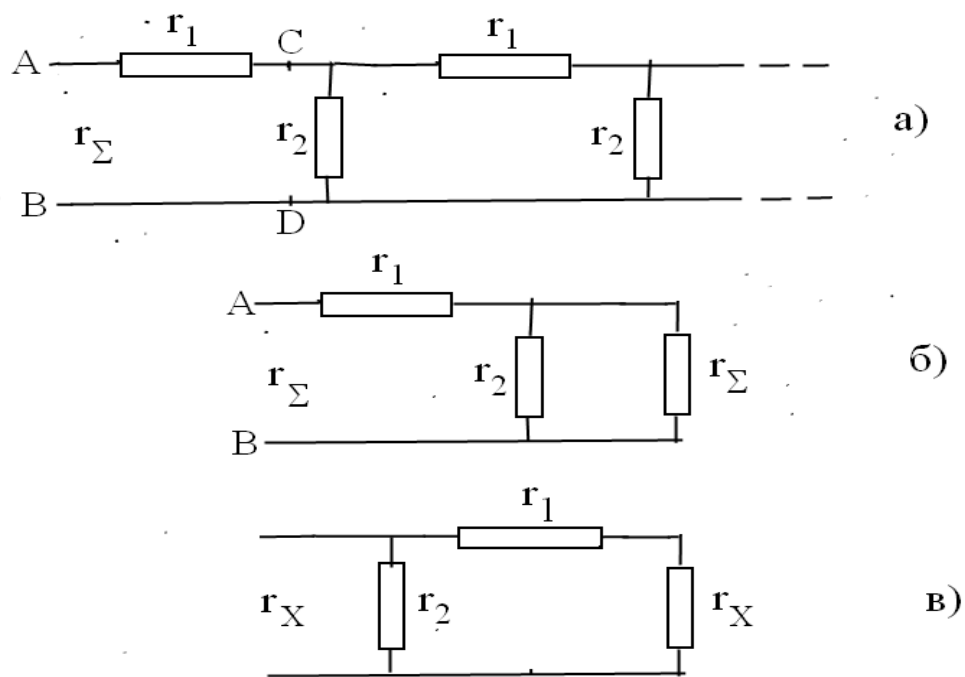


Рис. 1

При этом на рис. 1 б) показана приведённая эквивалентная схема этой бесконечной цепи, полученная при добавлении к бесконечной цепи одного звена в начало цепи к точкам А, В, к которым подключается источник тока. Сопротивление соединительных проводов считается много меньшим $r_{1,2}$.

На рис. 1 в) показан последний элемент рассматриваемой цепи, к которому присоединяется сопротивление r_X , причём такое, что сопротивление последнего звена также становится равным r_X , и в итоге сопротивление любой цепи (конечной или бесконечной), начинающейся с точек С, D, оказывается равным r_X и независимым от числа звеньев цепи (!!):

$$r_X = -r_1 / 2 + \sqrt{(r_1 / 2)^2 + r_1 \cdot r_2}, \quad r_X = r \cdot \phi \quad \text{при } r_1 = r_2 = r \quad (2)$$

Полученный результат является принципиально важным, и как из него и из (1) следует, что сопротивление бесконечной цепи на рис. 1 а) после точек С, D $r_{\Sigma C,D} = r \cdot \phi$ при $r_1 = r_2 = r$ и общее сопротивление бесконечной цепи (после точек А, В) $r_{\Sigma AB} = r + r \cdot \phi = r \cdot \Phi$ также не зависит от числа элементов, хотя при получении соотношения (1) предполагалось, что сопротивления во всех звеньях цепи, в том числе и в бесконечно удалённом звене, одинаковы. Т.е. оказывается, что в бесконечной цепи независимо от сопротивления последних элементов идёт автоподстройка к аттракторам сопротивлений $r_{\Sigma C,D} = r \cdot \phi$ и $r_{\Sigma A,B} = r \cdot \Phi$.

Это обусловлено тем, что функция, определяющая величину сопротивления последнего (Last) звена r_L на рис. 1 в) при произвольном r_X имеет вид:

$$r_L = r_2(r_1 + r_X) / (r_1 + r_2 + r_X), \quad r_L = (1 + r_X) / (2 + r_X) \quad \text{при } r_1 = r_2 = r = 1 \quad (3)$$

Функции (3) соответствует следующая сходящаяся последовательность:

$$y_{k+1} = (1 + y_k) / (2 + y_k) \quad (4)$$

Действительно, при положительных $y_k > 0$, последовательность $\{y_{k+1}\}$ является монотонной, ограниченной и снизу, и сверху $1/2 \leq y_{k+1} \leq 1$. Кроме того, для неё выполняется критерий Коши:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |y_{k+1} - y_k| = 0 \quad \text{при } y_k \rightarrow \phi \quad (5)$$

Следовательно, последовательность $\{y_{k+1}\}$ сходится и имеет предел ϕ !!

При этом величина сопротивления $r_{L,(k+1)} = r(r + r_{X,k}) / (2r + r_{X,k})$ достаточно быстро сходится к $r \cdot \phi$!! Напр., пусть на бесконечности подсоединяется сопротивление $r_{X,1} = 1000 \cdot r$, тогда сопротивления последних звеньев будут

$$r_{L,2} = 0,999 \cdot r, \quad r_{L,3} = 0,667 \cdot r, \quad r_{L,4} = 0,625 \cdot r, \quad r_{L,5} = 0,619 \cdot r, \quad r_{L,6} = 0,618 \cdot r$$

Если же $r_{X,1} = 0,001 \cdot r$, то $r_{L,2} = 0,5002 \cdot r, \quad r_{L,3} = 0,600 \cdot r, \quad r_{L,4} = 0,615 \cdot r,$

$r_{L,6} = 0,618 \cdot r$ и т.д. Т.е уже через несколько звеньев от конца бесконечной цепи сопротивления звеньев становятся очень близкими к величине аттрактора $r \cdot \phi$!

Таким образом, операции с бесконечностями, как и следовало ожидать, приводят к нетривиальным результатам. В структуре на рис. 1 а) золотым сечениям соответствует экстремум функции $|r_L - r_X|$, соответствующей критерию Коши (5), определяющему условие сходимости монотонной последовательности:

$$\min |r_L - r_X| = \min |r(r + r_X) / (2r + r_X) - r_X| = 0 \quad \text{при} \quad r_X = r \cdot \phi \quad (6)$$

Так как структура на рис. 1 а) уходит в бесконечность от точек А, В лишь в одну сторону - вправо, рассмотрим далее симметричную структуру, показанную на рис. 2 а), состоящую из двух структур, уходящих в бесконечность и вправо (I), и влево (II). При этом согласно (1)

$$r_{\Sigma I} = r_1 / 2 + \sqrt{(r_1 / 2)^2 + r_1 \cdot r_2}, \quad r_{\Sigma II} = -r_1 / 2 + \sqrt{(r_1 / 2)^2 + r_1 \cdot r_2} \quad (7)$$

$$r_{\Sigma I} = r \cdot \Phi = r(1 + \phi), \quad r_{\Sigma II} = r \cdot \phi \quad \text{при} \quad r_1 = r_2 = r \quad (8)$$

Согласно (8) эквивалентная схема для структуры на 2 а) показана на рис. 2 б).

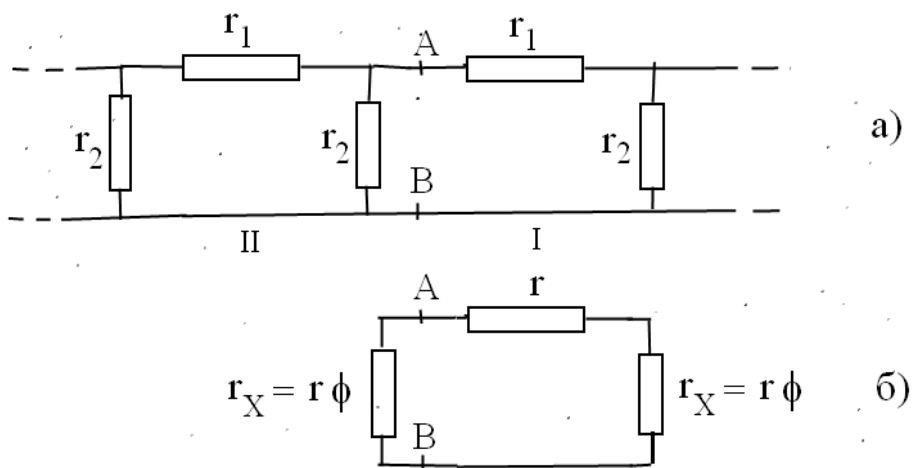


Рис. 2

Представим далее общее сопротивление эквивалентной схемы на рис. 2 б) либо как сумму 2-х параллельных (Parallel) сопротивлений $r_{\Sigma P}$ между точками

A, B, либо как сумму последовательных (Serial) сопротивлений $r_{\Sigma S}$:

$$r_{\Sigma P} = r_X(r + r_X) / (r + 2r_X), \quad r_{\Sigma S} = r + 2r_X, \quad (9)$$

При этом с учётом (9) получим два замечательных результата: 1) для структуры, показанной на рис. 2 а), при $r_X = r \cdot \phi$ выполняются следующие нетривиальные соотношения:

$$r_{\Sigma P} \cdot r_{\Sigma S} = r^2 \quad \text{или} \quad r_{\Sigma P} / r = r / r_{\Sigma S} \quad (10)$$

2) функция $|r_{\Sigma P} - r^2 / r_{\Sigma S}|$ имеет экстремум (минимум) также при $r_X = r \cdot \phi$ (!):

$$\min |r_{\Sigma P} - r^2 / r_{\Sigma S}| = \min |(r_X^2 + r r_X - r^2) / (r + 2r_X)| = 0 \quad (11),$$

$$r_{\Sigma P}(r_X = r \cdot \phi) = r / \sqrt{5} = r / (\phi + \Phi), \quad r_{\Sigma S}(r_X = r \cdot \phi) = r\sqrt{5} = r(\phi + \Phi) \quad (12)$$

К эквивалентной схеме, показанной на рис. 2 б), приводится и структура, показанная на рис. 3 а). Её эквивалентная схема показана на рис. 3 б). При этом для этой структуры оказываются верными и соотношения (9) - (12), а также все сделанные выше выводы для бесконечной цепи сопротивлений на рис. 2 а).

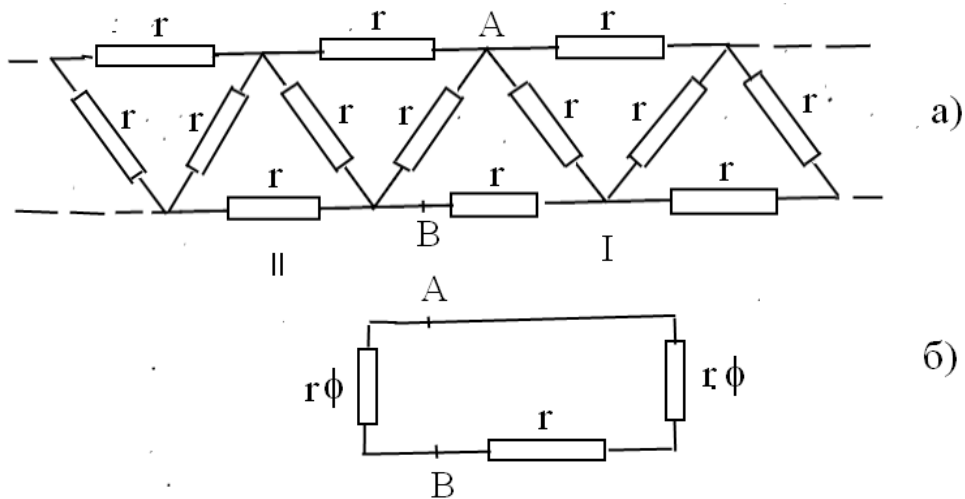


Рис. 3

В то же время структуры на рис. 1 а) и 2 а), приводящие к соотношениям, точно выражающимся через константы золотого сечения ϕ, Φ , с геометрической точки зрения не являются полностью симметричными. Поэтому следующей

рассмотренной структурой была полностью геометрически симметричная структура, показанная на рис. 4 а). Её эквивалентная схема для случая $r_1 = r_2 = r$ показана на рис. 4 б).

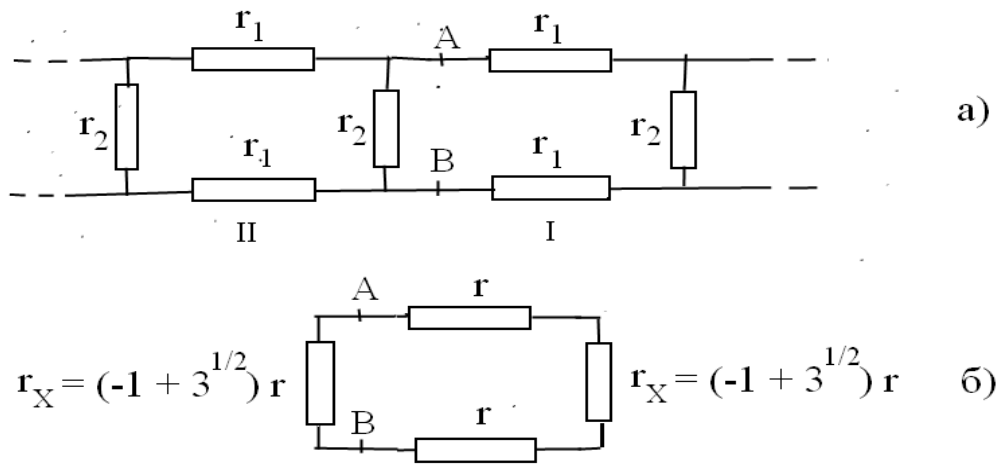


Рис. 4

Суммарные сопротивления частей цепи I, II справа и слева от A, B равны:

$$r_{\Sigma I} = r_1 + \sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2}, \quad r_{\Sigma II} = -r_1 + \sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2} \quad (13)$$

При $r_1 = r_2 = r$ эти сопротивления выражаются через константы золотого сечения ϕ, Φ , причём симметричным образом (!):

$$r_{\Sigma I} = (1 + \sqrt{3})r = (\phi\Phi + \sqrt{\phi^2 + \Phi^2})r, \quad r_{\Sigma II} = (-1 + \sqrt{3})r = (-\phi\Phi + \sqrt{\phi^2 + \Phi^2})r$$

Если в последнее звено структур I, II добавить сопротивление r_X , то сопротивление последнего звена r_L при $r_1 = r_2 = r$ определится выражением:

$$r_L = r(2r + r_X) / (3r + r_X) \quad (15)$$

При этом найденным соотношениям гармонии (14) будет соответствовать аналогичный (6) минимум функции $|r_L - r_X|$:

$$\min |r_L - r_X| = \min |r(2r + r_X) / (3r + r_X) - r_X| = 0 \quad \text{при} \quad r_X = (-1 + \sqrt{3})r \quad (16)$$

Для конечных структур их общее сопротивление не будет зависеть от числа звеньев структуры, если в последнее звено будет добавлено сопротивление

$$r_X = r_{\Sigma II} = (-1 + \sqrt{3})r = (-\phi\Phi + \sqrt{\phi^2 + \Phi^2})r.$$

Для бесконечных же структур I, II, показанных на рис. 4 а), также как и для структур I, II, показанных на рис. 2 а), их сопротивления будут сходиться к аттракторам $r_{\Sigma I}$, $r_{\Sigma II}$, определяемым соотношениями (14), независимо от величины сопротивления r_X , подключаемого к последнему звену !

Аналогично сопротивлениям (9) для эквивалентной схемы на рис. 2 б) введём последовательные и параллельные сопротивления и для эквивалентной схемы на рис. 4 б):

$$r_{\Sigma P} = r_X(2r + r_X) / (2r + 2r_X), \quad r_{\Sigma S} = 2r + 2r_X \quad (17)$$

Из (17), так же как и из соотношений (9), следуют 2 важных результата: 1) для структуры, показанной на рис. 4 а), при $r_X = (-1 + \sqrt{3})r$ выполняются следующие нетривиальные соотношения:

$$r_{\Sigma P} \cdot r_{\Sigma S} = 2r^2 \quad \text{или} \quad r_{\Sigma P} / \sqrt{2}r = \sqrt{2}r / r_{\Sigma S} \quad (18),$$

отличающиеся от соотношений (10) наличием множителя $2 = \phi\Phi + \Phi\phi$.

2) функция $\left| r_{\Sigma P} - 2r^2 / r_{\Sigma S} \right|$ имеет минимум также при $r_X = (-1 + \sqrt{3})r$ (!):

$$\min \left| r_{\Sigma P} - r^2 / r_{\Sigma S} \right| = \min \left| (r_X^2 + 2r r_X - 2r^2) / (2r + 2r_X) \right| = 0 \quad (19),$$

$$r_{\Sigma P}(r_X = r(-1 + \sqrt{3})) = r / \sqrt{3} = r / \sqrt{\phi^2 + \Phi^2} \quad (20),$$

$$r_{\Sigma S}(r_X = r(-1 + \sqrt{3})) = r\sqrt{3} = r\sqrt{\phi^2 + \Phi^2} \quad (21)$$

Найдём далее суммарные сопротивления правильных геометрических структур полностью (без зазоров) покрывающих плоскость. Такие структуры могут быть образованы правильными треугольниками, квадратами и шестиугольниками.

Структура, представляющая собой бесконечную сеть из проволочных квадратных ячеек с сопротивлением каждой стороны квадрата равным r , показана на рис. 5.

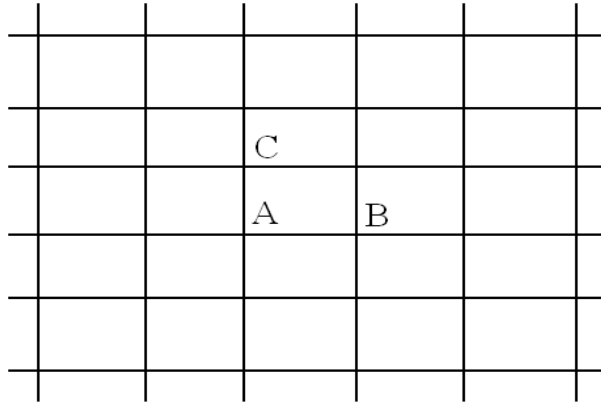


Рис. 5

Вначале найдём суммарное сопротивление бесконечной сети при подключении источников тока к точкам А, В, лежащим на концах одной из сторон квадратной ячейки в условном центре сети. Для этого проделаем следующий мысленный эксперимент. Подключим к точке А, напр., плюс источника тока J , а минус подключим на бесконечности. Тогда в силу симметрии через сторону АВ пойдёт $J/4$. Другой такой же источник тока J подключим к точке В, но минусом, плюс же подключается на бесконечности. При этом через сторону АВ будет проходить суммарный ток $J/4 + J/4 = J/2$, и падение напряжения на стороне АВ будет равно $U_{AB} = Jr/2$. В итоге при неограниченном увеличении числа ячеек суммарное сопротивление бесконечной сети, в которую входит ток J , определится аттрактором

$$r_{\Sigma AB} = U_{AB} / J = r/2 \quad (22)$$

Аналогичным образом найдём сопротивление бесконечной цепи при подключении источников тока J к точкам В, С, лежащих на концах диагонали квадратной ячейки. При этом один из источников подключается, напр, плюсом к точке С, а другой минусом к точке В. В итоге падение напряжения на участке САВ и аттрактор сопротивления $r_{\Sigma CAB}$ определяются выражениями:

$$U_{CAB} = U_{CA} + U_{AB} = 2[J/4 + (J/4) \cdot 1/3]r = 2Jr/3 \quad (23),$$

$$r_{\Sigma CAB} = U_{CAB} / J = r2/3 \quad (24)$$

Бесконечную сеть на рис. 5 можно разделить на 2 равные части I, II вдоль

линий, проходящих через точки В, С или точки А, В, так как в силу симметрии ток не будет перетекать из одной части в другую. При разделении сети, напр., вдоль линии В, С параллельное соединение сопротивлений этих частей $r_I = r_{II}$ должно в сумме дать $r_{\Sigma ВАС} = 2r / 3$. Отсюда следует, что

$$r_I = r_{II} = r 4 / 3 \quad (25)$$

Если в бесконечной сети сопротивлений из квадратных ячеек удалить часть сопротивлений так, как это показано на рис. 6, то в итоге будет получена бесконечная сеть, эквивалентная бесконечной сети, составленной из правильных шестиугольников, которая показана на рис. 7. На этом рисунке внутри шестиугольников вписаны правильные треугольники, образующие ещё одну сеть, равномерно покрывающую плоскость.

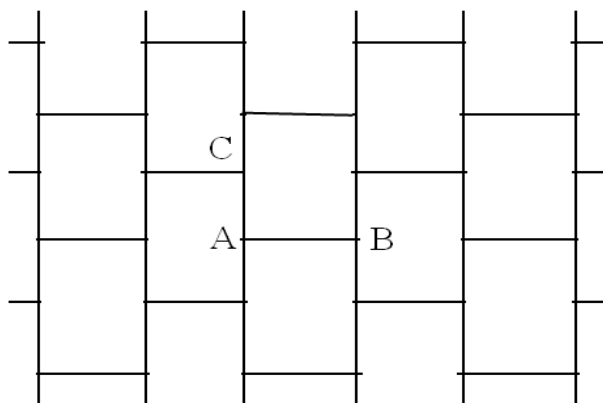


Рис. 6

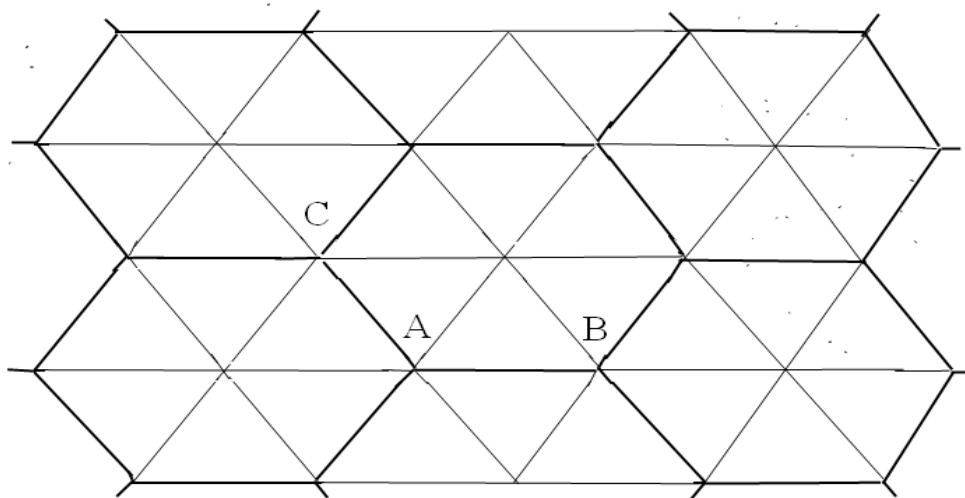


Рис. 7

Для нахождения суммарного сопротивления бесконечной сети из шестиугольников вновь используем описанное выше подсоединение двух источников тока. В случае их подсоединения к точкам А, В получим, что ток, протекающий через сторону А, В, равен: $J_{AB} = J/3 + J/3 = 2J/3$ и, следовательно,

$$U_{AB} = 2Jr/3, \quad r_{\Sigma AB} = U_{AB}/J = r2/3 \quad (26)$$

В случае подсоединения источников тока к точкам С, В токи через стороны СА и АВ равны $J_{CA} = J_{AB} = J/3 + (J/3)(1/2) = J/2$ и, следовательно,

$$r_{\Sigma CB} = U_{CB}/J = r \quad (27)$$

Сопротивление же бесконечной сети из правильных треугольников при подсоединении источников тока к любой из сторон, напр., АВ (см. рис. 7), естественно, будет наименьшим в сравнении с сопротивлениями других сетей:

$$r_{\Sigma AB} = U_{AB}/J = (J/6 + J/6)r/J = r/3 \quad (28)$$

Напомним, что для сети из шестиугольников $r_{\Sigma AB} = r2/3$, для сети из квадратов $r_{\Sigma AB} = r/2$.

Наконец, используя тот же метод подключения 2-х источников тока, найдём сопротивления бесконечной 3-х мерной сети, составленной из проволочных кубов с сопротивлением стороны куба r (см. рис. 8).

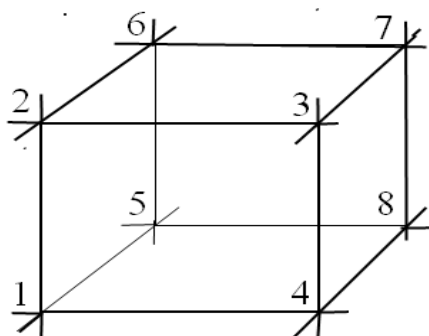


Рис. 8

При подключении источников тока к любой из сторон куба, напр., 12, суммарное сопротивление $r_{\Sigma 12} = r/3$ определится теми же соотношениями

через иррациональные и рациональные числа. С формальной точки зрения иррациональные величины получались для бесконечных структур типа «лестницы». Рациональные – для структур равномерно заполняющих плоскость или объём. Но истинная причина состоит в том, что иррациональные числа являлись корнями алгебраических уравнений, следующих из рекуррентных соотношений для искомых суммарных сопротивлений. Рациональные же числа получались в результате выполнения операций сложения и деления при нахождении последовательных и параллельных сопротивлений.

В этой связи отметим, что с физической точки зрения не имеет решения, напр., следующая задача, в которой формально появляются константы золотого сечения. Пусть дано конечное число n одинаковых сопротивлений величины r , в сумме дающих сопротивление r_X . Можно ли, добавив к этим n сопротивлениям ещё два таких же сопротивления, вновь получить суммарное сопротивление r_X ? Составив из указанных сопротивлений схему, показанную на рис. 1 в) с $r_1 = r_2 = r$, получим, что формально решение задач возможно при $r_X = r \cdot \Phi$! Ещё одной из возможных схем соединения может быть схема с последовательным соединением сопротивлений r_X и r , к которым параллельно подсоединено сопротивление r . В этом случае суммарное сопротивление $r_X = r \cdot \phi$! Однако оба эти случая невозможны, поскольку из конечного набора сопротивлений r нельзя получить иррациональные числа $r \cdot \phi$, $r \cdot \Phi$. В то же эти числа могут быть получены в пределе как аттракторы при использовании бесконечных наборов сопротивлений.

Наконец, найдём сопротивление ещё одного типа бесконечной, но на этот раз «схлопывающейся» структуры показанной на рис. 10 а). Эта структура представляет собой бесконечную последовательность вписанных проволочных квадратов с сопротивлением стороны внешнего квадрата r . Эквивалентная схема этой структуры при подключении источников тока к точкам А, В показана рис. 10 б).

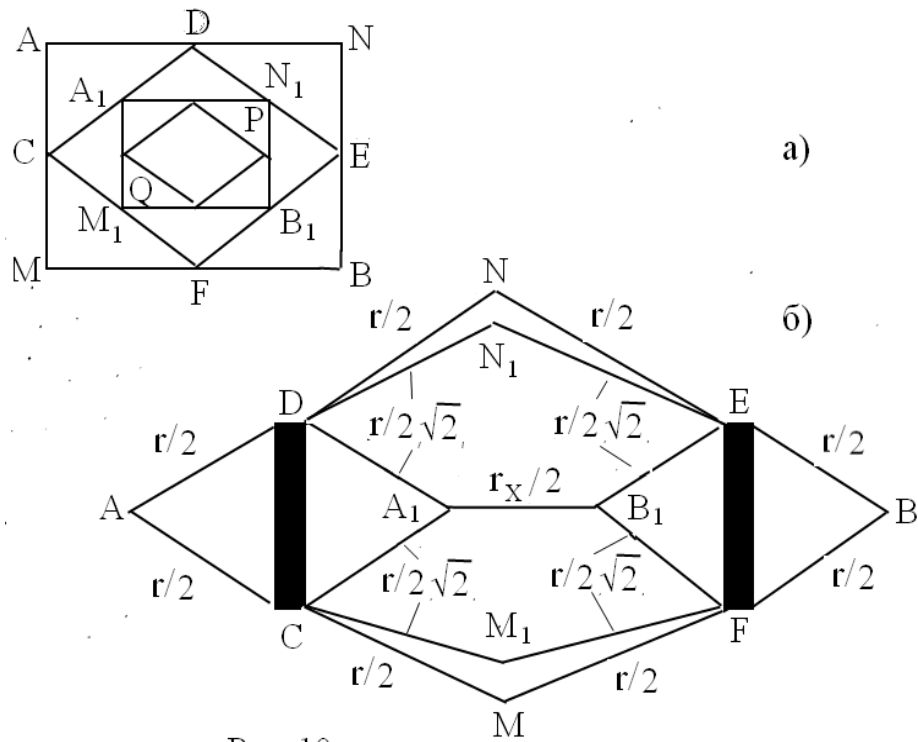


Рис. 10

При составлении эквивалентной схемы учтены следующие обстоятельства.

I. Если обозначить искомое суммарное сопротивление структуры при подключении источников тока к точкам A, B как $r_{\Sigma AB} = r_X$, то в силу подобия суммарное сопротивление всей внутренней части структуры, начинающейся с точек A_1, B_1 квадрата $A_1N_1B_1M_1$ будет равно $r_X/2$. II. Также в силу симметрии потенциалы точек C, D и E, F будут равны, поэтому на рис. 10 б) они соединены шинами с нулевым сопротивлением. III. В то же время точки P, N_1 и Q, M_1 , имеющие равные потенциалы, разъединены. В итоге из эквивалентной схемы получаем следующие соотношения для нахождения искомого сопротивления r_X :

$$r_X = r/2 + [(r/2)^{-1} + (r/2\sqrt{2})^{-1} + (r_X/2 + r/2\sqrt{2})^{-1}]^{-1} \quad (33)$$

$$(r_X/r)^2 + (\sqrt{2} - 1)(r_X/r) - 1/\sqrt{2} = 0 \quad (34)$$

$$r_X = r(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})/2 = r(\Phi\Phi - \sqrt{\Phi\Phi + \Phi\Phi} + \sqrt{\Phi^2 + \Phi^2})/(\Phi\Phi + \Phi\Phi) \quad (35)$$

Функция преобразования сопротивления внутренней области бесконечной

структуры на рис. 10 а), замыкаемой квадратом $A_1N_1B_1M_1$, к сопротивлению всей структуры, замыкаемой квадратом $ANBM$, определяемая правой частью формулы (33):

$$R(z) = r/2 + [(r/2)^{-1} + (r/2\sqrt{2})^{-1} + (z/2 + r/2\sqrt{2})^{-1}]^{-1} \quad (36)$$

монотонна по z и ограничена сверху и снизу пределами $r \cdot \sqrt{2}/2 \approx r \cdot 0,707$, $r \cdot [1 + 1/(1 + 2\sqrt{2})]/2 \approx r \cdot 0,631$. Следовательно, последовательность таких преобразований сходится и величина $z = r_X$, определяемая (35), является аттрактором! При этом из критерия Коши для сходимости последовательности следует, что функция $|R(z) - z|$ имеет минимум, равный нулю:

$$\min |R(z) - z| = 0 \quad \text{при } z = r_X \quad (37)$$

В связи нахождением аттракторов в бесконечных самоподобных геометрическо-физических структурах, выражающихся через константы золотого сечения, укажем в заключение, что в процессе компьютерного моделирования и анализа бесконечных цепных дробей была продемонстрирована возможность существования функций, практически равных константам золотого сечения в некоторых областях значений их аргументов! К таким функциям относятся, напр., указанные ниже функции $f(x)$ и $F(x)$ при $\alpha = 5^{-1} = (\phi + \Phi)^{-2}$:

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{1 + \frac{x}{1 + \frac{x^2}{1 + \frac{x^3}{1 + \frac{x^4}{1 + \dots}}}}} \quad F(x) = \frac{x^\alpha}{1 - \frac{x}{1 + \frac{x^2}{1 - \frac{x^3}{1 + \frac{x^4}{1 - \dots}}}}} \quad (38)$$

Функции типа (38) исследовались, прежде всего, потому, что, как можно показать составляя рекуррентные соотношения, при $x = 1$ соответствующие им бесконечные числовые дроби равны именно константам золотого сечения: $f(1) = \phi$, $F(1) = \Phi$!

Было установлено, что уже при относительно небольшом числе N циклов аппроксимации бесконечной дроби $N \leq 40$, $f(x=1) \approx \phi$, $F(x=1) \approx \Phi$ с точностью 9 знаков после запятой. Соответствующие графики функций $f(x)$, $F(x)$ при $N = 40$ показаны на рис. 11.

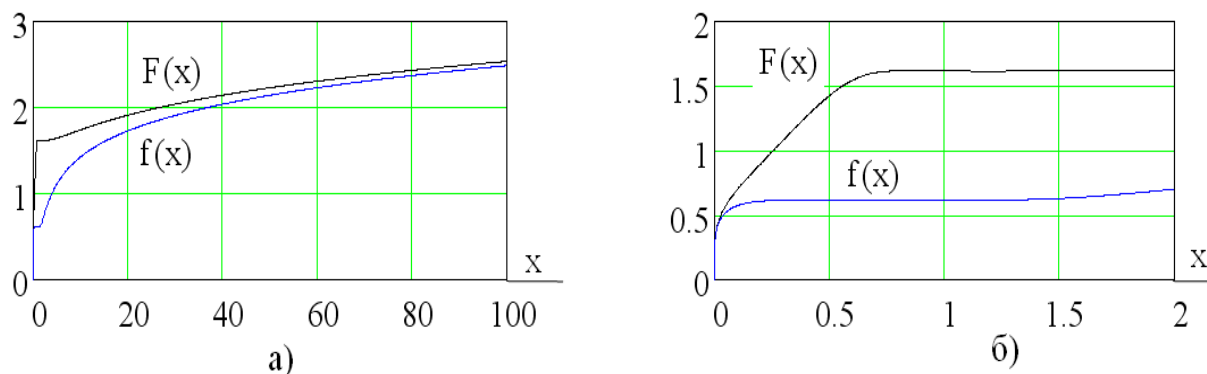


Рис.11

Как следует из расчётов, при $N = 40$ $f(x) \approx \phi$, $F(x) \approx \Phi$ с точностью более 8 знаков после запятой при $0,7 \leq x \leq 1,1$. $F(x) \approx \Phi$ с той же точностью при $0,9 \leq x \leq 1,05$. Весьма интересно также то, что с ростом x функции $f(x)$, $F(x)$ монотонно растут и при $x \geq 100$ их графики практически неотличимы !

Другие свойства функций типа $f(x)$, $F(x)$ будут рассмотрены в отдельной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шелаев А.Н.* Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей экстремумы длин, площадей и их производных. Академия тринитаризма, www.trinitas.ru, М., Эл. № 77-6567, публ. 17431, 29.04. 2012. - 9 С.
2. *Шелаев А.Н.* Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и функций средних значений. Академия тринитаризма, www.trinitas.ru, М., Эл. №77- 6567, публ. №17485, 28.05.2012. - 10 С.
3. *Шелаев А.Н.* Электростатическая модель золотых сечений и функций средних значений. Академия тринитаризма, www.trinitas.ru, М., Эл. №77- 6567, публ. № 17511, 08.05.2012. – 9 С.