Н. Ф. Семенюта

ОБ УРАВНЕНИЯХ «ЗОЛОТОГО» СЕЧЕНИЯ

Аннотация: представлены множества уравнений «золотого» сечения типа Фибоначчи, Люка. Показаны их связи с золотым сечением Ф = 1,618 и 1/Ф = 0,618.

Ключевые слова: уравнения «золотого» сечения, последовательности чисел Фибоначчи и Люка, характеристические уравнения типа Фибоначчи, Люка.

Содержание

Сам факт того, что золотая пропорция является, всего лишь одним из представителей большого семейства золотых констант, не означает, что золотая пропорция утрачивает свою уникальность и исключительное место в гармонии природы.

Н. В. Косинов

1. Исходные положения

В математической теории гармонии одним из основных уравнений, характеризующих рекуррентные последовательности чисел, является так называемое «золотое» уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ [1]. Оно же является основой простейших электрических моделей рекуррентных последовательностей чисел Фибоначчи, Люка и др. [2]. В настоящей статье рассмотрены «золотые» уравнений типа Люка $x^2 - L_n x + (-1)^n = 0$ и Фибоначчи $x^2 - F_n x + (-1)^n = 0$, а также уравнения с иррациональными коэффициентами, корни которых приближаются или равны «золотому» сечению.

2. Уравнения типа Фибоначчи и Люка

Основной последовательности чисел Фибоначчи

$$\begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 \ldots \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13\ldots \end{matrix} \qquad (1)$$

соответствует характеристическое уравнение:

$$x^2 - x - 1 = 0, \qquad (2)$$

получившее название «золотого» уравнения. Значения корней уравнения (2), равны числам «золотого» сечения:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi , \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\Phi^{-1}.$$

Значения чисел Φ^n и Φ^{-n} с положительными и отрицательными степенями приведен в таблице 1.

Таблица 1 – Положительные и отрицательные степени числа Φ^n

n	0	1	2	3	4	5	6
Φ^n	$\frac{2+0\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+1\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3+1\sqrt{5}}{2}$	$\frac{4+2\sqrt{5}}{2}$	$\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$	$\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$	$\frac{18+8\sqrt{5}}{2}$
Φ^{-n}	$\frac{2-0\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+1\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3-1\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-4+2\sqrt{5}}{2}$	$\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-11+5\sqrt{5}}{2}$	$\frac{18-8\sqrt{5}}{2}$

Значениям Φ^n соответствуют две последовательности чисел:

- Люка: L_0 L_1 L_2 L_3 L_4 L_5 L_6 L_7 …,
  2 1 3 4 7 11 18 29 …,

- Фибоначчи: F_0 F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 F_6 F_7 F_8 …,
  0 1 1 2 3 5 8 13 21 …

Значениям Φ^{-n} соответствуют две знакопеременные последовательности

- Люка: L_0 L_{-1} L_{-2} L_{-3} L_{-4} L_{-5} L_{-6} L_{-7} L_{-8} …,
  2 –1 3 –4 7 –11 18 –29 47 …,

- Фибоначчи: F_0 F_{-1} F_{-2} F_{-3} F_{-4} F_{-5} F_{-6} F_{-7} F_{-8} F_9 …, -
  0 1 –1 2 –3 5 –8 13 –21 34 …

Золотое сечение n-й степени может быть записано в виде:

$$\Phi^n = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}, \qquad \Phi^{-n} = \frac{L_{-n} - F_{-n}\sqrt{5}}{2}.$$

Значения разности $x_1^n - x_2^{-n}$ и суммы $x_1^n + x_2^{-n}$ корней приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Разность и сумма чисел корней характеристического уравнения $x^2 - x - 1 = 0$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1^n - x_2^{-n}$	$0\sqrt{5}$	$1\sqrt{5}$	$1\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$	$5\sqrt{5}$	$8\sqrt{5}$	$13\sqrt{5}$	$21\sqrt{5}$
$x_1^n + x_2^{-n}$	2	1	3	4	7	11	18	29	47

Из таблицы 2 следуют две последовательности чисел. Первая ($x^n - x^{-n}$), состоит из произведений чисел Фибоначчи F_n и числа $\sqrt{5}$, вторая ($x^n + x^{-n}$) – состоит из чисел Люка L_n. Значения чисел последовательностей L_n, начиная с n > 10, становятся мало отличными от значений чисел последовательности $F_n\sqrt{5}$. Тогда,

$$L_n = F_n\sqrt{5}, \qquad F_n = \frac{L_n}{\sqrt{5}}.$$

Числом, связывающим последовательности Фибоначчи и Люка, является коэффициент пропорциональности $\sqrt{5}$. Отсюда следует, что свойства последовательностей чисел Фибоначчи и Люка, за редким исключением, с точностью до коэффициента $\sqrt{5}$ совпадают [3, 4].

3. Взаимосвязь последовательностей чисел Люка и Фибоначчи

Из таблицы 2 следуют также формулы взаимосвязь чисел Люка и Фибоначчи с «золотым» сечением. Так, в случае положительных значений n, имеем:

$$L_n = Ф^n + (–1)^n Ф^{–n},$$

$$F_n = \frac{Ф^n - (-1)^n Ф^n}{Ф + Ф^{-1}} = \frac{Ф^n - (-1)^n Ф^n}{\sqrt{5}} .$$

Формулы (6) и (7) известны как формулы французского математика Жака Бине (1786–1856) для чисел Фибоначчи и Люка:

– числа Фибоначчи: $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

– числа Люка: $$L_n = (1 + \sqrt{5}\,)^n + (1 - \sqrt{5}\,)^n.$$

4. Характеристические уравнения последовательностей чисел типа Люка

С учетом связи корней приведенного квадратного уравнения с числами Люка, уравнения можно представить в следующем обобщенном виде:

$$x^2 - L_n x + (-1)^n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

из которого следует множество «золотых» уравнений последовательностей чисел типа Люка:

$$\begin{aligned}
&x^2 - 2x + 1 = 0, && n = 0,\\
&x^2 - 1x - 1 = 0, && n = 1,\\
&x^2 - 3x + 1 = 0, && n = 2,\\
&x^2 - 4x - 1 = 0, && n = 3,\\
&x^2 - 7x + 1 = 0, && n = 4,\\
&x^2 - 11x - 1 = 0, && n = 5
\end{aligned}$$

и которым, соответствуют «золотые» корни x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{0}}{2} = 1{,}000 = Ф^0 = 0Ф + 1, \qquad x_2 = \frac{2-\sqrt{0}}{2} = 1{,}000 = Ф^0, \qquad n = 0,\ \ q = 2,$$

$$x_1 = \frac{1+1\sqrt{5}}{2} = 1{,}618 = Ф^1, = 1Ф + 0, \qquad x_2 = \frac{1-1\sqrt{5}}{2} = -0{,}618 = -Ф^{-1}, \quad n = 1,\ \ q = 1,$$

$$x_1 = \frac{3+1\sqrt{5}}{2} = 2{,}618 = Ф^2 = 1Ф + 1, \qquad x_2 = \frac{3-1\sqrt{5}}{2} = 0{,}382 = Ф^{-2}, \qquad n = 2,\ \ q = 3,$$

$$x_1 = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 4{,}236 = Ф^3 = 2Ф + 1, \qquad x_2 = \frac{4-2\sqrt{5}}{2} = -0{,}236 = -Ф^{-3}, \quad n = 3,\ \ q = 4,$$

$$x_1 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} = 6{,}854 = \Phi^4 = 3\Phi + 2, \qquad x_2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} = 0{,}146 = \Phi^{-4}, \qquad n = 4, \quad q = 7,$$

$$x_1 = \frac{11+5\sqrt{5}}{2} = 11{,}090 = \Phi^5 = 5\Phi + 3, \qquad x_2 = \frac{11-5\sqrt{5}}{2} = 0{,}090 = \Phi^{-5}, \qquad n = 5, \quad q = 11.$$

Корни уравнений x_1 и x_2 образуют последовательность положительных и отрицательных степеней числа Ф.

5. Характеристические уравнения последовательностей чисел типа Фибоначчи

Для последовательности Фибоначчи характеристическое квадратное уравнение имеет вид:

$$x^2 - F_n x + (-1)^n = 0, \qquad n = 0,\ 1, 2, 3, \ldots$$

из которого следует множество «золотых» уравнений типа Фибоначчи:

$$\begin{array}{ll} x^2 - 0x + 1 = 0, & n = 0, \\ x^2 - 1x - 1 = 0, & n = 1, \\ x^2 - 1x + 1 = 0, & n = 2, \\ x^2 - 2x - 1 = 0, & n = 3, \\ x^2 - 3x + 1 = 0, & n = 4, \\ x^2 - 5x - 1 = 0, & n = 5, \end{array}$$

корни, которых соответственно, равны x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{0+2\sqrt{0-1}}{2} = \sqrt{-1} = j, \qquad x_2 = \frac{0-2\sqrt{0-1}}{2} = -\sqrt{-1} = -j, \qquad n = 0, \quad q = 0,$$

$$x_1 = \frac{1+1\sqrt{5}}{2} = 1{,}618 = 1\Phi^1, \qquad x_2 = \frac{1-1\sqrt{5}}{2} = -0{,}618 = -\Phi^1, \qquad n = 1, \quad q = 1,$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{1+3j}{2}, \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{1-3j}{2}, \qquad n = 2, \quad q = 1,$$

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2} = 2{,}414, \qquad x_2 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2} = -0{,}414, \qquad n = 3, \quad q = 2,$$

$$x_1 = \frac{3+1\sqrt{5}}{2} = 2{,}618 = 1\Phi^2 \qquad x_2 = \frac{3-1\sqrt{5}}{2} = 0{,}382 = \Phi^{-2}, \qquad n = 4, \quad q = 3,$$

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{29}}{2} = 5{,}192 \approx 2\Phi^2, \qquad x_2 = \frac{5-\sqrt{29}}{2} = -0{,}192 \approx -\frac{1}{2}\Phi^{-2}, \qquad n = 5, \quad q = 5,$$

$$x_1 = \frac{8+\sqrt{60}}{2} = 7{,}873 \approx 3\Phi^2, \qquad x_2 = \frac{8-\sqrt{60}}{2} = 0{,}127 \approx \frac{1}{3}\Phi^{-2}, \qquad n = 6. \quad q = 8,$$

$$x_1 = \frac{13+\sqrt{173}}{2} = 13{,}076 \approx 5\Phi^2, \quad x_2 = \frac{13-\sqrt{173}}{2} = -0{,}076 = -\frac{1}{5}\Phi^{-2}, \quad n = 7. \quad q = 13,$$

Корни первого уравнения ($n = 0$) чисто мнимые $x_{1,2} = \pm j$. При $n = 1$ корни уравнения равны «золотому» сечению x_1 = Ф и $x_2 = -\Phi^{-1}$. При $n = 2$ корни уравнения становятся комплексными, а при $n = 3$ и больше – снова «золотыми». Появление мнимых и комплексных чисел в отмеченных случаях требует более детального исследования. Здесь обратим только внимание на появление чисел Φ^2 и Φ^{-2}. Эти числа играют важную роль в структурах объектов «золотого» сечения, в том числе и электрических моделях [5, 6].

6. Характеристические уравнения с иррациональными коэффициентами

Характеристические уравнения с иррациональными коэффициентами при *x*:

$$x^2-\sqrt{5}\,x+1=0,\quad x_1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1{,}618=\Phi^1,\quad x_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618=\Phi^{-1},$$

$$x^2-\sqrt{5}\,x-1=0,\quad x_1=\frac{\sqrt{5}+3}{2}=2{,}618=\Phi^2,\quad x_2=\frac{\sqrt{5}-3}{2}=-0{,}382=-\Phi^{-2},$$

$$x^2+\sqrt{5}\,x+1=0,\quad x_1=\frac{-\sqrt{5}+1}{2}=-0{,}618=-\Phi^{-1},\quad x_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}=-1{,}618=-\Phi,$$

$$x^2+\sqrt{5}\,x-1=0,\quad x_1=\frac{-\sqrt{5}+3}{2}=0{,}382=\Phi^{-2},\quad x_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}=-2{,}618=-\Phi\ ,$$

$$x^2-\sqrt{29}\,x+1=0,\quad x_1=\frac{\sqrt{29}+\sqrt{25}}{2}=5{,}192=2\Phi^2,\quad x_2=\frac{\sqrt{29}-\sqrt{25}}{2}=0{,}192=\frac{1}{2}\Phi^{-2},$$

$$x^2-\sqrt{29}\,x-1=0,\quad x_1=\frac{\sqrt{29}-\sqrt{33}}{2}=-0{,}618=-\Phi^{-1},\quad x_2=\frac{-\sqrt{29}-\sqrt{33}}{2}=-1{,}618=-\Phi\ ,$$

$$x^2+\sqrt{29}\,x+1=0,\quad x_1=\frac{-\sqrt{29}+\sqrt{25}}{2}=-0{,}192=-\frac{1}{2}\Phi^{-2},\quad x_2=\frac{-\sqrt{29}-\sqrt{25}}{2}=0{,}192=\frac{1}{2}\Phi^{-2},$$

$$x^2+\sqrt{29}\,x-1=0,\quad x_1=\frac{-\sqrt{29}+\sqrt{33}}{2}=-0{,}618=-\Phi^{-1},\quad x_2=\frac{-\sqrt{29}-\sqrt{33}}{2}=-1{,}618=-\Phi\ ,$$

$$x^2-\sqrt{60}\,x+1=0,\quad x_1=\frac{\sqrt{60}+\sqrt{56}}{2}=1{,}618=\Phi^1,\quad x_2=\frac{\sqrt{60}-\sqrt{56}}{2}=-0{,}618=-\Phi^{-1},$$

$$x^2-\sqrt{60}\,x-1=0,\quad x_1=\frac{-60+\sqrt{64}}{2}=-0{,}618=-\Phi^{-1},\quad x_2=\frac{-\sqrt{60}-\sqrt{64}}{2}=-1{,}618=-\Phi^1,$$

$$x^2+\sqrt{60}\,x+1=0,\quad x_1=\frac{\sqrt{60}+\sqrt{56}}{2}=1{,}618=\Phi^1,\quad x_2=\frac{\sqrt{60}-\sqrt{64}}{2}=-0{,}618=-\Phi^{-1},$$

$$x^2+\sqrt{60}\,x-1=0,\quad x_1=\frac{-\sqrt{60}+\sqrt{64}}{2}=-0{,}618=-\Phi^{-1},\quad x_2=\frac{-\sqrt{60}-\sqrt{64}}{2}=-1{,}618=-\Phi^1.$$

В рассмотренных квадратных уравнениях «золотого» сечения коэффициенты при x равны как целочисленным числам Люка и Фибоначчи, так и иррациональным числам $\sqrt{5}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{60}$ и т. д. Такие уравнения выпали из поля зрения исследователей. Может, я ошибаюсь?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье изложена авторская точка зрения на «золотые» уравнения типа $x^2 \pm qx \pm 1 = 0$, уравнения типа Люка, Фибоначчи и уравнения с иррациональными числами при x. При этом точка зрения совпадает с выводами статьи Н. В. Косинова «Золотая пропорция, Золотые константы и Золотые теоремы» [1]. Множество «золотых» уравнений типа $x^2 \pm qx \pm 1 = 0$ свидетельствует о том, что разнообразие природы не могло ограничиться простейшим «золотым» уравнением $x^2 - x - 1 = 0$.

Прошу друзей, коллег и читателей, возникшие критические замечания и пожелания по изложенному материалу, сообщить по электронной почте: nikolay.semeniuta@gmail.com. Буду благодарен.

Литература

1. Косинов Н. В. Золотая пропорция, Золотые константы и Золотые теоремы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14379, 02.05.2007.

2. Семенюта, Н.Ф. Электрические модели золотого сечения и рекуррентных последовательностей чисел / Н. Ф. Семенюта // Гармоничное развитие систем – третий путь человечества. – Одесса: ООО Институт креативных технологий, 2011. – С. 87–93.

3. Семенюта, Н. Ф. Свойства рекуррентных последовательностей, используемых для анализа электрических цепей / Н. Ф. Семенюта //Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте: тр. Белорус. ин-та инж. ж.-д. трансп. – Гомель: БелИИЖТ, 1971. – Вып. 95. – С. 28–32.

4. Семенюта, Н. Ф. О связи параметров цепочечных схем с рекуррентными числовыми последовательностями / Н. Ф. Семенюта // Теоретическая электротехника. – Львов: Вища школа, 1974. – Вып. 17. – С. 23–25.

5. Семенюта, Н.Ф. Новое о золотом сечении / Н. Ф. Семенюта // XVII Международ. науч.-практич. конф: Научное обозрение физико-математических и технических наук в XXI веке: «Prospero», – № 5(17). 2015. – С.127–131.

6. Семенюта, Н.Ф. К тайнам золотого сечения. Евроазийский союз ученых (ЕСУ) / Н. Ф. Семенюта // – № 4(13), 2015.