

## ЗОЛОТЫЕ СЕЧЕНИЯ, КАК АТТРАКТОРЫ В РЕКУРРЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ НА ОСНОВЕ БЕСКОНЕЧНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ И ВЛОЖЕННЫХ РАДИКАЛОВ

С помощью аналитических оценок и компьютерного моделирования найдены различные типы рекуррентных функций на основе бесконечных цепных дробей и бесконечных вложенных радикалов, обладающие следующим важным свойством: их действительные или мнимые части в некоторых областях аргументов с высокой точностью равны константам золотого сечения  $\phi = (-1 + \sqrt{5}) / 2 \approx 0,618\ 034$  или  $\Phi = (1 + \sqrt{5}) / 2 = \phi + 1 = 1 / \phi \approx 1,618\ 034$ . Выявлены разные сценарии перехода к таким интересным аттракторам, как константы  $\phi$ ,  $\Phi$ . Показано, что найденные аттракторы могут представлять собой плато по значениям функции, гладкие экстремумы и иметь тонкую структуру.

К найденным функциям, имеющим в качестве аттракторов соответственно константы  $\phi$ ,  $\Phi$ , относятся, напр., следующие функции  $f(x, \alpha, \beta)$  и  $F(x, \alpha, \beta)$ :

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{x^\alpha}{1 + \frac{x^\beta}{1 + \frac{x^{\beta+1}}1 + \frac{x^{\beta+2}}1 + \dots}}}, \quad F(x, \alpha, \beta) = \frac{x^\alpha}{1 - \frac{x^\beta}{1 + \frac{x^{\beta+1}}1 - \frac{x^{\beta+2}}1 + \dots}} \quad (1)$$

Так, выяснилось, что при  $\beta = 1$  значение  $\alpha = 5^{-1} = (\phi + \Phi)^{-2}$ , как для  $f(x, \alpha, \beta)$ , так и для  $F(x, \alpha, \beta)$ . При  $\beta = 2$   $\alpha \approx 1 / \sqrt{2(\phi + \Phi)} \approx 0,472\ 871$  для  $f(x, \alpha, \beta)$  и  $\alpha \approx (\phi + \Phi) / 80 \approx 0,027\ 951$  для  $F(x, \alpha, \beta)$ . Отметим также что, при  $\beta = 3$   $\alpha = (\phi^2 + \Phi^2) / (\Phi^3 - \phi^3) = 3 / 4$  для  $f(x, \alpha, \beta)$ .

Проведём далее детальное рассмотрение указанных функций для случая  $\alpha = 5^{-1}$ ,  $\beta = 1$ , введя функции  $f(x) = x^{1/5} / g(x)$  и  $F(x) = x^{1/5} / G(x)$  где:

$$g(x) = 1 + \frac{x^1}{1 + \frac{x^2}{1 + \frac{x^3}{1 + \dots}}}, \quad G(x) = 1 - \frac{x^1}{1 + \frac{x^2}{1 - \frac{x^3}{1 + \dots}}} \quad (2)$$

Графики функций  $g(x)$ ,  $G(x)$ , а также действительных и мнимых частей функции  $x^{1/5}$  показаны на рис. 1. Функции  $g(x)$ ,  $G(x)$  имеют ряд важных особенностей. Они симметричны относительно оси  $OY$ , при этом  $g(1) = G(-1) = \Phi$ ,  $G(1) = g(-1) = \phi$  !  $G(x)_{\max} = g(x)_{\max} \approx 1/\sin \phi \approx 1,725$  при  $x \approx \pm 1/\sqrt{\phi + \Phi} \approx 0,669$ . Далее,  $G(x)_{\min} = g(x)_{\min} \approx \sin \phi \approx 0,579$  при  $x \approx \mp \sqrt{\phi + \Phi} \approx 1,495$ . Наконец,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 1 \pm 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} G(x) = 1 \mp 0$ .

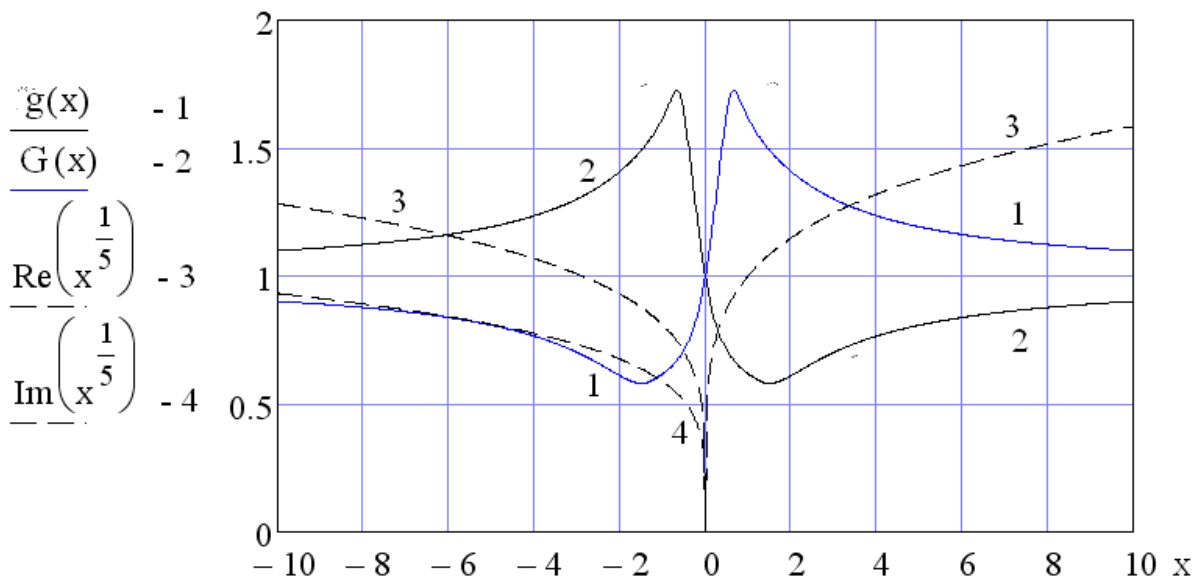


Рис. 1

Отметим, что при компьютерных расчётах бесконечные дроби аппроксимировались конечными дробями с числом циклов  $N = 40$ , что обеспечивало высокую точность вычислений - более 9 знаков после запятой.

На рис. 2-4 показаны действительные и мнимые части функций  $f(x)$ ,  $F(x)$  при различных масштабах вдоль координатных осей, что позволяет увидеть общий вид и тонкую структуру этих функций.

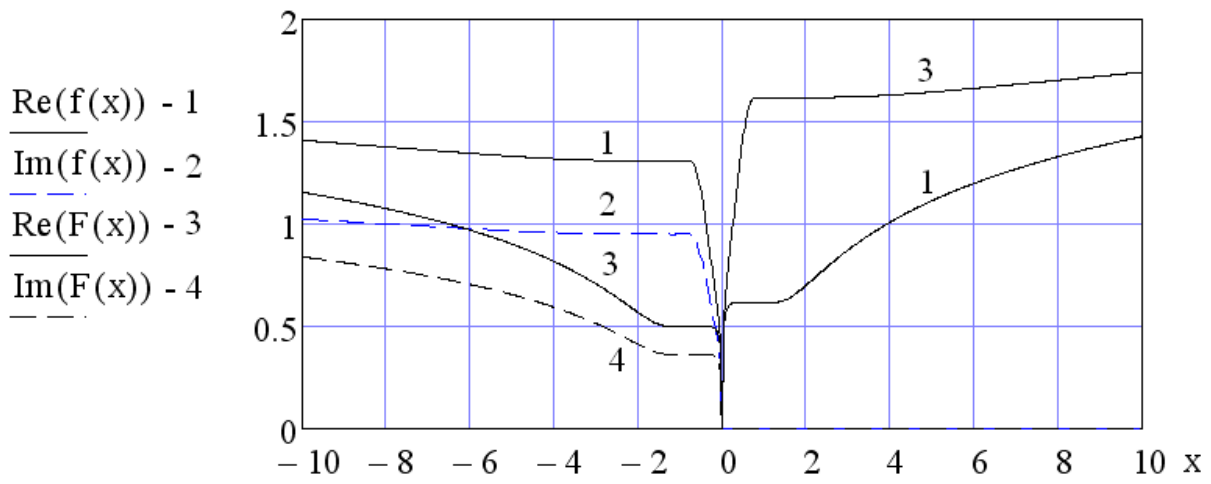


Рис. 2

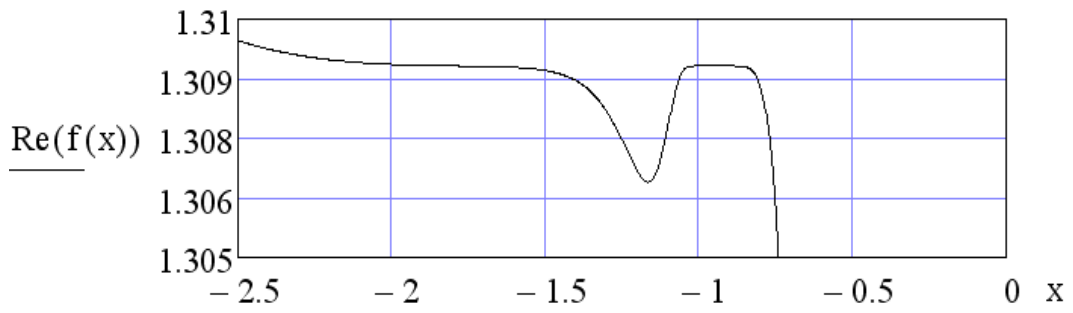


Рис. 3 а

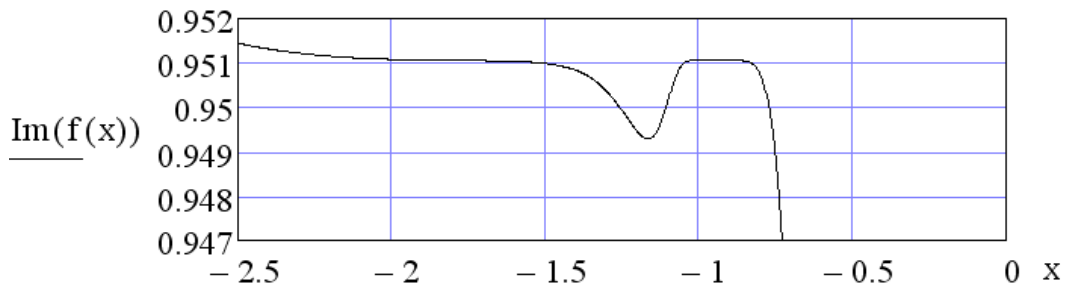


Рис. 3 б

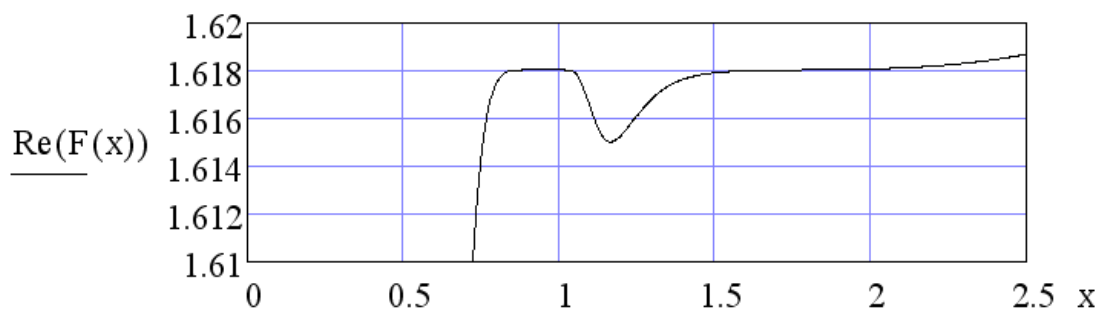


Рис. 4

При  $x > 0$  функции  $f(x)$  и  $F(x)$  действительны, причём  $f(x) \simeq \phi$  в области  $0,7 < x < 1,06$  с точностью  $< 10^{-9}$ . Функция же  $F(x) \simeq \Phi$  с той же точностью в двух областях: 1)  $0,91 < x < 1,002$  и 2)  $1,7857 < x < 1,7858$ , расположенной вблизи точки  $x = 4/\sqrt{5} \simeq 1,788$ . При этом лишь функция  $F(x)$  имеет тонкую структуру в виде минимума на «плато» – области постоянных значений  $F(x)$  (см. рис. 2, 4) при  $x \simeq \sqrt{3/(\phi + \Phi)} \simeq 1,162$ .

Отметим, что все эти значения  $x$  выражаются через константы золотого сечения, поскольку любое целое число точно выражается через  $\phi, \Phi$ :  $2 = \phi^2 + \Phi^1$ ,  $3 = \phi^2 + \Phi^2$ ,  $4 = \Phi^3 - \phi^3$ ,  $5 = (\phi + \Phi)^2$ ,  $7 = \phi^4 + \Phi^4$  и т.д.

При  $x < 0$  функции  $f(x), F(x)$  комплексны, причём тонкую структуру в виде минимумов на плато имеют лишь действительная и мнимая части  $f(x)$  (см. рис. 2, 3 а, б) при  $x \simeq -\sqrt{3/(\phi + \Phi)} = -\sqrt{(\phi^2 + \Phi^2)/(\phi + \Phi)} \simeq -1,162$ .

В области плато найдены следующие примечательные соотношения, также выражающиеся через константы золотого сечения  $\phi, \Phi$ :

$$\operatorname{Re} f(x) \simeq \sqrt{5 + 3\phi} / 2 = 1,309, \quad \operatorname{Im} f(x) \simeq \sqrt{3 + \phi} / 2 = \sin 72^\circ \simeq 0,951 \quad (3),$$

$$\sqrt{\operatorname{Re}^2 f(x) + \operatorname{Im}^2 f(x)} = \Phi \quad (4),$$

$$\operatorname{Re} F(x) \simeq (\phi^2 + \Phi^1)^{-1/2} = 0,5, \quad \operatorname{Im} F(x) \simeq \sqrt{2 - 4\phi} / 2 \simeq 0,363 \quad (5),$$

$$\sqrt{\operatorname{Re}^2 F(x) + \operatorname{Im}^2 F(x)} = \phi \quad (6),$$

Отметим также, что в соответствии с тем, что, как следует из рис. 1:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 1 \pm 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} G(x) = 1 \mp 0 \quad (7),$$

получаем, что с ростом  $|x|$  предельные значения действительных и мнимых частей  $f(x)$  и  $F(x)$  становятся равными:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Re}f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Re}F(x), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Im}f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Im}F(x) \quad (8)$$

Рассмотрим далее свойства функции  $r(x)$ , состоящей из бесконечной последовательности вложенных радикалов:

$$r(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}} \quad (9)$$

Графики действительных и мнимых частей  $r(x)$  показаны на рис. 5.

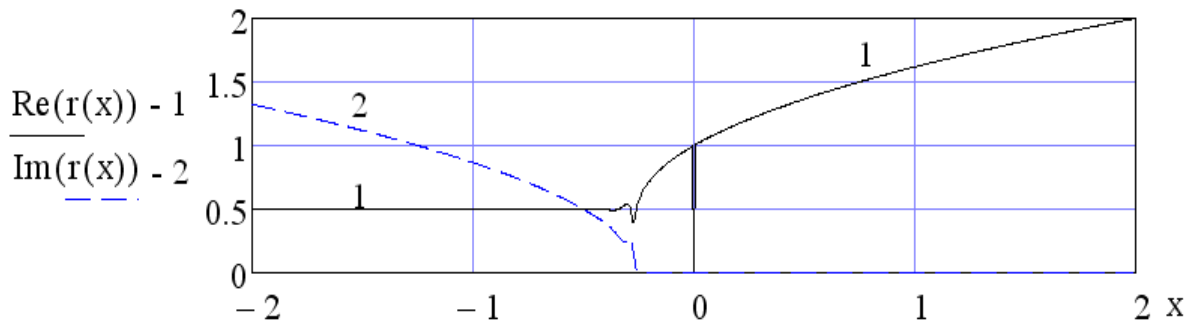


Рис. 5

Функция  $r(x)$  довольно быстро сходится и уже при её аппроксимации 20-ю вложенными радикалами приближённое значение равно её точному значению с точностью более 9 знаков после запятой, которое, как нетрудно показать, при  $x = 1$  равно константе золотого сечения:  $r(1) = \phi$ .

Важно также то, что  $\operatorname{Re}r(x) = 1/2 = (\phi\Phi + \Phi\phi)^{-1}$  в бесконечной области при всех  $x \leq -1/2$  ! Наконец, следует отметить очень быстрое, скачкообразное изменение  $\operatorname{Re}r(x)$  от  $\operatorname{Re}r(x=0) = 0$  до  $\operatorname{Re}r(x) \approx 1$  уже при  $10^{-17} \leq |x|$ .

Вновь используя корректирующую функцию вида  $x^\alpha$ , получим, что при

$\alpha = \phi / \sqrt{5} = \phi / (\phi + \Phi) \approx 0,276\ 393$  следующие функции  $y(x)$  и  $Y(x)$ :

$$y(x) = x^{\phi/\sqrt{5}} / r(x), \quad Y(x) = r(x) / x^{\phi/\sqrt{5}} \quad (10)$$

имеют пологие, симметричные относительно точки  $x = 1$  экстремумы:

$$y(x)_{\max} = y(1) = \phi, \quad Y(x)_{\min} = Y(1) = \Phi \quad (11)$$

Графики действительной и мнимой частей функции  $y(x)$  в различных масштабах показаны на рис. 6, 7.

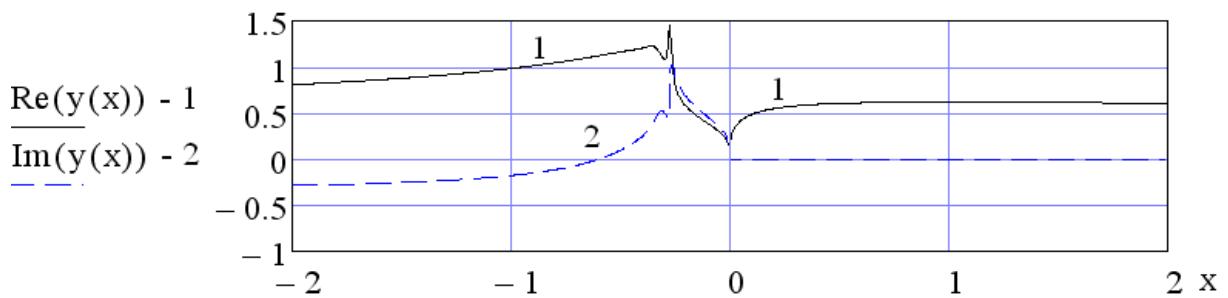


Рис. 6

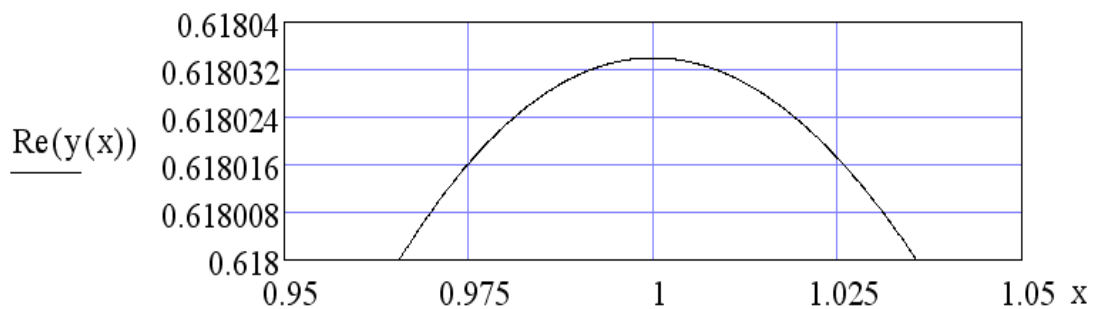


Рис. 7

Рассмотрим далее некоторые свойства неисследованных ранее функций, основанных на бесконечных цепных дробях в сочетании с бесконечными последовательностями вложенных радикалов !! В качестве примера таких функций, имеющих пологие симметричные экстремумы, равные  $\phi$ , укажем определённые ниже функции  $p(x)$  и  $q(x)$ :

$$p(x) = \frac{x^{1/5}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \frac{x^2}{\sqrt{2 + \frac{x^3}{\sqrt{2 + \frac{x^4}{\sqrt{2 + \dots}}}}}}}}}}, \quad q(x) = \frac{x^{1/\sqrt{5}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + \dots}}}}}}}}}} \quad (12)$$

Графики действительных и мнимых частей функций  $p(x)$  и  $q(x)$  в различных масштабах показаны на рис. 8, 9.

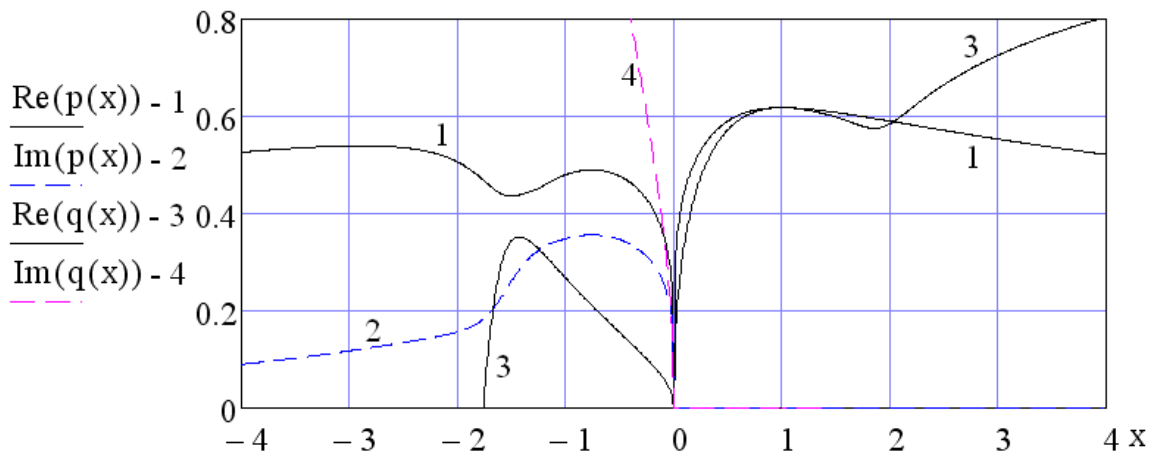


Рис. 8

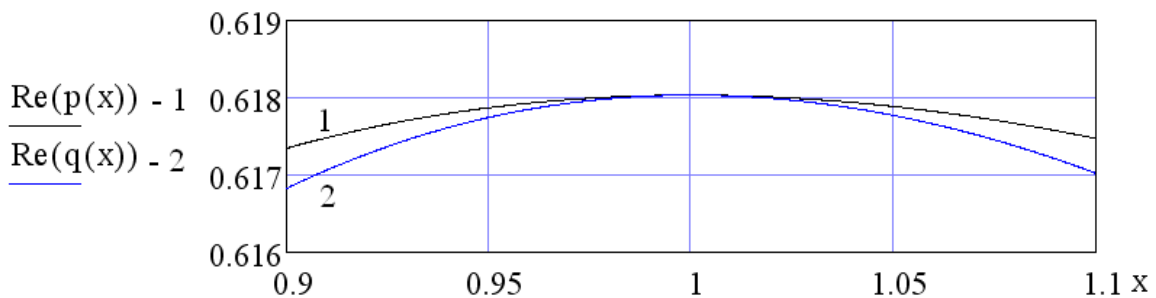


Рис. 9

Укажем также, что пологие симметричные экстремумы, равные  $\phi$  или  $\Phi$ , были обнаружены не только в функциях, содержащих вложенные радикалы, но и в функциях лишь на основе цепных дробей. Для удобства сравнения введём дополнительный индекс 1 для определённой в (1) функции  $f(x)$ :  $f_1(x) = f(x)$ , указывающий на то, что в  $f_1(x)$  цепная дробь начинается с  $x^\beta = x^1$ . Кроме того, введём две новых функции  $f_2(x)$  и  $f_3(x)$ , в которых цепные дроби начинаются, соответственно, с  $x^2$  и  $x^3$ :

$$f_2(x) = \frac{x^{1/\sqrt{2(\phi+\Phi)}}}{1 + \frac{x^2}{1 + \frac{x^3}{1 + \dots}}}, \quad f_3(x) = \frac{x^{3/4}}{1 + \frac{x^3}{1 + \frac{x^4}{1 + \dots}}} \quad (13)$$

На рис 10 показаны графики реальных частей функций  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ , равных при  $x > 0$  самим функциям  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ . Видно, что с ростом показателя степени  $\beta$  начального элемента цепной дроби происходит постепенное преобразование несимметричного относительно  $x = 1$  плато функции  $f_1(x)$  в симметричные относительно  $x = 1$  плавные максимумы функций  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ , равные  $\phi$  при  $x = 1$ . При этом у функций  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$  появляется тонкая структура - минимумы при  $x = \sqrt{\Phi} \approx 1,272$ . Кроме того, графики функций  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$  пересекаются при  $x \approx \sqrt{2} \approx 1 / \sin(\sqrt{\phi})$ .

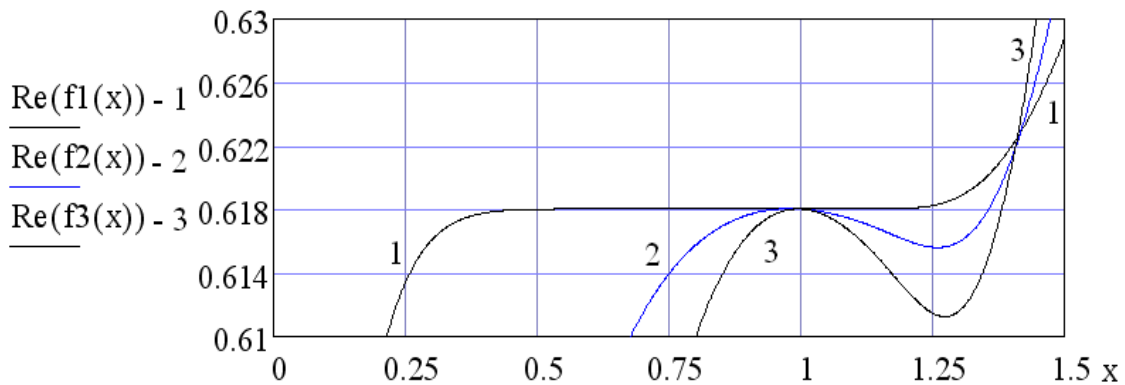


Рис. 10

Отметим также что, как было нами установлено, вблизи точки  $x = 1$  цепные дроби можно аппроксимировать конечными наборами степенных функций с точностью, естественно, зависящей от числа слагаемых. Так, введённая в (2) функция  $g(x)$  с  $g(1) = \Phi$  хорошо аппроксимируется при  $x \approx 1$ , напр., такой найденной функцией  $h(x)$ :

$$h(x) = 1 + (x + \delta)^0 + (x + \delta)^1 - (x + \delta)^3 + (x + \delta)^5 + (x + \delta)^6 - (x + \delta)^7 - 2(x + \delta)^8 + 2(x + \delta)^{10} + 2(x + \delta)^{11} \quad (14),$$

$$\delta \approx -1,480524246 \approx -7 / \sqrt{2 \cdot 5^3} \approx -(\phi^4 + \Phi^4) / (\phi\Phi + \Phi\phi)^{1/2} (\phi + \Phi)^{3/2} \quad (15)$$

Причём, при найденном значении  $\delta$   $h(1) \approx \Phi$  с точностью  $< 10^{-9}$ .



Таким образом, полученные результаты существенно дополняют общие сведения о цепных дробях и вложенных радикалах (см., напр. [1-5]) и являются, несомненно, интересными как с чисто математической точки зрения, так и с точки зрения возможных практических приложений таких функций.

Дл последнего времени цепные дроби (Continued fractions) и вложенные радикалы (Nested radicals) представляли, в основном, академический интерес. Но недавно были предложены важные приложения таких функций. Так, напр., в работе [6] рассмотрен новый метод расчёта аномалий в геофизических полях внутри планет с помощью цепных дробей. Существенным преимуществом этого метода является отсутствие в аппроксимирующих функциях на основе цепных дробей эффекта Гиббса – сильных колебаний частичных сумм рядов Фурье на границах отрезка, имеющих место при аппроксимациях с помощью тригонометрических функций. В этой связи подчеркнём, что быстрые (без переходных процессов) изменения значений функций были обнаружены и для функций на основе вложенных радикалов (см. рис. 5) данной статьи.

### ***Список литературы***

1. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби: 4-е изд. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 112 С.
2. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. М., Мир, 1985. – 414 С.
3. *Арнольд В. И.* Цепные дроби. – М., Центр непрерывного математического образования, 2001. – 40 С.
4. *Notebooks of Srinivasa Ramanujan.* Tata Institute of Fundamental Research. Bombay, 1957, Vol. 1, 2.
5. *Ramanujan S.* Collected Papers. Chalsea, New York, 1962  
Nested Radicals. <http://mathworld/wolfram.com/>
6. *Ерохин К.М.* Аналитическое продолжение геофизических полей в область источников аномалий методом аппроксимации цепными дробями. Геофизика (ЕАГО), 2007, № 1, 51-58.